高等学校教材

高等数学

下册

路见可　熊全淹编

高等教育出版社

高　　等　　数　　学

下　　册

路见可　熊全淹　编

高 等 教 育 出 版 社

本书是为綜合大学化学专业編写的“高等数学”課程教材．全书分上、下册出版．上册包括解析几何与一元函数的微积分学．下册包括无穷級数，多元函数的微积分学与微分方程等．书中叙述比較詳細，便于学生自学复习，也編入一部分可供选擇学习的材料，以滿足不同学生的需要．为了便师生方便，书中并附有一些基本习题．

本书可供綜合大学、师范学院化学专业作为教材之用，也可作工科性质相近的各专业的参考用书．

高 等 数 学

下 册

路见可 熊全淹编

北京市书刊出版业营业許可证出字第119号

高等教育出版社出版（北京景山东街）

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·1205 开本 850×1168 1/32 印张 6 15/16

字数 186,000 印数 0,001—4,000 定价（5）¥0.70

1965 年9月第1版 1965 年9月北京第1次印刷

目　　录

第七章　级数与函数展开

§7.1　级数概念

极限概念是数学分析的基础．在前面儿章我们已经看到，从因变数的增量与自变数的增量的比求极限，便引进了导数概念，而求一种所谓“积分和”的极限便引进了定积分概念．这里要讲的“无穷多个数的和”它也是某种极限，这便是本章要讲的级数理论．

我们仍旧从第二章开始时所举的例子说起．一根单位长的木棍，每天截去一半，我们现在来看逐日所截下的累积长度．例如5日累计共截下

$$A_5=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}=\frac{31}{32},$$

一般，n 日累计共截下

$$A_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}.$$

现在如果问，日复一日永无止境地下去，究竟“共计”截下多少长度呢？我们形式地就把这个长度记作

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots, \tag{1}$$

就好像是把每日所截得的长度无穷无止地一齐“加”起来一样，这就叫做一个**无穷級数**或简称**級数**．

实际上我们没有办法把无穷个数真的一齐加起来，我们只能把(1)中的第一项加上第二项，再加上第三项，再加上第四项，等等，但无论如何加不完所有的项；然而另一方面，我们可清楚地看到所加的项越多得到的和就越接近于1(从问题本身，用常识也可判断出)，即

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=1,$$

这个 1 我们就算作级数(1)的和,不过这个“和”不是用普通的算术方法得来的，而是经过了一个极限步骤. 所以上面问题的答案是：无穷无止地取下去,累积起来截下的长度“总共”是 1；但不要把这个答案理解为木棍最后有一天被一起取下来了,而是说越取下去,就越差不多一起取下来了.

从这个简单例子,可以引出一般的级数定义如下:

定义　设有一数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$,形式地依次把它们加起来写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{2}$$

这就叫做一**无穷级数**(简称级数),u_n叫做它的第 n 项. 从第一项起，依次作下列各有限项的和:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ \ S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots,\ S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\ \cdots$$

它们都称作级数(2)的**部分和**,例如 S_n 就称作它的(前) n 项的部分和. 如果部分和的数列 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$有极限 S(某一常数)存在:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S,$$

则 S 就称作级数(2)的**和**,记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

这时称级数(2)为**收斂級数**,并说它**收斂于** S；如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ 不存在(包括为无穷大),则称级数(2)为**发散級数**,这时它就没有和可言.

我们很容易举出发散级数的例子. 例如级数

$$1+1+\cdots+1+\cdots,$$

它的前 n 项部分和 $S_n = n$, 而当 $n\to+\infty$ 时 S_n 趋向无穷大，故无极限,因此它就是发散的.

给出一个级数(2)(就是已知它的各项),怎样来判别它收斂或发散是级数论中极重要的问题，这就是部分和数列 $\{S_n\}$ 有无极限的问题；前面我们已经知道,数列的极限存在与否，没有一般的方法来判别，所

以级数的敛散也没有一般的判别法. 但是我们也有许多判别法可以用来检查相当多类型的级数是否收敛，这正是我们下面几节的主旨. 至于如果知道了一个级数(2)收敛，如何去求出它的和来，这就是求数列$\{S_n\}$的极限问题，我们前面已知道没有一般的方法，而且现在还增加了一层困难，那就是往往不容易把 S_n 中的 n 个项加在一起使它简化成一个紧凑的式子，这样我们更无法求它的极限了.

级数(2)是否收敛，依据部分和数列$\{S_n\}$有无极限而定；所以，整个级数理论是与数列理论相应的. 读者牢牢记住这一点后，对于级数理论就很容易掌握了. 例如，根据数列理论，我们很容易得出级数的下列性质:

1. 在一级数中添加有限个项或删去有限个项并不会影响它的敛散性.

2. 如果级数(2)收敛，和为S，而 c 是一个常数，则级数

$$\Sigma cu_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$$

也收敛，且其和为 cS；如果(2)发散，又 $c\neq 0$，则上面这级数也发散.

3. 如果两个级数 Σu_n 与 Σv_n 都收敛，且其和分别为 S 与 T，则把这两级数逐项相加或相减构成的新级数

$$\Sigma(u_n\pm v_n)=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

也必收敛，且和为 $S\pm T$.

我们只来证明性质 1 的一个特殊情况，那就是：设在级数(2)的第一项 u_1 前面再添加一项 u_0 而构成一新的级数

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{2'}$$

求证级数(2)与(2)$'$同时收敛或同时发散. 把(2)$'$的前 n 项部分和记作S'_n，于是

$$S'_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}=u_0+S_{n-1},$$

其中 u_0 是常数，所以

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = u_0 + \lim_{n\to+\infty} S_{n-1};$$

显然等式两边的极限要末都存在，要末都不存在. 注意 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1}$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ 意义相同，所以这也就是级数(2)与(2)′要末都收敛，要末都发散.

性质1的其他的情况和性质2,3留给读者自己去证明.

上面这三个性质对有穷个项的加、减法来说显然都成立，也就是说由有穷项的加、减法变为无穷项的加、减法时，这些性质都不变.

下面这个性质值得特别注意.

定理　如果级数(2)收敛，则必 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

证　既然级数(2)收敛，我们设它的和为 S，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=S$.

因为 $u_n=(u_1+u_2+\cdots+u_n)-(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})=S_n-S_{n-1}$，

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n-\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1}=S-S=0$，

证毕.

注意，这个定理的逆定理并不成立，就是说，从 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$，并不能推知级数(2)收敛(参看下面例3)；因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ 是级数(2)收敛的必要条件，而不是充分条件.

从这个定理，立刻可以得出下一推论：

推論　如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\neq 0$(包括极限不存在)，则级数(2)必发散.

利用这个推论，往往一眼就可看出某些级数是发散的.

例如级数 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$ 与 $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ 显然都是发散的，因为对于前者 $u_n=n$，而 $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$，对于后者 $u_n=(-1)^{n-1}$，当 $n\to+\infty$ 时，$(-1)^{n-1}$ 恒在 $+1$ 与 -1 两处跳动，没有极限.

下面再举几个例子，其中例2、例3特别重要，最好记住.

例1.　求证级数 $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 收敛，并求出其和.

解　我们只要把级数的部分和 S_n 算出，若能求出其极限，则级数和就求得了，当然它就是收敛的.

因为 $$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

故级数和

$$S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

例 2. 试讨论公比为 q 的等比级数（几何级数）$\Sigma aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$的敛散性($a\neq0$).

解 先设$|q|<1$. 因为由等比级数求和公式，前 n 项部分和

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

又因为这时$|q|<1$，由§2.1，例 4 的 1，当 $n\to+\infty$ 时，$q^n\to0$，故

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{a}{1-q},$$

因此级数收敛，且和就是$\frac{a}{1-q}$.

再设$|q|\geqslant1$，由§2.1，例 4 的 2 与 3，当 $n\to+\infty$ 时 aq^{n-1} 不以 0 为极限，所以由上述推论，级数发散.

例 3. 试证调和级数 $\sum\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$发散.

证 这时 $u_n=\frac{1}{n}$，当 $n\to+\infty$ 时 $u_n\to0$，所以不能由此断定级数收敛或发散. 这里部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

右边无法把它合并成一个项，因此很难看出它有无极限，但我们容易估计 $S_1, S_2, S_4, S_8, \cdots, S_{2^n}, \cdots$:

$S_1=1,$

$S_2=1+\frac{1}{2},$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{2}{2},$$

$$S_8=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2},$$

…………………………………………………

$$S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{8\text{项}}\right)+\cdots+\left(\underbrace{\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{项}}\right)$$
$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n}=1+\frac{n}{2},$$

……………………………

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n}{2}\right)=+\infty$，而 $S_{2^n}>1+\frac{n}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2^n}=+\infty$. 因此在数列 $\{S_n\}$ 中，不论 n 多么大，S_n 都不可能密集在某一数附近，也就是说数列 $\{S_n\}$ 的极限不存在①，因此级数 $\sum\frac{1}{n}$ 发散.

最后，我们再介绍一个概念，就是所谓收敛级数的余项. 设级数(2)收敛，其和为 S，则

$$r_n=S-S_n$$

称作级数(2)的(第 n 个)余项. 这个余项就表明用部分和 S_n 来代替级数的和 S 时所产生的误差. 发散级数没有和，当然也谈不上余项.

读者不难证明，r_n 就是级数(2)中取掉前 n 项后所剩级数的和：

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots,$$

而且由收敛及和的定义，立刻得知 $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=0$.

① 读者不难由极限定义证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

习 题

1. 试用 ε-N 方法，写出级数收敛于其和的定义.

2. 根据下列各级数前几项的规律，写出其第 n 项，并根据本节的定理或推论，看能否对级数的敛散性作什么断语：

(i) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$； (ii) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；

(iii) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{5}{27}+\frac{8}{81}+\cdots$； (iv) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\cdots$；

(v) $\cos 1+\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{3}+\cos\frac{1}{4}+\cdots$；

(vi) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\cdots$.

答：(i) $\frac{n}{n+1}$，发散； (ii) $\frac{1}{2n-1}$； (iii) $\frac{2n}{3^n}$； (iv) $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$，发散；
(v) $\cos\frac{1}{n}$，发散； (vi) $\frac{1}{n!}$.

3. 求证下一级数发散：

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{40}\right)+\cdots.$$

4. 试判断下列各级数的敛散性，如收敛并求出其和：

(i) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{n(n+3)}+\cdots$；

(ii) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$；

(iii) $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\cdots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\cdots$；

(iv) $\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+\cdots+\ln\frac{n}{n+1}+\cdots$.

答：(i) $\frac{11}{18}$； (ii) $\frac{1}{4}$； (iii) $\frac{3}{2}$； (iv) 发散.

5. 试把循环小数 $0.\dot{5}$ 与 $0.4\dot{1}\dot{2}$ 化为分数. 答：$\frac{5}{9}$，$\frac{68}{165}$.

§7.2 正項級数

如果级数

$$\Sigma u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

的各项都是正的: $u_n > 0$, 则称为**正項級数**. 判別一个级数是否收斂是级数理论的首要问题, 而正项级数的理论是研究一般项级数的基础. 所以本节先来研究正项级数收斂或发散的某些判别法①. 这些判别法对于"负项级数"($u_n < 0$)也可以应用, 因为用 $c = -1$ 乘它的各项, 它就变成一正项级数, 而其斂散性不变(见上节性质 2); 同时对于只有有限项改变符号的级数, 这些判别法也能适用, 因为我们只要把前面含有变号的若干项一齐删掉再考虑剩下级数的斂散性好了(见上节性质 1).

设 Σu_n 是一正项级数, 它的部分和数列为$\{S_n\}$, 由于每个 $u_n > 0$, 显然它是一个(单调)增数列(§2.5):

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots.$$

这时有两种可能: 或者$\{S_n\}$有界, 也就是说存在一个常数 M, 使得

$$S_n \leqslant M (n = 1, 2, \cdots);$$

或者$\{S_n\}$无界. 当$\{S_n\}$有界时, 由 §2.5, 定理 2, 得知它有极限, 因而级数 Σu_n 收斂; 当$\{S_n\}$无界时, 它没有极限(这时 $S_n \to +\infty$), 因而级数 Σu_n 发散②.

从以上的分析, 可以得出正项级数斂散的一个必要充分条件.

定理 1. 正项级数收斂的必要充分条件是它的部分和数列有界.

根据这一定理, 就能建立判别正项级数收斂与否的一个最基本方法, 而其它的判别法很多是从这个判别法推导出来的, 所以它就显得特

① 我們不考慮級数中有某些項(可能有无穷个項)等于零的情况, 因为如果有这种項时, 就把它們删去, 并不会影响級数的斂散性. 讀者不妨自己证明这一点. 所以本节的理論对于含零項的級数也是成立的.

② 由此可知: 正項級数发散时一定发散于无穷大.

别重要:

定理 2（**比较判别法**）. 设有二正项级数

$$\Sigma u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

$$\Sigma v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots,$$

它们的对应各项满足不等式 $u_n \leqslant v_n (n=1, 2, \cdots)$; 那末, 如果级数 Σv_n 收敛, 则级数 Σu_n 也收敛, 如果级数 Σu_n 发散, 则级数 Σv_n 也发散.

证 令

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$

则由假设, $S_n \leqslant T_n$.

如果级数 Σv_n 收敛, 则由上述定理 1, $\{T_n\}$ 有界: 因此有一常数 M 存在, 使得 $T_n \leqslant M$; 因而更有 $S_n \leqslant M$, 也就是 $\{S_n\}$ 也是有界的, 再根据定理 1, 级数 Σu_n 就是收敛的.

反过来, 如果级数 Σu_n 发散, 则级数 Σv_n 一定也发散; 因为如若 Σv_n 收敛的话, 由已经证明的结论可知 Σu_n 也要收敛了.

这一判别法可以这样来记住: 比收敛级数还"小"的级数也收敛, 比发散级数还"大"的级数也发散. 至于比收敛级数"大"的或比发散级数"小"的级数, 就不能确定是收敛或发散的了.

运用比较判别法时, 一定要先知道一些已知为收敛或发散的级数作为基础. 最常用的是上节例 2, 3 的等比级数 Σaq^{n-1} 与调和级数 $\sum\frac{1}{n}$.

例 1. 求证级数 $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}+\cdots$ 收敛.

证 因为 $\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$, 而等比级数 $\left(q=\frac{1}{2}\right)$

$$\sum\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

是收敛的, 因此由比较判别法可知原级数收敛.

例 2. 求证 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$收敛.

证　把级数的第一项拿掉(不影响敛散性),得

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots,$$

因为 $n!=1\cdot 2\cdots n>2^{n-1}$, 于是

$$\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},$$

但$\sum\frac{1}{2^{n-1}}$是公比 $q=\frac{1}{2}$的等比级数, 它是收敛的, 因此原级数也收敛.

例 3. 求证级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}(n+1)}+\cdots$收敛.

证　因为除$n=1$外, 恒有$\frac{1}{3^{n-1}(n+1)}\leqslant\frac{1}{3^n}$. 但$\sum\frac{1}{3^n}$是$q=\frac{1}{3}$的等比级数, 它是收敛的. 如果把两级数$\sum\frac{1}{3^{n-1}(n+1)}$, $\sum\frac{1}{3^n}$的第一项都拿掉, 由比较判别法可知前级数收敛; 再把第一项添加上去, 它仍旧收敛.

例 4. 求证级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}+\cdots$发散.

证　因为$\frac{1}{3n-1}>\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}$, 而$\sum\frac{1}{n}$是发散的, 因此$\sum\frac{1}{3n}$也是发散的, 由比较判别法可知原级数是发散级数.

例 5. 下面的级数称作**广义调和级数**或简称 p **级数**

$$\sum\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots,$$

求证: 当 $p>1$ 时, 级数收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时, 级数发散.

证　当 $p>1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}S_{2^n-1}&=1+\left\{\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right\}+\left\{\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right\}+\cdots+\left\{\frac{1}{(2^{n-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^p}\right\}\\&<1+\left\{\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right\}+\left\{\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right\}+\cdots+\left\{\frac{1}{(2^{n-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{n-1})^p}\right\}\\&=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$$<1+\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1}+\cdots=\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}=M,$$

这就是说对于任意 n, $S_n<M$, 因此这时 $\sum\frac{1}{n^p}$ 收斂.

当 $p\leqslant 1$ 时，我们也可以用上述方法，但没有必要了，因为用比较判别法 $\left(\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}\text{及}\sum\frac{1}{n}\text{是发散级数}\right)$，立即推得 $\sum\frac{1}{n^p}$ 发散.

p 级数本身与等比级数、调和级数一样也是在使用比较判别法时一个常用的基础级数，值得特别注意.

例 6. 求证级数 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$ 收斂.

证 因为 $\frac{1}{(2n-1)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$，而 $\sum\frac{1}{n^2}$ 是收斂级数，因此 $\sum\frac{1}{(2n-1)^2}$ 收斂.

注意：定理 2 中的条件 $u_n\leqslant v_n$ 不一定要从 $n=1$ 起就成立，只要从某个 n 起以后永远成立就行了；而且不等式 $u_n\leqslant v_n$ 也可改作 $u_n\leqslant cv_n$ $(c>0)$，判别法仍成立. 但是不要忘记，本判别法只能用于正项级数.

根据比较判别法还可以建立下面二个在应用上非常方便的判别法.

定理 3（达朗貝尔判别法）. 若有正数 $q<1$ 存在，使得[①] $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q$，则正项级数 Σu_n 收斂；若 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$，则发散.

证 若 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q$，分别令 $n=1,2,3,\cdots$，则得

$$u_2\leqslant qu_1,\ u_3\leqslant qu_2\leqslant q^2u_1,\ u_4\leqslant qu_3\leqslant q^3u_1,\ \cdots,\ u_n\leqslant qu_{n-1}\leqslant q^{n-1}u_1,\ \cdots,$$

即
$$u_n\leqslant q^{n-1}u_1.$$

但因 $q<1$，等比级数 $\Sigma q^{n-1}u_1$ 收斂，所以由比较判别法，级数 Σu_n 也收斂.

① 指对一切 $n=1,2,\cdots$. 当然只要自某个 n 起以后都成立也行，下同.

若 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$, 则 $u_{n+1}\geqslant u_n$, 显然 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 不能为零，因此级数发散. 定理证毕.

注意在这个判别法的第一段不能改为“若 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, 则级数 Σu_n 收斂”. 因为由 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, 只能推得 $u_{n+1}<u_n$, 没有办法应用比较判别法. 事实上，只知道 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ 不能保证级数 Σu_n 收斂，调和级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ 便是一例.

如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 则由达朗贝尔判别法可得下一推论:

推論　若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ 存在, 则当 $l<1$ 时级数 Σu_n 收斂, 当 $l>1$ 时级数 Σu_n 发散, 当 $l=1$ 时不能断定.

证　设 $l<1$. 取正数 $\varepsilon<1-l$. 由极限定义, 必有 N 存在, 当 $n>N$ 时, 便有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon$, 因此有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}-l<\varepsilon$, 故

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\varepsilon+l<1,$$

由达朗贝尔判别法，便知级数 Σu_n 收斂. 类似地可证明 $l>1$ 时级数发散. 当 $l=1$ 时, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 本身大于或小于 1 尚不能断定，当然更不能断定级数 Σu_n 的斂散性; 即使 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ 而 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to 1$, 也不能断定它收斂或发散.

定理 4(**哥西判别法**). 若有正数 $q<1$ 存在, 使得 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant q$, 则正项级数 Σu_n 收斂; 若 $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$, 则 Σu_n 发散.

证　若 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant q$, 则 $u_n\leqslant q^n$; 又因 $q<1$, 所以等比级数 Σq^n 收斂. 根据比较判别法, 级数 Σu_n 也收斂.

若 $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$, 则 $u_n\geqslant 1$, 因此不可能 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$, 所以 Σu_n 发散. 定理证毕.

同达朗贝尔判别法一样, 这里也要注意, 不能从 $\sqrt[n]{u_n}<1$ 推得级数 Σu_n 收斂. 并且也有类似的推论:

推論 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ 存在,则当 $l<1$ 时级数 Σu_n 收斂,当 $l>1$ 时级数发散,当 $l=1$ 时不能断定.

例 7. 判别级数

$$\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\cdots+\frac{2^n}{n!}+\cdots$$

的斂散性.

解 这里$u_n=\frac{2^n}{n!}$, 故

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{n+1}.$$

当 $n>2$ 时$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{2}{3}$, 或因 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0(<1)$,由达朗贝尔判别法便知此级数收斂.

例 8. 判别级数

$$e^{-1}+2^2e^{-2}+3^3e^{-3}+\cdots+n^ne^{-n}+\cdots$$

的斂散性.

解 因 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^ne^{-n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}ne^{-1}=+\infty$,

由哥西判别法的推论知此级数发散.

有很多级数用上述定理还不能判断其斂散性, 例如调和级数 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$便是如此. 这时下一判别法往往生效.

定理 5(哥西积分判别法). 已给正项级数Σu_n. 设 $u_n=f(n)$,其中 $f(x)$是一单调减函数①, 则级数 Σu_n 收斂或发散就看广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收斂或发散(§6.6)而定.

证 我们先把函数 $f(x)$的图形作出(图 7.1). 如图,作出许多矩形,每个矩形的底边宽都是1. 因为 $f(x)$单调减少, 所以在 $x=n$ 与 $n+1$ 间曲线下的面积 $\int_n^{n+1}f(x)\,dx$ 夹在带虚线的矩形和带实线的矩形之间, 这两矩形的面积分别为

① 这里我們一般假定 $f(x)$ 是連續的,因而自 1 至任意大的正數的积分总存在. 又积分下限可改作任意一个大于 1 的正數,而不影响广义积分的斂散性.