三角级数论

（上　册）

陈建功 著

上海科学技术出版社

三角级数论

(上 册)

陈 建 功 著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是作者三十余年来为研究生讲授三角級数論所用讲义几經修改整理而成．上册除准备知識外，共四章．第一章富理埃級数的收斂，闡述富理埃級数及其共軛級数的收斂問題，包括各种收斂定理及判定方法．第二章富理埃級数的和，闡述各种求和方法及可求和条件．第三章富理埃級数的强性求和以及概收斂，闡述了强性可和及概收斂的有关理論，討論了零系数特别多的級数．第四章富理埃級数的絕对收斂与絕对求和，闡述了几种絕对求和法，它的充要条件，絕对收斂等．书中包含了作者的一系列工作，同时系統地闡述了近代的重要結果．

本书可供高等学校数学系高年級学生、研究生、科研工作者閱讀．

三角級数論（上册）

陈　建　功　著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷五厂印刷　　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/27　印張 13 17/27　排版字数 313,000
1964年12月第1版　1964年12月第1次印刷
印数 1—6,000
（其中精装本500册）

統一书号 13119·586　定价（科七）2.30元

序

著者于1929年，遵指导教师藤原松三郎先生的嘱咐，用日本文写成«三角級数論»，于1930年在东京岩波书店出版．从1939年起，在浙江大学(当时校址在貴州湄潭)指导研究生，就以上述三角級数論为基础，作成三角級数的讲义，历年都有修改．到了1960年，将讲义重新整理，添入挽近材料，以授杭州大学的研究生，仍称这部讲义为三角級数論．由于內容較之原来的日文书，丰富許多，难免有許多未妥之处，希望高明有以教我，不胜感盼．

陈建功

一九六三年十一月八日

目　录

三角級数·富理埃級数

1. 定　义

假如 $a_0, a_1, \cdots; b_1, b_2, \cdots$ 等数与变数 x 没有关系，那末称

(1) $$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

是一个**三角級数**. (1) 的**系数** a_n, b_n 都是实数，第一项的 $\frac{1}{2}$ 是为方便(詳明于后)起見而引入的. 写着 $z=e^{ix}$, 那末(1)是一級数

(2) $$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)z^n$$

的实部；称(2)的虛部

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)$$

为 (1) 的**共軛級数**. 例如：当 $0\leqslant r<1$, $z=re^{ix}$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，一級数 $\frac{1}{2}+z+z^2+\cdots=\frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z}$ 的实部

$$P_r(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z}\right\}$$

和虚部

$$Q_r(x)=\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx$$
$$=\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z}\right\}$$

都是收斂的三角級数，$P_r(x)$ 和 $Q_r(x)$ 是互相共軛的．由于

$$\frac{1+z}{1-z}\,\frac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}}=\frac{1-r^2+2ir\sin x}{1-2r\cos x+r^2},$$

所以

$$P_r(x)=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos x+r^2)},$$

$$Q_r(x)=\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}.$$

写着 $c_k=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)$，$\bar{c}_k=c_{-k}$，$b_0=0$，那末 (1) 的最初 $n+1$ 項的和

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{(a_k-ib_k)e^{ikx}+(a_k+ib_k)e^{-ikx}\}$$

等于 $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$．称 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ 为(1)的复数形式，或是罗朗(Laurent)級数的形式．当 $a\neq 0$ 时，記

$$a=|a|\operatorname{sgn} a;$$

当 $a=0$ 时，規定 $\operatorname{sgn} a=0$．那末，(1)的共軛級数(3)可以写成罗朗級数的形式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -ic_k \operatorname{sgn} k\cdot e^{ikx}. \tag{4}$$

研討級数的性质，往往用到阿培耳(Abel)变换．設

$$U_k=u_0+u_1+\cdots+u_k,\quad U_{-1}=0,$$

則 $\sum_{k=m}^{n} u_k v_k=\sum_{k=m}^{n}(U_k-U_{k-1})v_k$．从而得到**阿培耳变換**：

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k=\sum_{k=m}^{n-1} U_k(v_k-v_{k+1})-U_{m-1}v_m+U_n v_n. \tag{5}$$

当級数 $\sum|v_k-v_{k-1}|$ 收斂时，称 $\{v_k\}$ 是一个**有界变差的数列**．利用(5)，

我們就能証明下述

定理 假設 $v_0, v_1, \cdots$ 是一个有界变差的数列；在区間 $[a, b]$ 上，級数 $\sum u_n(x)$ 是均匀有界，那末級数 $\sum v_n^* u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上均匀收斂，这里 $v_n^* = v_n - \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

事实上，$v_n = v_0 + (v_1 - v_0) + \cdots + (v_n - v_{n-1})$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是有极限的. 于(5)，設 $m=0$, $U_k = U_k(x)$, $U_{-1}(x)=0$, 則当 $|U_k| \leqslant K$ 时，我們見到

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k^* = \sum_{k=0}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n^*.$$

右方的 $|U_k(v_k - v_{k+1})| \leqslant K |v_k - v_{k+1}|$，从而 $\sum U_k(v_k - v_{k+1})$ 絕对的匀斂*). 注意到 $U_n v_n^*$ 匀斂于 0，就知 $\sum u_k v_k^*$ 匀斂.

例 当 $a_n \to 0$ 时，在区間 $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ 上两个級数 $\sum a_n \cos nx$ 和 $\sum a_n \sin nx$ 都匀斂.

事实上，$1+\cos x+\cdots+\cos nx$ 和 $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$ 分别是 $(1-z^{n+1})/(1-z)$ $(z=e^{ix})$ 的实部和虛部，它們在 $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ 中是有界的.

2. 直交函数列

当函数 $\varphi(x)$ 在区間 $a \leqslant x \leqslant b$ 中是可測，并且 $[\varphi(x)]^2$ 在 $[a, b]$ 上的积分存在时，我們說 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 中是一个平方可积函数，記着 $f(x) \in L_2(a, b)$，或是 $f \in L^2(a, b)$.

設 $\varphi_n(x) \in L_2(a, b)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$. 假如

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \lambda_n > 0 & (m = n), \end{cases}$$

那末称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的**一列直交函数**. 当 λ_n 都等于1时，称 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上是**就范的**.

設 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots$ 在 $[a, b]$ 上是一列就范的直交函数，当积分

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx \quad (n=0, 1, \cdots)$$

*) 我們叫絕对收斂并且均匀收斂的級数为絕对的匀斂。

都存在时，称 $c_0, c_1, \cdots$ 为 $f(x)$ 关于 $\{\varphi_n(x)\}$ 的**富理埃(Fourier)系数**，称級数 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 为 $f(x)$ 的**富理埃級数**，我們記着

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x).$$

函数列 $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 在区間 $(-\pi, \pi)$ 上成直交系，其中任一函数平方在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都等于 π. 当 $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ 时，得到 $f(x)$ 的富理埃系数：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$(n=1, 2, \cdots).$$

我們称三角級数(1)为 $f(x)$ 的富理埃級数，写着

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \tag{6}$$

本篇专論三角級数，有时記(6)的右方为 $\mathfrak{S}[f]$. 又記(6)的共軛級数为 $\bar{\mathfrak{S}}[f]$.

下述定理是富理埃級数的初步性质：

定理 (i) 假如 a 和 b 都是常数，那末

$$\mathfrak{S}[af+bg] = a\mathfrak{S}[f] + b\mathfrak{S}[g].$$

(ii) 假如三角級数(1)匀斂于 $f(x)$，那末，(1)就是 $\mathfrak{S}[f]$.

(iii) 偶函数的富理埃級数是余弦級数. 奇函数的富理埃級数是正弦級数.

【証明】 (i) 是明显的. (ii) (1)匀斂于 $f(x)$ 的話，$f(x)$ 是連續的，从而当 $n>0$ 时，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx\cos kx\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx\sin kx\,dx$$

$$=\frac{a_n}{b_n};$$

此式当 $n=0$ 时也成立，但 $b_0=0$. 这就証明了(ii).

(iii) 当 $f(-x)=f(x)$ 时，$f(x)\sin kx$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分是 0，所以 $b_k=0\ (k=1, 2, \cdots)$. 若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)\cos kx$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上的积分等于 0，从而 $a_k=0 (k=0, 1, \cdots)$.

对于取复数值的函数列 $\varphi_n(x)\ (a\leqslant x\leqslant b,\ n=0, 1, 2, \cdots)$，假如

$$\int_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}\,dx=\delta_{nm},$$

这里 $\delta_{nn}=1$, $\delta_{nm}=0 (n\neq m)$，那末說：$\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上成一个就范的直交函数列. 例如在 $[-\pi, \pi]$ 上，函数列 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\ (n=0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots)$ 是直交而就范的. 当实函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可以 L 积分时，它的 $\mathfrak{S}[f]$ 可以写成复数形式

$$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}, \tag{7}$$

这里

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx.$$

写着 $2c_n=a_n-ib_n$，那末(7)就可以化成(6)的形式。

适合恒等式 $f(x+2\pi)\equiv f(x)\ (-\infty<x<\infty)$ 的 $f(x)$，称它做以 2π 为周期的周期函数. 当 $f(x)$ 在任何有限区間上可以积分时，如果 $f(x+2\pi)\equiv f(x)$ 的話，积分

$$\int_a^{2\pi+a}f(x)\,dx$$

的值无关于 a.

关联着(6)，我們有系数公式——欧拉(Euler)公式——

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\cos}{\sin}nx\,dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{8}$$

当这些积分都是在黎曼的意义下存在时，称(6)是一个黎曼-富理埃級数；假如 $f(x)\in L(-\pi, \pi)$，那末(6)是一个勒貝格-富理埃級数，簡称富理埃級数. 一般地說：当(8)都依某种意义存在时，称(6)为某种意义

的富理埃級数．假如 $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\mathfrak{S}[g]$ 都是富理埃級数，那末当 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$ 时，$\mathfrak{S}[f]$ 和 $\mathfrak{S}[g]$ 是相同的．在下面这一节里，我們将証这个結果，成立着逆定理．

3．三角函数系的完备性

設 $\varphi_n(x)\,(n=0,1,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的一列直交函数．假如等式

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=0 \quad (n=0,1,\cdots)$$

常包含 $f(x)\doteq 0$（几乎处处等于 0），那末說 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区間 $[a,b]$ 上成**一完备系統**．

定理 三角函数 $1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上成一完备系統．

【証明】 首先对于連續函数 $f(x)$，从 $f(x+2\pi)=f(x)$ 和

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos}{\sin} nx\,dx=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

导出 $f(x)=0$．假如 $f(x)\neq 0$，知道必有如下的正数 ε 和 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[-\pi,\pi]$：

$$f(x)\geqslant\varepsilon \quad (x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta).$$

我們不妨假設 $x_0=0$．函数 $T(x)=(1+\cos x-\cos\delta)^n$ 是一三角多項式，从而

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)dx=0.$$

但是这个积分大于

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)T(x)dx-\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)|f(x)|dx$$

$$>\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} T(x)dx-\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x)|dx-\int_{\delta}^{\pi}|f(x)|dx.$$

第一个积分大于

$$\int_{-\frac{1}{2}\delta}^{\frac{1}{2}\delta}\left(1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta\right)^n dx=\delta\left(1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta\right)^n,$$

当 $n\to\infty$ 时，此式趋向于 ∞；这是矛盾．

其次，假如有可积函数 $f(x)$ 适合

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos}{\sin} nx\,dx=0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

那末連續函数

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{x} f(t)dt\,dx$$

的一切富理埃系数都等于0. 事实上，

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\frac{\cos}{\sin} kx\,dx=\mp\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin}{\cos} kx\,dx$$

$$=0 \quad (k>0).$$

从而 $F(x)\equiv0$, $f(x)$ 几乎处处等于0. 証明完毕.

系 假如 $\mathfrak{S}[f]=\mathfrak{S}[g]$，那末 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$. 假如 $\mathfrak{S}[f]$ 匀斂于 $g(x)$，那末 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$.

4. 平方可积的函数

設 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …在 $[a, b]$ 上是一列就范的直交函数,

$$f(x)\in L_2[a, b],$$

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x).$$

我們要求常数 γ_0, γ_1, …, γ_n, 使积分

$$I_n(f)=\int_a^b\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\gamma_k\varphi_k(x)\right)^2 dx$$

取最小值. 由 $\{\varphi_k\}$ 的直交性, $I_n(f)$ 等于

$$\int_a^b [f(x)]^2dx-2\sum_{k=0}^{n} c_k\gamma_k+\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2$$

$$=\int_a^b f^2dx-\sum_{k=0}^{n} c_k^2+\sum_{k=0}^{n}(c_k-\gamma_k)^2.$$

由是可知：当 $\gamma_0=c_0$, …, $\gamma_n=c_n$ 时, $I_n[f]$ 取最小值, 并且

$$c_0^2+c_1^2+\cdots+c_n^2\leqslant\int_a^b [f(x)]^2dx.$$

这个結果，是透普娄(A. Toepler)于1876年指出的．上面的不等式，对于任一正整数 n 成立，因此得到貝塞耳(Bessel)的不等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{9}$$

特别当(6)中的 f 属于 $L_2(-\pi, \pi)$ 时，从(9)得到

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx. \tag{10}$$

此式指出 $\sum a_n^2$ 和 $\sum b_n^2$ 都是收斂級数，入后我們将証(10)中等号成立，称此等式为**派司伐耳**(Parseval)**等式**．当 $\{\varphi_n\}$ 在 $[a, b]$ 上具有完备性时，(9)也成等式．

无論怎样，我們已經証得如下的結果：当 $f \in L_2$ 时，(9)中的 $c_n \to 0$；(10)中的 a_n 和 b_n 都收斂于0．这些結果可以簡写为

$$c_n = o(1), \quad a_n = o(1), \quad b_n = o(1).$$

一般地說：当 $g(x) > 0$ 并且

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

时，我們簡写做 $f(x) = o(g(x)) \quad (x \to x_0)$．当 $x \to x_0$ 时，假如 $f(x)/g(x)$ 的絕对值小于一个常数，那末写着

$$f(x) = O(|g(x)|) \quad (x \to x_0).$$

这里 x_0 可以为 ∞，也可以是一个有限数．这些写法，是藍道(E. Landau)首創的，現在广泛地被采用．記号

$$f(x) \simeq g(x) \quad (x \to x_0)$$

表示 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$．假如，当 $x \to x_0$ 时，有两个正的常数 A 和 B 适合于 $A < \dfrac{f(x)}{g(x)} < B$，那末写着

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0).$$

例如：当 $x \to 0$ 时，$x^2 = o(|x|)$，当 $x \to \infty$ 时，$x = o(x^2)$．当 $x \to 1$ 时，$\log x = O(|1-x|)$，当 $x \to \infty$ 时，

$$e^x \sim e^{x + \sin x}.$$

为了练习这些 o, O, $\sim$, $\simeq$ 等記号，再举几个例子于下．

(i) 設 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在区間 $[a, x]$ $(x<b)$ 上是可积的：

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$

$$G(x)=\int_a^x g(t)\,dt\to\infty$$

$$(x\to b).$$

假如 $g(t)>0$, $f(x)=o(g(x))$ $(x\to b)$，那末 $F(x)=o(G(x))$. 事实上，对于 $\varepsilon>0$, 有如下的 $c=c(\varepsilon)$：当 $c\leqslant x<b$ 时，$|f(x)|<\varepsilon g(x)$. 从而

$$|F(x)|<\int_a^c |f(t)|\,dt+\varepsilon G(x),$$

$$\limsup_{x\to b}\frac{|F(x)|}{G(x)}\leqslant\varepsilon,$$

由是卽得 $F(x)=o(G(x))$，因为 ε 是任意的.

从这个結果，容易导出对于級数的类似定理：設

$$g_n>0,\quad g_1+g_2+\cdots+g_n\to\infty\quad(n\to\infty),$$

則当 $f_n=o(g_n)$ 时，成立着

$$f_1+\cdots+f_n=o(g_1+\cdots+g_n).$$

(ii) 設 $f(x)$ 是一个正値单調函数，

$$F_n=f(0)+f(1)+\cdots+f(n)-\int_0^n f(x)\,dx.$$

那末当 $f(x)$ 是一减小函数时，极限 $\lim F_n$ 存在；当 $f(x)$ 是一增加函数时，成立着 $f(0)\leqslant F_n\leqslant f(n)$.

事实上，当 $f(k-1)\geqslant f(k)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 时，

$$0\leqslant\int_{k-1}^k f(x)\,dx-f(k)\leqslant f(k-1)-f(k).$$

正項級数 $\sum(f(k-1)-f(k))$ 收斂于 $f(0)-\lim f(n)$. 从而当 $n\to\infty$ 时，

$$\sum_{k=1}^n\left\{\int_{k-1}^k f(x)\,dx-f(k)\right\}=f(0)-F_n$$

的极限存在. 假如 $f(x)$ 是一增加函数，那末从

$$f(k-1)\leqslant\int_{k-1}^k f(x)\,dx\leqslant f(k)$$

得着 $\sum_1^n f(k-1) \leqslant \int_0^n f(x)\,dx \leqslant \sum_1^n f(k)$. 因此,

$$f(0) \leqslant F_n \leqslant f(n).$$

例如 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 的話,就知 $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ 当 $n\to\infty$ 时,有极限存在,所謂欧拉的常数;实际上,此常数等于

$$0.5772156649015328606\cdots.$$

当 $\alpha>-1$ 时,成立着

$$1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha \simeq \frac{n^{\alpha+1}}{1+\alpha}.$$

特别当 $-1<\alpha<0$ 时,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^n k^\alpha-\dfrac{n^{\alpha+1}}{1+\alpha}\right)$ 存在.

第 一 章

富理埃級数的收斂

1. 富理埃級数的运算

I. 用 $\mathfrak{S}[f(x)]$ 的系数来表示 $\mathfrak{S}[f(x+a)]$ 的系数

設

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

則 $f(x+a) \sim \dfrac{1}{2}a_0(a) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\{a_n(a)\cos nx + b_n(a)\sin nx\}$，这里

$$a_n(a) = a_n \cos na + b_n \sin na, \quad b_n(a) = -a_n \sin na + b_n \cos na. \tag{2}$$

事实上，将(1)写成复数形 $\sum c_n e^{inx}$ 的話，$f(x+a)$ 的系数可从下式算出：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}e^{ina}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)e^{-in(x+a)}\,dx = e^{ina}c_n.$$

$\mathfrak{S}[f(x+a)]$ 的一般項 $a_n(a)\cos nx + b_n(a)\sin nx$ 必須等于

$$\begin{aligned} &c_n e^{ina}\cdot e^{inx} + c_{-n}e^{-ina}\cdot e^{-inx} \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in(x+a)} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in(x+a)} \\ &= a_n \cos n(x+a) + b_n \sin n(x+a). \end{aligned}$$