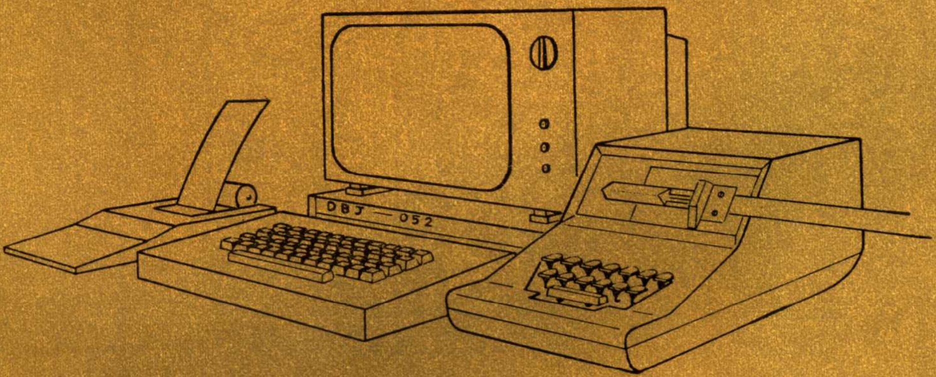
SKG数控语言



江苏科学技术出版社

SKG 数 控 语 言

孙宝成 著

江苏科学技术出版社

内 容 简 介

数控语言是利用电子数字计算机控制机床加工的专用语言。SKG是一种小型的数控语言，由于其性能强，使用方便，已得到国内有关方面的重视。本书由浅入深地介绍SKG的全部功能、工作流程和内部处理公式。书中还选编了典型的作图题和几十个实例（一部分是关于非圆曲线的）。为便于查阅，附录总结了全部语句类型和几何运算关系。

本书供数控编程工作者及关心数控自动编程的人员阅读。

SKG 数 控 语 言

孙 宝 成 著

出版：江苏科学技术出版社

发行：江 苏 省 新 华 书 店

印刷：扬 州 印 刷 厂

开本787×1092毫米 1/32　印张 5.75　字数 130,000

1983年11月第1版　1983年11月第1次印刷

印数 1—6,300 册

书号：15196·117　定价：0.80元

责任编辑　高志一

前　言

数控机床近年来已在生产中被广泛采用，特别是数控线切割机床，在我国更是日益普及。因此，如何使电子计算机更好地代替人工，为数控机床编制程序，以提高机床的使用率，加速新产品的制成，已成为许多人关注的问题。数控语言就是有助于解决此问题的计算机专用语言。

数控语言改进方案（简称SKG）采用了BASIC算法语言的基本格式，根据数控的需要，保留了BASIC的部分功能，增加了切削、对称、定位、……等语句类型。它把处理对象由数扩充到点、圆、直线，把运算关系由算术运算扩充到矢量运算、几何运算（平移、转角、求交点、求公切线、……），进行统一处理，使几何运算也可以象算术式那样嵌套连写。它用运动观点处理直线和圆，取消了传统的修饰词，简化了自动编程。因而它不但能简明地描写由圆和直线构成的复杂图形，而且能直接表示出非圆曲线（抛物线、椭圆、摆线、渐开线、各种凸轮等）上的节点，使计算机算出节点后，立印输出与之拟合的圆弧指令。

上述功能都是在只有4K（16位）内存的小型计算机中独立实现的。从1978年以来，我们通过大量的实践考验，不断提高软件质量，在单板微型机（以8080芯片作为中央控制机）上实现了上述功能，并增加了人机对话、源程序编辑等功能。由于微型机性能稳定，价格日益下降，SKG将随之为日益增多的用户服务。在许多同志的鼓励下，我们在原有的SKG资料的基础上，经过修改扩充，编成这本书。书中的例题都在计算机上经过实算考验。有的插图的粗轮廓线是微机控制绘图仪绘出的。

在编写此书过程中，曾得到南京电加工分会、江苏无线电厂、南京模具厂等单位的支持和帮助，在此谨致谢意。

孙宝成　于南京航空学院

1983年6月

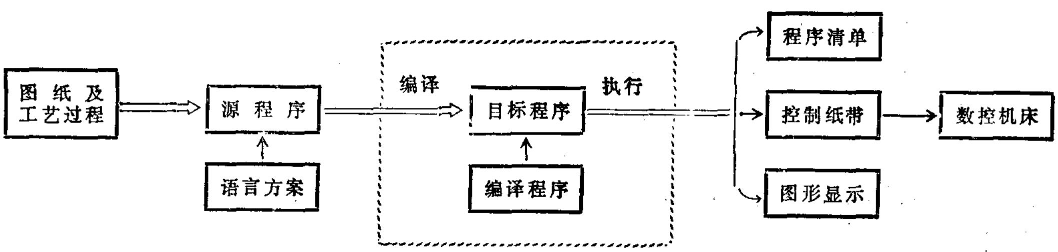
目 录

一、引　　言

数控线切割机，能按照控制信息在金属（包括硬质金属）块上准确割出复杂的轮廓，生产率高，经济效益好，因此是制造模具、样板和精密零件的先进设备。

上面提及的控制信息，是根据图纸和工艺要求而编制的。数控编程人员首先要分析图形，了解各个几何元素（一般指直线、圆、点、角度、距离、……）之间的关系，然后进行计算，计算出加工路线上各点的坐标值，然后才能编出控制程序及穿出控制纸带。对于复杂的图形，人工编程就显得效率低，容易出错，甚至无法进行。利用电子计算机代替人工编程，将大大提高线切割机的使用效率和加工性能。

近年来，电子计算机都装有内部程序。这样，用户就可用直观的“语言”输入计算机，使之按照用户要求而进行工作。“语言”种类很多，其中有算法语言，象BASIC，FORTRAN，……适于科学计算。可用算法语言为数控机床编程，但不如用专用语言——数控语言方便。编程人员只要把图纸中的几何元素、几何关系以及工艺过程，用数控语言表达出来，就得到一份“源程序”。源程序输入计算机时，由于内部程序（即编译程序）的作用，被转换为一连串机器指令——称“目标程序”，这过程称为“编译阶段”。然后进入“执行阶段”——机器通过大量计算，得到所需的控制信息，由打印机、穿孔机、……等外部设备输出。整个过程的示意图如下：



虚线方框内是计算机内部进行的工作。

数控语言改进方案（简称SKG）是从1976年开始提出的，在许多同志的热情关注下，在大量实践中，不断改进、完善而成型。它的问世使一种设想变成了现实：把算法语言和数控语言更紧密地结合起来。其特点是：

1.把几何运算和算术运算统一起来，可以嵌套连写，可以同时进行数值计算，形成了新颖的几何表达方法。

2.用运动观点处理直线和圆，由此免除了上、下、左、右……等繁复的修饰词*，而使源

*修饰词在数控语言中被用来区别两种可能发生的结果（例如圆和直线相交，就可能有两个交点）。日本FAPT数控语言用A、B、L、R（相当于中文的上、下、左、右）作修饰词。同一图形，旋转到不同象限，就要用不同的修饰词。

程序和内部处理大为简化。

3.切削语句可分可合，包圆角时只需在相应处写上圆角半径，可对非圆曲线及列表曲线自动用圆弧作光顺拟合。

4.自备简短而精度较高的浮点运算程序。整个结构紧凑简练，便于在单板微型机上实现。

5.源程序较简明直观，易于和图纸对照。

下面将介绍SKG的语言方案、实例和在微型机上的使用方法。

二、几何元素和几何运算

我们用圆、直线、点、数（角度，半径，距离*，齿数……）来描写平面图形。圆、直线、点、数统称为“几何元素”。几何元素的名字规定用下列字母后面跟着至多三位的十进整数（从0到999，这整数称为“下标”）：

A，D，R，I，J——数

P，O，V ——点

C，B，T ——圆

S，X，Y ——直线

上列十四个字母中任一单独字母也可作名字，其下标作为零处理，A，D，……X，Y各等同于A_0，D_0，……X_0，Y_0。

（1）基准元素：O，X，Y

在描写图形前，须选好方便的坐标系，用字母O代表原点，X代表正X轴，Y代表正Y轴。O，X，Y称为基准元素，不必预先说明，也不允许另行说明。

（2）点的基本限定式：$P_m=(D_n,D_k)$ （2-1）

上式中须把m，n，k换成自0到999的具体数，或把D_n、D_k换成具体的十进数或其他代表数的名字，机器才能接受。例如$P_3=(25,32)$表示P_3的横坐标是25毫米，纵坐标是32毫米，如图2-1所示。

总的说来：式(2-1)表示P_m的横坐标是D_n，纵坐标是D_k，如图2-2所示。

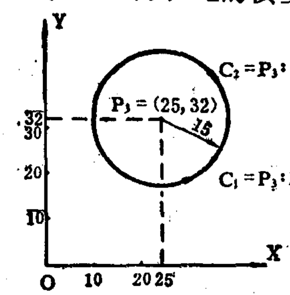


图2-1

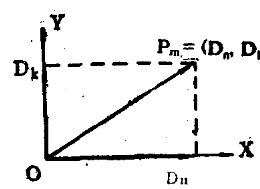


图2-2

*长度单位一律用毫米；角度单位一律用度（分、秒都化为度的十进小数，如45°45′应写为45.75，30°10′应写为30.16667）。

（3）圆的基本限定式：$C_m = P_n : R_k$ (2-2)

这表示C_m是以P_n点为圆心，R_k为半径的圆。例如（图2-1）中

$$\left.\begin{array}{l} P_3 = (25, 32) \\ C_1 = P_3 : 15 \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}3)$$

表示C_1是以P_3(25，32)为圆心，15mm为半径的圆。我们把圆和直线都看成运动轨迹，都有走向。同一个圆心，同一个半径值，走向不同，就作为不同的圆处理。我们用半径的正负来区别圆的两个走向——逆时针走向的圆称为逆圆，其半径定为正；顺时针走向的圆称为顺圆，其半径定为负。式(2-3)所限定的C_1，半径15是正值，意味着C_1是逆圆。和C_1同一圆心，同一半径值15，但走向相反的顺圆C_2（图2-1），应写为：

$$C_2 = P_3 : -15$$

（4）运算的连写

SKG允许作加、减、乘、除，例如

$D_3 = 25 + 32$

$A_1 = D_3/15$

如果D_3以后不再用到，可以连写为

$A_1 = (25 + 32)/15$

加、减、乘、除（以及求开方、三角函数、……）都是数与数之间的算术运算。SKG还允许作几何运算。例如在$P_3 = (25, 32)$中的逗号“，”也是一种几何运算，它把25、32两数结合起来，形成新的几何元素——点P_3，以(25，32)作为其X，Y坐标的点。在$C_1 = P_3 : 15$中的冒号“：”也是一种几何运算，它把点P_3和数15结合起来，形成新的几何元素圆C_1，它是以点P_3为圆心、半径为15的圆。

SKG把几何运算看成算术运算的扩充，其运算对象和结果不再限于数，而是更广泛的几何元素——点、圆、直线。几何运算也可和算术运算一样连写，例如可把式(2-3)的两式合并成为一式：

$C_1 = (25, 32) : 15$

这种嵌套连写可以进行多次，便于连贯地表示复杂的几何关系。

三、运动意义的左右概念

（1）平行线：$S_m = S_n : D_k$ (3-1)

这表示S_m是与S_n相距为D_k的平行线。注意D_k可以是负数，其绝对值$|D_k|$才是一般所用的距离。SKG把直线看成动点的轨迹，约定：

$$\left.\begin{array}{l} D_k > 0\text{，}S_m\text{在}S_n\text{上动点的右边；} \\ D_k < 0\text{，}S_m\text{在}S_n\text{上动点的左边。} \end{array}\right\} \qquad (3\text{-}2)$$

在图3-1中S已给定，可写

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= S:\ 10 \quad (D = 10) \\ S_2 &= S:\ -10 \quad (D = -10) \end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

S_1，S_2与S之间的距离都是$|D| = 10$。从S上的动点P来看：S_1在P的右边，S_2在P的左边。

这里的左右概念，是相对的左右概念；而一般所用的左右概念，则是和坐标系有关的绝对的左右概念。在图 3-2 中，把S，S_1，S_2一起绕原点转90°，从①转到②，再转90°到③、④，从相对的左右概念来说，S_1总在S上动点的右边，S_2总在S上动点的左边，都可统一用式（3-3）表达。

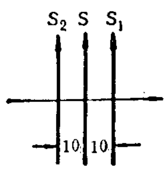


图3-1

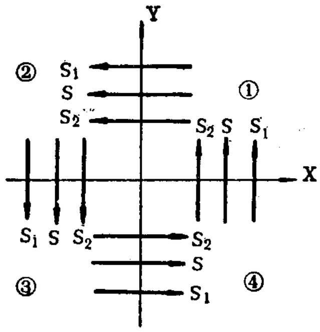


图3-2

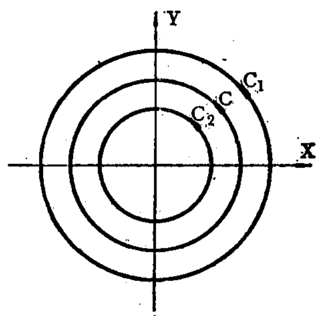


图3-3

（2）同心圆：$C_m = C_n : D_k$ （3-4）

这表示C_m是C_n的同心圆，其半径

$$R_m = R_n + D_k \tag{3-5}$$

这里的R_m，R_n，D_k都可正可负。当R_m和R_n同号时，C_m与C_n同一走向。图 3-3 中设C的半径为30，则：

$C_1 = C:\ 10$，其半径为$R_1 = R + 10 = 30 + 10 = 40$

$C_2 = C:\ -10$，其半径为$R_2 = R - 10 = 30 - 10 = 20$

三圆半径都为正，都是逆圆。从C上的动点P来看，C_1在其右边，C_2在其左边。如果把三圆都反向，则C，C_1，C_2的半径各为-30，-40，-20，应写：

$C_1 = C:\ -10$ （$-30 - 10 = -40$）

$C_2 = C:\ 10$ （$-30 + 10 = -20$）

从C上的动点P来看，C_1在其左边，C_2在其右边。对比图 3-2 和图3-3，可看出式(3-1)是式(3-4)当C_n的半径趋于无限大时的特例。而当R_m和R_n同号时，约定(3-2)可推广为：

$$\left.\begin{aligned} &D_k > 0\text{，}C_m\text{在}C_n\text{上动点的右边；} \\ &D_k < 0\text{，}C_m\text{在}C_n\text{上动点的左边。} \end{aligned}\right\} \tag{3-6}$$

总结(2-2)，(3-4)，(3-1)：

$C_m = P_n : R_k$

$C_m = C_n : D_k$

$S_m = S_n : D_k$

上三式都采用同一个运算符“：”——这个新规定的几何运算符“：”在这里具有“相距”的意义。“：”后的数（D_k或R_k）本身可正可负，正好区别出两种不同情况（“右、左”或圆走向的“逆、顺”）。

四、极坐标和转角

（1）点的极坐标限定式：$P_m = R_n \# A_k$ （4-1）

表示P_m的极坐标是R_n、A_k（图4-1），其直角坐标为：

$$\left.\begin{aligned} x_m &= R_n * \cos A_k \\ y_m &= R_n * \sin A_k \end{aligned}\right\} \tag{4-2}$$

R_n可正可负，例如在图4-2中，可写：

$P_1 = \quad 30 \# 30$

$P_2 = -30 \# 30$

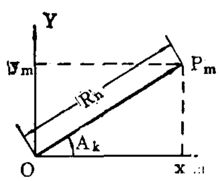


图4-1

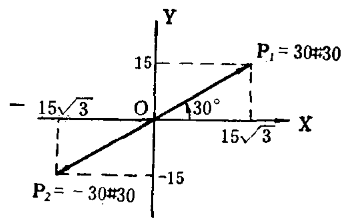


图4-2

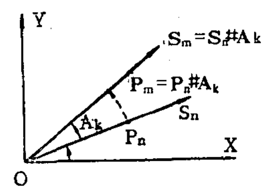


图4-3

这相当于写：

$P_1 = (\quad 25.98076,\ 15)$

$P_2 = (-25.98076, -15)$

（2）点转角：$P_m = P_n \# A_k$ （4-3）

表示P_n绕原点转A_k角成为P_m（图4-3）。

如果P_n在X上：$P_n = (R_n,\ 0)$

则　$P_m = (R_n,\ 0) \# A_k$　和　$P_m = R_n \# A_k$

是等价的。

如果P_n在Y上：$P_n = (0,\ R_n)$

则　$P_m = (0,\ R_n) \# A_k$　和　$P_m = R_n \# (A_k + 90)$ （4-3′）

是等价的。

（3）圆转角：$C_m = C_n \# A_k$ （4-4）

表示C_n绕原点转A_k角成为C_m。C_m具有和C_n相同的半径（图4-4）。

（4）线转角：$S_m = S_n \# A_k$ （4-5）

表示S_n绕原点转A_k角成为S_m。转心（目前为原点O）到直线的垂距γ保持不变：

$$\gamma_m = \gamma_n \tag{4-6}$$

图4-3表示$\gamma_n = 0$的情形：S_n原来通过原点，绕原点转动后仍通过原点。图4-5则表示$\gamma_m = \gamma_n \neq 0$的情形。

任何直线S都可从X轴（或Y轴）平移和旋转得到。设原点到S的垂距为D，X轴到S的夹角为A（图4-6），则可先将X平移D（D＞0时向右移，D＜0时向左移）得：

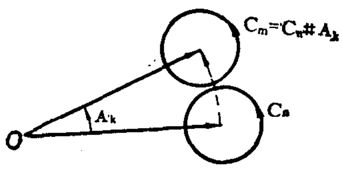


图4-4

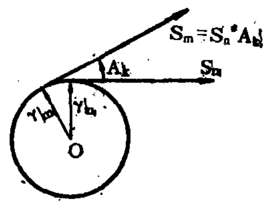


图4-5

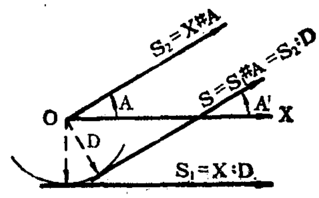


图4-6

$S_1=X:D$

然后将S_1绕原点转A角得S：

$$S=S_1\#A=(X:D)\#A \tag{4-7}$$

也可先将X绕原点转A角得

$$S_2=X\#A$$

然后平移D得

$$S=S_2:D=(X\#A):D \tag{4-8}$$

式(4-7)、(4-8)中两个嵌套式（X：D）#A和（X#A）：D是等价的。

五、单目“－”和表达式

（1）单目“－”：在算术中，同一个“－”，既可出现在

$$a=4-3$$

中，表示a等于4减3，也可出现在

$$a=-3+4$$

中，表示a等于负3加4。前一个“－”，表示两个运算量4、3之间的减法运算关系，称为双目“－”。后一个“－”，只对其后一个运算量3起作用，使之反号，特称为单目“－”。SKG把单目“－”的意义扩充，使之不但对“数”起作用，而且对点、圆、直线也起作用，允许以下四种限定式：

$$A_m=-A_n \tag{5-1}$$

$$P_m=-P_n \tag{5-2}$$

$$C_m=-C_n \tag{5-3}$$

$$S_m=-S_r \tag{5-4}$$

式(5-2)表示把P_n的两坐标x_n、y_n一起反号作为P_m的两坐标：

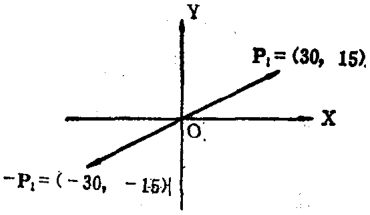


图5-1

$$\left.\begin{aligned}x_m&=-x_n\\ y_m&=-y_n\end{aligned}\right\} \tag{5-5}$$

例如在图5-1中，设

$$P_1=(30,\ 15)$$

则 $P_2=-P_1=(-30,-15)$

这和 $P_2=P_1\#180$

是等价的。

式(5-3)表示C_m和C_n同一圆心，半径数值相同、符号相反——只将半径反号：

$$R_m = -R_n \tag{5-6}$$

例如图2-1中：$C_1 = P_3 : 15$，$C_2 = P_3 : -15$

两圆就满足　$C_1 = -C_2$

普遍地可写：$-(P_n : R_k) = P_n : (-R_k)$　(5-7)

式(5-4)表示S_m和S_n在同一（无向）直线上，但走向相反。特别是X轴反向成为负X轴，可表为$-X$，同样负Y轴可表为$-Y$。

正如算术中"负负得正"：$-(-A) = A$

也有：$-(-P) = P$，$-(-C) = C$，$-(-S) = S$　(5-8)

（2）标准函数：在单板微型机上实现的SKG，可以计算五种标准函数：$\sqrt{A}$，$\sin A$，$\cos A$，$\mathrm{tg}A$，$\mathrm{arctg}A$。在正式的源程序中须分别写成：SQR␣A，SIN␣A，COS␣A，TG␣A，ATG␣A，其中空格号"␣"不能省去，它在这里作为运算符，把函数名SQR，……和数A结合起来，形成以A为变量的函数$\sqrt{A}$，……。

（3）表达式：SKG在运算符"+"（加）"-"（减）"*"（乘）"/"（除）之外，又加了"␣""：""#""，"四个新运算符。它们和括弧"（""）"，数、点、圆、直线共同构成了表达式。

作为"先乘除后加减"法则的扩充，SKG对每个运算符（包括"="号）赋予一定的优先数（八进制）

55 单目	54	52	51	50	47	46	45	44	42
-	␣	/	*	-	+	:	#	=	,

其法则为：

①最里一层括弧里的先做，由里向外；

②同一层括弧内优先数最大的先做；

③同一运算符接连出现时，由左向右做。

利用上述法则，可省去一部分括号，例如：

A = (3 * 4) + 5
(44)　(51)　(47)

可写为：

A = 3 * 4 + 5

式(4-7)　S = (X : D) # A　可省写为　S = X : D # A

式(4-3′)　$P_m = R_n \# (A_k + 90)$　可省写为　$P_m = R_n \# A_k + 90$

但式(4-8)　S = (X # A) : D　的括弧不能省去；
(44)　(45)　(46)

式(2-3)　$P_3=(25, 32)$　的括弧也不能省去，不然要先处理“=”，而$P_3=25$ 这种
(44)(42)
运算关系是不允许的。

对于“-”，SKG会根据源程序的前后文而辨别出是双目“-”还是单目“-”。由于单目“-”被赋予的优先数最大，象SIN␣-A等效于SIN␣(-A)，A/-D等效于A/(-D)，这和一般习惯不同。SKG所允许的运算关系列举在附录二中备查，下面将逐一介绍。

六、直线的其他限定式

前面提到“:”后跟数，具有“相距”的意义，“#”后跟数，具有“转角”的意义。为了减少新添的符号数，在不引起误会的前提下，SKG还使“:”“#”兼含其他意义。

（1）　$S_m=S_n:P_k$　　(6-1)

表示S_m是平行于S_n而且经过P_k的直线（图6-1）。在图纸中经常给出直线S与某已知线（例如说X轴）的夹角和S上的已知点P（图6-2）。为求得S，可先将X绕原点转A后(得X#A)，再平移到P，得

$$S=(X\#A):P \qquad (6-2)$$

由于“#”的优先数(45)比“:”的(46)小，上式的括弧是不可省去的。

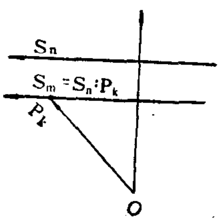


图6-1

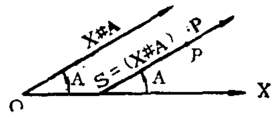


图6-2

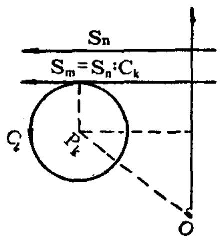


图6-3

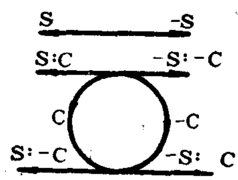


图6-4

（2）　$S_m=S_n:C_k$　　(6-3)

表示S_m是平行于S_n顺着C_k的切向甩出的直线（图6-3）。也可利用单目“-”，把图6-4中的S，C反向，得到除S:C以外的-S:-C，-S:C，S:-C，其间满足：

$$\left.\begin{array}{l}-(S:C)=-S:-C\\-(S:-C)=-S:C\end{array}\right\} \qquad (6-4)$$

（3）　$S_m=P_n:P_k$　　(6-5)

表示S_m是经过P_n，P_k而且走向为$\overrightarrow{P_nP_k}$的直线。在图6-5中给定$P_1=(3, 4)$，$P_2=(7, 10)$，则

$$S_1=P_1:P_2=(3, 4):(7, 10)$$

就是经过P_1，P_2而且走向为$\overrightarrow{P_1P_2}$的直线，其反向线为

$$S_2=P_2:P_1=(7, 10):(3, 4)$$

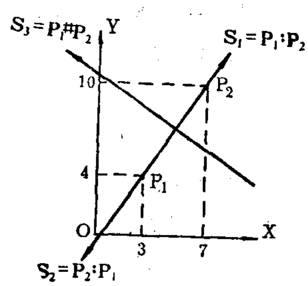


图6-5

（4）　$S_m=P_n\#P_k$　　(6-6)

表示S_m是P_n，P_k两点的垂直平分线，其走向使得P_n在其左，P_k在其右。例如图6-5中的

$$S_3 = P_1 \# P_2 = (3,\ 4) \# (7,\ 10)$$

（5）公切线：图6-6中两圆之间有四条公切线：S_1，S_2，S_3，S_4。SKG对圆规定了走向，每个圆都可看成以此走向转动的皮带轮。先设C_1，C_2都是逆圆，那末从C_1搭到C_2的皮带就只能沿着S_1搭。规定

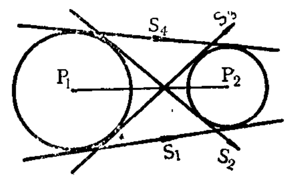


图6-6

$$S_1 = C_1 : C_2$$

表示S_1是沿C_1甩到C_2的切线（参看图6-7）。令

$$C_3 = -C_1,\quad C_4 = -C_2$$

表示和C_1，C_2反向的顺圆，从图6-7其他三个分图可看出：

$$S_2 = C_3 : C_2 = -C_1 : \ C_2$$

$$S_3 = C_1 : C_4 = \ C_1 : -C_2$$

$$S_4 = C_3 : C_4 = -C_1 : -C_2$$

把C_1的半径缩到零，成为点P_1，P_1到C_2的切线可写为（图6-8）：

$$S_5 = P_1 : C_2$$

同样可写C_1到P_2的切线（图6-9）：

$$S_6 = C_1 : P_2$$

上三种情形可普遍写为：

$$S_m = C_n : C_k \qquad (6\text{-}7)$$

$$S_m = P_n : C_k \qquad (6\text{-}8)$$

$$S_m = C_n : P_k \qquad (6\text{-}9)$$

式(6-5)

$$S_m = P_n : P_k \qquad (6\text{-}5)$$

则可看成C_n、C_k的半径都缩到零时的特殊情形

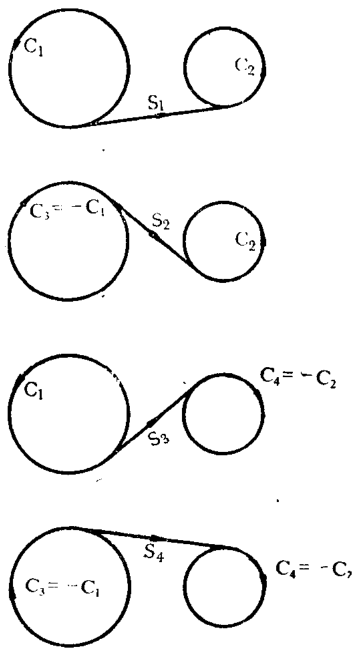


图6-7

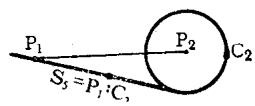


图6-8

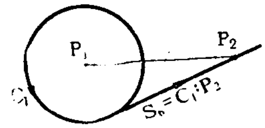


图6-9

七、交　点

（1）　$P_m = S_n * S_k$ 　　(7-1)

表示P_m是两直线S_n，S_k的交点。“*”原是两数之间的乘法运算符。现把它写在两直线之间，表示求交点运算，这并不引起混淆。下面又用“*”表示圆和直线，圆和圆之间的求交点运算。

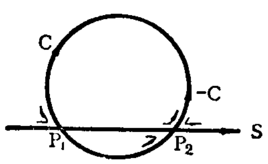


图7-1

（2）直线和圆的交点：设S和C交于P_1，P_2两点，如图7-1所示。可把S、C看成两条单行道。从S到C有两种走法：在P_1左拐到C；过P_1后继续沿S进行到P_2才右拐到C。

SKG规定：

$$P_1 = S * C \tag{7-2}$$

表示P_1是从S到C的左拐点。至于P_2则是从C到S的左拐点，可写：

$$P_2 = C * S \tag{7-3}$$

从图7-1可看到，在P_2这个“十字路口”上，从S到C是右拐，如果左拐弯，会走到和C相反的－C上——可见P_2又是从S到－C的左拐点，可写：

$$P_2 = S * (-C) = S * -C$$

“＊”和单目“－”组合起来形成“右拐”的意义。总之成立下列几何恒等式：

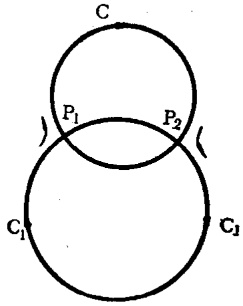


图7-2

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= S * C = -S * -C = -C * S = C * -S \\ P_2 &= C * S = -C * -S = -S * C = S * -C \end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

（3）圆和圆的交点：把图7-1中的直线S弯成圆C_1（图7-2），就得圆和圆相交的情形，可写：

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= C_1 * C = -C_1 * -C = -C * C_1 = C * -C_1 \\ P_2 &= C * C_1 = -C * -C_1 = -C_1 * C = C_1 * -C \end{aligned}\right\} \tag{7-5}$$

总之：$P_m = C_n * C_k$ （7-6）

表示P_m是从C_n到C_k的左拐点。

八、垂足与镜象反映

（1） $P_m = P_n \# S_k$ （8-1）

表示P_m是P_n对S_k的垂足。图8-1中P对S的垂足就是P_1，它是P对S的垂线与S的交点：

$$P_1 = P \# S$$

（2） $P_m = P_n / S_k$ （8-2）

表示P_m是P_n对S_k的镜象反映点。图8-1中的P对S的镜象反映点就是P_2：

$$P_2 = P/S$$

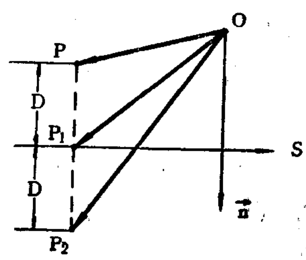


图8-1

显然P对S的垂距

$$D = \overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} \tag{8-3}$$

（3）准镜象反映：$C_m = C_n / S_k$ （8-4）

$$S_m = S_n / S_k \tag{8-5}$$

SKG直接用直线、圆描写切削路线，遇到对某直线对称的图形，把圆、直线对该直线作镜象反映是方便的。如图8-2，图形对于S对称：C_2，S_{11}，S_{12}，S_{13}各是C，S_1，S_2，S_3对于镜面S的镜象反映。可是若又考虑到圆、直线的走向，按照一般镜象概念是：顺圆的镜象应是逆圆（因为作顺时针运动的时针，其在镜子中的象一定是反向作逆时针运动的）。可是在切割时，原来沿C作顺圆切割，走到C_2时一般也还是作顺圆切割的。为了书写方便，就规定

$$C_2 = C/S \qquad (8\text{-}6)$$

和C同一走向。如果C的圆心是P，半径是R，即

$$C = P : R \qquad (8\text{-}7)$$

则C_2的圆心P_2就是P对S的镜象反映点：

$$P_2 = P/S$$

代入式(8-7)连写可得

$$C_2 = P/S : R$$

这和式(8-6)是等价的。

对于直线S_1，S_2，S_3对S的映象，同样可写：

$$S_{11} = S_1/S$$

$$S_{12} = S_2/S$$

$$S_{13} = S_3/S$$

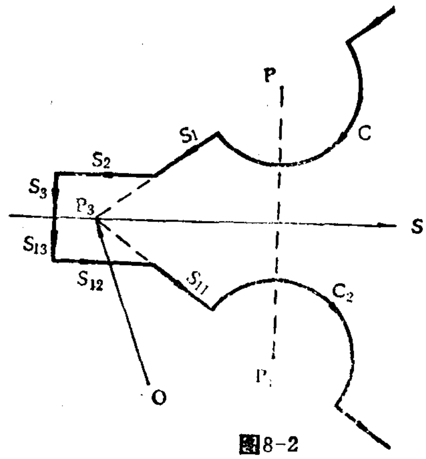


图8-2

其走向如图 8-2 所示：S_1走近S，S_{11}就离开S；S_2平行于S，则 S_{12}也平行于S，但与S_2反向；S_3垂直于S，S_{13}就等同于S_3。这样规定的走向与一般镜象反映中的走向相反，特称为"准镜象反映"。

九、特 殊 圆 (一)

特殊圆是指圆心、半径没有全给定，须由其他几何条件确定的圆。

(1) $C_m = P_n/P_k$ (9-1)

表示C_m是以P_n为圆心而且过P_k的逆圆。如果需顺圆，则须写：

$$C_l = -C_m = -(P_n/P_k) \qquad (9\text{-}1')$$

(2)三点共圆：已知三点P_1，P_2，P_3，求过三点的圆。

〔解〕 在图9-1中作P_1，P_2的垂直平分线，根据式(6-6)，可写

$$S_1 = P_1 \# P_2$$

又作P_2，P_3的垂直平分线：

$$S_2 = P_2 \# P_3$$

S_2和S_1的交点：

$$P = S_1 * S_2$$

和P_1，P_2，P_3是等距的，它就是三点共圆的圆心，利用式(9-1)，可得共圆：

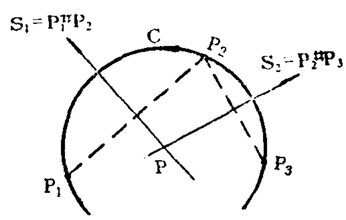


图9-1

$$C = P/P_2 = (S_1 * S_2)/P_2$$

$$= [(P_1 \# P_2) * (P_2 \# P_3)]/P_2 \qquad (9\text{-}2)$$

(3)已知P_1，P_2，求从P_1到P_2半径为A的过渡圆。

〔解〕 先设A＞0，作两圆(图9-2)：

$$C_1 = P_1 : A, \quad C_2 = P_2 : A$$

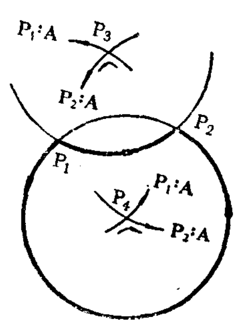


图9-2

自C_1到C_2的左拐点　$P_3 = C_1 * \quad C_2 = (P_1 : A) * \quad (P_2 : A)$
自C_1到C_2的右拐点　$P_4 = C_1 * -C_2 = (P_1 : A) * -(P_2 : A)$　　(9-3)

以P_3为圆心的逆圆 $P_3 : A$ 通过P_1、P_2，从P_1沿此圆走到P_2经过的路程较短；而从P_1沿逆圆$P_4 : A$走到P_2，则路程较长——兜了个大圈子。

如果$A<0$，C_1，C_2同时反向，则式(9-3)仍然成立。$P_3 : A$，$P_4 : A$成为顺圆。从P_1到P_2，若沿顺圆$P_3 : A$走，则须兜大圈子，而沿顺圆$P_4 : A$走，却可走近路。总之，如果过渡圆专指走较短圆弧（即走近路）的情况，则它可表为：

$$C = (P_1 : A) * \pm (P_2 : A) : A \begin{cases} +: & A>0 \\ -: & A<0 \end{cases} \qquad (9\text{-}4)$$

（4）已知C_1，C_2，求从C_1到C_2的半径为A的过渡圆。

〔解〕 SKG中的圆都是有走向的，所谓过渡圆，不但要与原圆相切，而且要求在切点上两圆走向相同。先设C_1，C_2和过渡圆C都是逆圆，三圆中心各在P_1，P_2，P。和（3）相似，只考虑C在C_1,C_2间走较短圆弧的情形，如图9-3所示，其中

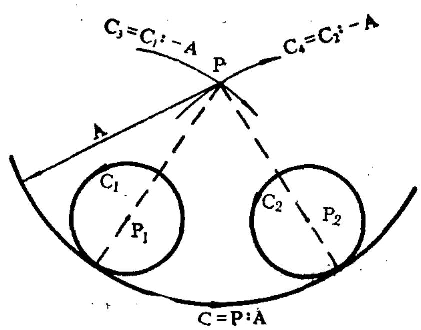


图9-3

$$\overline{P_1P} = A - R_1,\quad \overline{P_2P} = A - R_2$$

根据对同心圆的限定式(3-4)，以P_1为圆心经过P的顺圆可表为：

$$C_3 = C_1 : -A$$

而以P_2为圆心，经过P的顺圆则表为

$$C_4 = C_2 : -A$$

从C_3到C_4的左拐点就是P：

$$P = C_3 * C_4 = (C_1 : -A) * (C_2 : -A)$$

$$C = P : A \quad = (C_1 : -A) * (C_2 : -A) : A$$

普遍说来，C_1，C_2，C都可以是顺圆，上式的普遍形式是：

$$C = (C_1 : -A) * \pm (C_2 : -A) : A \qquad \begin{cases} +: & A>0 \\ -: & A<0 \end{cases} \qquad (9\text{-}5)$$

式(9-4)是　C_1、$C_2 \longrightarrow P_1$、P_2　时的特例，因为根据式(7-5)：

$$(P_1 : A) * (P_2 : A) = -(P_1 : A) * -(P_2 : A) = (P_1 : -A) * (P_2 : -A)$$

式(9-4)等价于：

$$C = (P_1 : -A) * \pm (P_2 : -A) : A \qquad (9\text{-}6)$$

把图9-3中的圆C_1，C_2扳直成为直线S_1，S_2，或者缩小成为点P_1，P_2，式(9-6)还可普遍化为：

$$C = \left(\begin{matrix} S_1 \\ C_1 \\ P_1 \end{matrix} : -A \right) * \pm \left(\begin{matrix} S_2 \\ C_2 \\ P_2 \end{matrix} : -A \right) : A \begin{cases} +: & A>0 \\ -: & A<0 \end{cases} \qquad (9\text{-}7)$$

图 9-4 表示直线S和圆C之间半径为 5 的 8 个逆公切圆C_1，C_2，……C_8，