第二卷　第二分册

数学名著译丛

微积分和数学分析引论

R.柯朗　F.约翰　著

科学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

O1-0
8
2.2

O1-0
8
2.2

数学名著译丛

微积分和数学分析引论

第二卷　第二分册

R. 柯朗　F. 约翰　著

张恭庆　廖可人　邓东皋　吴兰成　译
叶其孝　林源渠　刘西坦　张南岳
叶其孝　丁同仁　校

科学出版社

2002

图字：01-98-2682

内 容 简 介

本书系统地阐述了微积分学的基本理论。在叙述上，作者尽量作到既严谨而又通俗易懂，并指出概念之间的内在联系和直观背景。原书分两卷，第一卷为单变量情形，第二卷为多变量情形。

第二卷中译本分为两册出版。本书是第二卷第二分册，包括第四、五、六、七、八章。第四章介绍多重积分；第五章讲述曲面积分和体积分之间的关系；第六章介绍微分方程；第七章介绍变分学；第八章介绍单复变函数。各章节都有例题、习题和解答并备以附录介绍相关的内容。

读者对象为高等院校理工科师生和工程技术人员。

Translation from the English language edition
Introduction to Calculus and Analysis. Volume 2
by Richard Courant and Fritz John
Copyright ©1989 Springer-Verlag New York Inc.
All Rights Reserved

图书在版编目（CIP）数据

微积分和数学分析引论．第二卷，第二分册／〔美〕R. 柯朗，〔美〕F. 约翰著；张恭庆等译．—北京：科学出版社，2001.3
书名原文：Introduction to Vc Vol V V Volume，Volume 2
ISBN 7-03-008540-X

I. 微… II. ①柯…②约…③张 III. ①微积分②数学分析 IV. O17

中国版本图书馆数据核字（2000）第 60215 号

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双 青 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001年3月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2002年5月第二次印刷 印张：17 1/2
印数：3 001-6 000 字数：461 000

定价：35.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉）

目　录

第四章　多重积分 ..... (497)

4.1　平面上的面积 ..... (497)

a. 面积的若尔当测度的定义 (497) b. 一个没有面积的集合 (501) c. 面积的运算法则 (502) 练习 4.1 (504)

4.2　二重积分 ..... (505)

a. 作为体积的二重积分 (505) b. 积分的一般分析概念 (507) c. 例 (510) d. 记号、推广、基本法则 (513) e. 积分估计与中值定理 (514)

4.3　三维及高维区域上的积分 ..... (517)

4.4　空间微分、质量与密度 ..... (518)

4.5　化重积分为累次单积分 ..... (519)

a. 在矩形上的积分 (520) b. 积分交换次序. 积分号下求微分 (522) c. 在更一般的区域上化二重积分为单重积分 (523) d. 在多维区域中的推广 (528)

4.6　重积分的变换 ..... (530)

a. 平面上的积分的变换 (530) b. 高于二维的区域 (535) 练习 4.6 (536)

4.7　广义多重积分 ..... (538)

a. 有界集上函数的广义积分 (539) b. 广义积分一般收敛定理的证明 (543) c. 无界区域上的积分 (546) 练习 4.7 (549)

4.8　在几何中的应用 ..... (550)

a. 体积的初等计算 (550) b. 体积计算的一般性附注. 旋转体在球坐标系中的体积 (552) c. 曲面的面积 (554) 练习 4.8 (563)

4.9　在物理中的应用 ..... (564)

a. 矩和质心 (564) b. 惯性矩 (567) c. 复合摆 (569) d. 吸引质量的势 (572) 练习 4.9 (575)

4.10　在曲线坐标中的重积分 ..... (579)

a. 重积分的分解 (579) b. 应用到移动曲线扫过的面积和移动曲面扫过的体积. 古鲁金公式. 配极求积仪 (582)

4.11 任意维数的体积和曲面面积 ..... (587)

a. 高于三维的曲面面积和曲面积分 (587) b. n 维空间中的球体面积和体积 (589) c. 推广. 参数表示 (593) 练习 4.11 (596)

4.12 作为参数的函数的广义单积分 ..... (597)

a. 一致收敛性. 对参数的连续依赖性 (597) b. 广义积分对参数的微分法和积分法 (600) c. 例 (603) d. 菲涅尔积分值的计算 (609) 练习 4.12 (610)

4.13 傅里叶积分 ..... (612)

a. 引言 (612) b. 例 (614) c. 傅里叶积分定理的证明 (616) d. 傅里叶积分定理的收敛速度 (620) e. 傅里叶变换的帕塞瓦尔等式 (624) f. 多元函数的傅里叶变换 (626) 练习 4.13 (633)

4.14 欧拉积分 (伽玛函数) ..... (633)

a. 定义和函数方程 (633) b. 凸函数. 波尔 - 摩尔路波定理的证明 (635) c. 伽玛函数的无穷乘积 (640) d. 延拓定理 (644) e. 贝塔函数 (646) f. 分数次微商和积分, 阿贝尔积分方程 (649) 练习 4.14 (650)

附录: 积分过程的详细分析 ..... (653)

A.1 面积 ..... (653)

a. 平面的分划和相应的内、外面积 (653) b. 若尔当可测集及其面积 (655) c. 面积的基本性质 (658)

A.2 多元函数的积分 ..... (663)

a. 函数 $f(x,y)$ 的积分的定义 (663) b. 连续函数的可积性与在集合上的积分 (665) c. 重积分的基本法则 (668) d. 化重积分为累次单积分 (670)

A.3 面积与积分的变换 ..... (674)

a. 集合的映射 (674) b. 重积分的变换 (679)

A.4 关于曲面面积定义的附注 ..... (680)

第五章 曲面积分和体积分之间的关系 ..... (683)

5.1 线积分和平面上的重积分之间的联系 (高斯, 斯托克斯

需要全本请访问 www.ertongbook.com

和格林的积分定理) ..... (683)
5.2 散度定理的向量形式. 斯托克斯定理 ..... (691)
练习 5.2 (695)
5.3 二维分部积分公式. 格林定理. 散度定理 ..... (696)
5.4 散度定理应用于重积分的变量替换 ..... (697)
a. 1-1 映射的情形 (697) b. 积分的变量替换和映射度 (701)
5.5 面积微分, 将 Δu 变到极坐标的变换 ..... (705)
5.6 用二维流动解释格林和斯托克斯公式 ..... (710)
5.7 曲面的定向 ..... (716)
a. 三维空间中二维曲面的定向 (716) b. 在定向曲面上曲线的定向 (727) 练习 5.7 (728)
5.8 曲面上微分形式和数量函数的积分 ..... (729)
a. 定向平面区域上的重积分 (729) b. 二阶微分形式的曲面积分 (732) c. 定向曲面上微分形式的积分和非定向曲面上数量函数的积分之间的关系 (734)
5.9 空间情形的高斯定理和格林定理 ..... (738)
a. 高斯定理 (738) 练习 5.9 a (742) b. 高斯定理在流体流动中的应用 (742) c. 高斯定理在空间力和曲面力上的应用 (745) d. 分部积分和三维空间中的格林定理 (748) e. 应用格林定理把 ΔU 变换成球坐标的形式 (749) 练习 5.9e (751)
5.10 空间斯托克斯定理 ..... (752)
a. 定理的叙述和证明 (752) 练习 5.10 a(756) b. 斯托克斯定理的物理解释 (757) 练习 5.10b (759)
5.11 高维积分恒等式 ..... (765)
附录 曲面和曲面积分的一般理论 ..... (768)
A.1 三维空间中的曲面和曲面积分 ..... (768)
a. 基本曲面 (768) b. 函数在基本曲面上的积分 (771) c. 定向基本曲面 (772) d. 简单曲面 (775) e. 单位分解以及在简单曲面上的积分 (778)
A.2 散度定理 ..... (781)
a. 定理的叙述及其不变性 (781) b. 定理的证明 (783)
A.3 斯托克斯定理 ..... (786)

A.4 在高维欧氏空间中的曲面和曲面积分 ..... (789)

a. 基本曲面 (789) b. 微分形式在定向基本曲面上的积分 (791) c. 简单 m 维曲面 (792)

A.5 高维空间中简单曲面上的积分，高斯散度定理和一般的斯托克斯公式 ..... (795)

第六章 微分方程 ..... (799)

6.1 空间质点运动的微分方程 ..... (799)

a. 运动方程 (799) b. 能量守恒原理 (801) c. 平衡. 稳定性 (804) d. 在平衡位置附近的小振动 (806) e. 行星运动 (809) 练习 6.1 e (815) f. 边值问题. 有载荷的缆与有载荷的梁 (817)

6.2 一般的一阶线性微分方程 ..... (823)

a. 分离变量法 (823) b. 一阶线性方程 (825) 练习 6.2 (826)

6.3 高阶线性微分方程 ..... (828)

a. 叠加原理. 通解 (828) b. 二阶齐次微分方程 (833) 练习 6.3 b (835) c. 非齐次微分方程. 参数变易法 (837) 练习 6.3 c (841)

6.4 一般的一阶微分方程 ..... (843)

a. 几何解释 (843) b. 曲线族的微分方程. 奇解. 正交轨线 (845) c. 解的存在唯一性定理 (848) 练习 6.4 (852)

6.5 微分方程组和高阶微分方程 ..... (856)

练习 6.5 (857)

6.6 用待定系数法求积分 ..... (858)

练习 6.6 (859)

6.7 电荷引力的位势和拉普拉斯方程 ..... (860)

a. 质量分布的位势 (860) b. 位势的微分方程 (864) c. 均匀双层位势 (865) d. 平均值定理 (868) e. 圆的边值问题. 泊松 (Poisson) 积分 (870) 练习 6.7 (872)

6.8 来自数学物理的偏微分方程的其它例子 ..... (873)

a. 一维波动方程 (873) b. 三维空间的波动方程 (875) c. 自由空间中的麦克斯韦 (Maxwell) 方程组 (877) 练习 6.8 (880)

第七章 变分学 ..... (883)

7.1 函数及其极值 ..... (883)

7.2 泛函极值的必要条件 ..... (887)

a. 第一变分等于零 (887) 练习 7.2 a (889) b. 欧拉微分方程的推导 (889) c. 基本引理的证明 (893) d. 一些特殊情形的欧拉微分方程的解. 例子 (894) 练习 7.2 d (897) e. 欧拉表达式恒等于零的情形 (898)

7.3 推广 ..... (899)
a. 具有多于一个自变函数的积分 (899) b. 例子 (902) 练习 7.3 b (903) c. 哈密顿原理. 拉格朗日方程 (904) d. 含高阶导数的积分 (906) e. 多自变量 (907)

7.4 含附带条件的问题. 拉格朗日乘子 ..... (908)
a. 通常的附带条件 (909) 练习 7.4 a (911) b. 其他类型的附带条件 (911) 练习 7.4 b (913)

第八章 单复变函数 ..... (916)

8.1 幂级数表示的复函数 ..... (916)
a. 极限. 复数项的无穷级数 (916) b. 幂级数 (919) c. 幂级数的微分法和积分法 (920) d. 幂级数的例子 (923)

8.2 单复变函数一般理论的基础 ..... (925)
a. 可微性条件 (925) b. 微分学的最简单运算 (928) c. 保角变换. 反函数 (932)

8.3 解析函数的积分 ..... (933)
a. 积分的定义 (933) b. 柯西定理 (935) c. 应用. 对数函数, 指数函数及一般幂函数 (937)

8.4 柯西公式及其应用 ..... (942)
a. 柯西公式 (942) b. 解析函数的幂级数展式 (944) c. 函数论与位势理论 (947) d. 柯西定理的逆定理 (947) e. 解析函数的零点, 极点和留数 (948)

8.5 留数定理对复积分 (围道积分) 的应用 ..... (950)
a. 证明公式 (950) b. 证明公式 (951) c. 留数定理对于有理函数的积分的应用 (952) d. 留数定理与常系数微分方程 (955)

8.6 多值函数与解析开拓 ..... (956)
练习 (8.1–8.5 节) (960)

解答 ..... (970)

第四章　多 重 积 分

多元函数微分和导数的运算可以直接化为一元函数的类似微分和导数的运算，这时积分及其与微分的关系就比较复杂了，因为可以用许多种方法来推广多元函数的积分概念. 例如对于三元函数 $f(x,y,z)$，我们不但要考虑在空间区域上的重积分，也要考虑曲面积分、曲线积分. 不过多元函数积分的一切问题还是和一元函数的积分的原始概念有联系的.

为简单起见，我们主要在平面上进行讨论 (即两个自变量). 因而，只需改变一下术语 (用“体积”代替“面积”，用“立方体”代替“正方形”等等)，所有的论断对于高维情形同样适用.

4.1　平面上的面积

a. 面积的若尔当测度的定义

在第一卷里，我们把 x,y 平面上的一个区域的面积用一元函数的积分来表示. 其基本思想 (它把我们首先引向积分概念) 是用由有限个矩形组成的较简单的区域来逼近所求的区域. 为了便于使面积直接转向三维或高维体积作更为系统的发展，就要求给出一个直接的定义，这个定义并不束缚在一元函数的积分概念上，而应更密切地与一个区域的面积的直观概念相适应，那就是把区域的面积看成包含在这区域内的单位正方形的个数. 同时，这个新的更加自然的定义是比较一般的，它避免了所有关于边界正则性的非本质的讨论，但当我们试图把面积化为一重积分的时候，这种讨论却是不

可避免的. 和通常一样, 我们把严格的存在性证明留到本章附录里去. 那些证明无非是把读者从正文里表达的思想和目的性的非正式讨论中多少已经明白了的东西系统地表达出来罢了.

定义面积时, 我们接受直观, 认为一个集合 S 的面积 $A(S)$ 应当是和 S 有关的一个非负数, 具有下列性质:

1. 若 S 是一个边长为 k 的正方形, 则 $A = k^2$.

2. 可加性: 整体的面积是它的各部分的面积之和. 更确切些, 若 S 由互不重叠的集合 $S_1, \cdots, S_N$ 组成, 分别有面积 $A(S_1)$, $\cdots$, $A(S_N)$, 则 S 的面积是

$$A(S) = A(S_1) + \cdots + A(S_N).$$

基于这些简单要求, 我们将能对实践中遇到的大多数的二维集合 S 指定一个值 $A(S)$, 虽然不能对平面上一切可以想像的集合都这样做.

对于一个有界集 S, 为了得到一个唯一确定的值 $A(S)$, 我们用一种非常特定的方法把平面划分为正方形; 后面将证明, 每一种把平面划分为正方形 (或矩形) 的其它办法都将导致相同的面积. 并合的正方形提供覆盖平面的最便利的方式, 使之不留空隙也不重叠. 我们使用附着于我们的坐标系的由直线 $x = 0, \pm 1, \cdots$ 和 $y = 0, \pm 1, \cdots$ 给出的网格. 这些直线把全平面划分为边长为 1 的闭正方形. 我们用 $A_0^+(S)$ 表示与 S 有公共点的正方形的个数, 并用 $A_0^-(S)$ 表示完全包含在 S 内的那些正方形的个数. 然后, 再把每个正方形分为四个边长为 $\frac{1}{2}$、面积为 $\frac{1}{4}$ 的正方形, 记 $A_1^+(S)$ 为那些有 S 中点的子正方形的个数的四分之一, 而记 $A_1^-(S)$ 为那些完全包含在 S 内的子正方形的个数的四分之一. 因为每个完全包含在 S 内的单位正方形导致四个完全包含在 S 内的子正方形, 所以有 $A_0^-(S) \le A_1^-(S)$, 同样也有 $A_0^+(S) \ge A_1^+(S)$. 以下我们进一步再把每个边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形分为四个边长为 $\frac{1}{4}$ 的正方形. 那些与 S 有公共点的正方形的十六分之一和那些包含在 S 内的正方形的十六分之一分别用 $A_2^+(S)$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

与 $A_2^-(S)$ 表示. 按此方式进行下去, 把值 $A_n^+(S)$ 与 $A_n^-(S)$ 和平面划分为边长为 2^{-n} 的正方形的分划联系起来 (参看图 4.1).

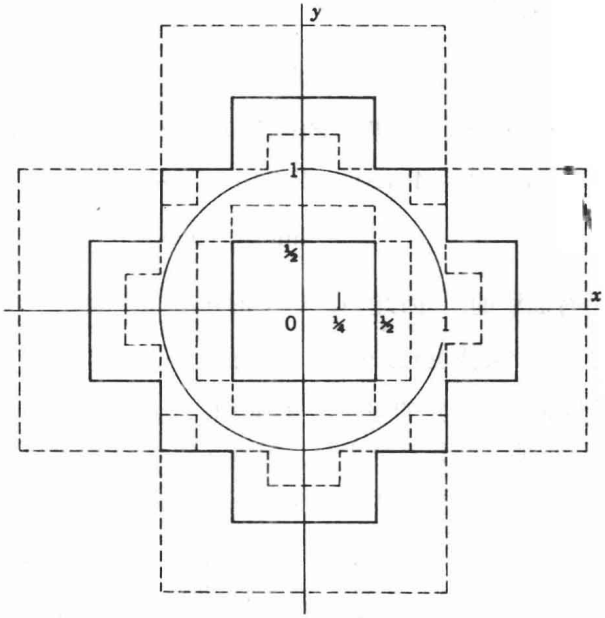


图 4.1　当 $n=0,1,2$ 时单位圆盘 $x^2+y^2\leq 1$ 面积的内、外逼近
这里 $A_0^-=0, A_1^-=1, A_2^-=2, A_2^+=4\frac{1}{4}, A_1^+=6, A_0^+=12$

显然, 值 $A_n^+(S)$ 构成一个单调减少的有界序列, 它收敛到一个值 $A^+(S)$, 同时 $A_n^-(S)$ 单调增加并收敛到一值 $A^-(S)$. 值 $A^-(S)$ 代表内面积 (inner area), 它是用包含在 S 内的并合正方形从下方逼近 S 的面积时所能达到的最接近的值; 外面积 (outer area) $A^+(S)$ 代表用并合正方形覆盖 S 所能得到的最大下界. 如果这两个值相等, 我们就说 S 是若尔当可测的, 并把这个公共值 $A^-(S)=A^+(S)$ 称为 S 的容量 (content), 或 S 的若尔当测度. 我们将用较为简单的说法, 把 S 的容量说成面积 $A(S)$, 而用 "S 有面积" 代替比较笨拙的话 "S 是若尔当可测的", 以表示 $A^-(S)=A^+(S)$ 这一事实 (对于实践中出现的几乎所有的集合, 这都是对的).

设 $A_n^+(S) - A_n^-(S)$ 代表在第 n 次子分划中那些与 S 有公共点的而又不完全位于 S 内的正方形的总面积. 所有这些正方形都包含 S 的边界点, 所以

$$A_n^+(S) - A_n^-(S) \leq A_n^+(\partial S),$$

其中 ∂S 是 S 的边界. 如果 S 的边界面积为 0, 我们求得

$$\begin{aligned} A^+(S) - A^-(S) &= \lim_{n\to\infty}[A_n^+(S) - A_n^-(S)] \\ &= \lim_{n\to\infty} A_n^+(\partial S) = 0, \end{aligned}$$

即, S 是有面积的. 因此, 如果 S 的边界 ∂S 面积为 0, S 就是有面积的 (这个条件也是必要的; 参看第 656 页).

为了验证一个给定的集合 S 有面积, 或是 ∂S 的面积为 0, 我们就应当去证明: 当 n 充分大时, 在第 n 次子分划中与 ∂S 有公共点的正方形的总面积任意小. 实际上, 为了作这个分析并不一定要用边长为 2^{-n} 的正方形. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 我们能够找到有限个集合 $S_1, \cdots, S_N$, 它们覆盖了 S 的边界 ∂S, 其总面积 $< \varepsilon$, 那么集合 S 就一定有面积. 于是, 对任意 n, 显然有

$$A_n^+(\partial S) \leq A_n^+(S_1) + \cdots + A_n^+(S_N),$$

因为任意一个与 ∂S 有公共点的正方形至少与 $S_1, \cdots, S_N$ 中的一个有公共点. 当 $n \to \infty$, 右端趋于 S_i 的面积之和, 而它是小于 ε 的; 因此 $A^+(\partial S) \leq \varepsilon$; 又因为 ε 是一个任意正数, 所以 $A^+(\partial S) = 0$.

为了确立在分析中遇到的大多数普通的区域是否有面积, 这个判别法够用了. 特别是只要知道 S 的边界是由有穷个弧组成的就够了, 其中每个弧有一个连续的非参数表示 $y = f(x)$ 或 $x = g(y)$, 而 f 或 g 分别是在一个有穷闭区间上的连续函数. 用有界闭区间上的连续函数的一致连续性能直接使我们证明这些弧可以用有穷个, 其总面积为任意小的矩形来覆盖 [1].

1) 作为练习, 请读者证明其边平行于坐标轴的矩形是有面积的 (按这里的定义), 并且其面积等于两个相邻边的乘积.

b. 一个没有面积的集合

在单位正方形内的“有理”点集，即其坐标 x, y 都是 0 与 1 之间的有理数的点集，是在我们意义下的一个没有面积的或是若尔当不可测的集合的例子. 从有理数和无理数的稠密性质，显然可见，对一切 n

$$A_n^+ = 1, A_n^- = 0,$$

所以 S 的外面积为 1 而内面积为 0. 这与 S 的边界 ∂S 由整个闭单位正方形组成，其面积为 1 这一事实是一致的. 如果我们以任意方式用有穷个闭集 $S_1, \cdots, S_N$，其面积为 $A(S_1), \cdots, A(S_N)$，覆盖 S，那么

$$A(S_1) + \cdots + A(S_N) \geq 1,$$

因为 S_i 还必须覆盖 S 的边界 ∂S(参看练习题 6). 然而，似非而是地，竟然可以用其总面积任意小的无穷个闭集 S_i 覆盖住 S. 我们只须用到有理数对 (x, y) 构成一个可列集这个事实 (见第一卷)[1]. 因此 S 的点能够排成一个无穷序列 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots$. 设 ε 是一个任意正数. 对每个整数 $m > 0$，用 S_m 表示面积为 $\varepsilon 2^{-m}$ 中心在 (x_m, y_m) 的正方形. 则 S_m 覆盖了整个集合 S，而它们的总面积是

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{16} + \cdots = \varepsilon.$$

于是，用无穷多个不相等的正方形作覆盖能够导致本质上低于上界 $A^+(S)$ 的 S 的“面积”. 这个“面积”更接近于反映出有理点在实数点中的“稀疏性”. 在由勒贝格创始的度量集合的精细理论中，

1) 例如我们能够按照两个分母中较大的一个作为尺度把它们分组排起来；每组只有有穷个元素：

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}),$$
$$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}), \cdots.$$

出发点之一就是把一个集合的外面积定义为覆盖它的任意有穷个或无穷个正方形面积之和的最大下界. 对于我们的这个集合 S, 其勒贝格外面积为 0, S 的内面积也是 0. 碰巧, 对于一个有界闭集 S 来说, 两种外面积的定义是一致的, 因为由海涅 - 波瑞尔定理 (参看第 118 页), S 的任意无穷覆盖已经包含了一个有穷覆盖.

c. 面积的运算法则

在我们感兴趣的大多数情况下, 我们能够通过检验 S 是由有穷个有连续的非参数表示的弧围成的集合, 来证明它的面积的存在性. 由此, 可能会诱使人们不去考虑那些边界更为复杂的区域. 然而, 其结果, 这种限制不但失去一般性, 而且实际上反而把事情复杂化了, 因为必须查明这种区域作集合的并与交运算以后还有简单的边界. 我们把面积看成是容量的一般性定义的好处就在于它是建立在数正方形个数的原始概念的基础上的, 对于边界除了要求它可以被有穷个总面积任意小的正方形所覆盖而外, 没有假设任何东西. 一个若当可测集的边界在细节上可以是非常复杂的, 甚至可以是由无穷多个闭曲线组成的. 只要能够证明由边界产生的总贡献是可以忽略的, 那么这种复杂性并不影响到积分理论.

为了研究面积, 把一个集合分成几个子集以及把几个集合合并成为一个较大的集合, 这些运算是基本的. 重要之点在于运用这些运算时我们必须保留在有面积的集合类里面. 我们有这样的基本定理: 两个若尔当可测集 S 和 T 的并 $S\cup T$ 与交 $S\cap T$ 都还是若尔当可测的[1]. 这是直接由下述事实推出的: $S\cup T$ 和 $S\cap T$ 的边界是由 S 或 T 的边界点组成的, 因此有面积 0(见第 660 页).

对于两个互不重叠的集合 S,T, 即其中一个集合没有内点属于另一个集合或属于它的边界, 有面积的可加性法则

$$A(S\cup T)=A(S)+A(T).$$

1) 提醒读者: 集合之并由属于这集合中的至少一个集合的点组成, 而集合之交由属于一切集合的点组成.

更一般些，对于有穷个若尔当可测集 $S_1, S_2, \cdots, S_N$，两两互不重叠，有关系式

$$A(\bigcup_{i=1}^{N} S_i) = \sum_{i=1}^{N} A(S_i). \tag{1}$$

根据不等式

$$A_n^+(\bigcup_{i=1}^{N} S_i) \leq \sum_{i=1}^{N} A_n^+(S_i),$$

$$A_n^-(\bigcup_{i=1}^{N} S_i) \geq \sum_{i=1}^{N} A_n^-(S_i),$$

(1) 的证明是平凡的. 而其中的第一个不等式是从下面这个事实简单地得到的：任何一个与 $\bigcup_{i=1}^{N} S_i$ 有公共点的正方形必与其中至少一个 S_i 有公共点. 而第二个不等式则由这样的事实得到：任何正方形如果包含在一个集合 S_i 内，就不能包含在任何其它的 S_k 内 (因为这两个是互不重叠的)，但却包含在这些集之并集内. 令 $n \to \infty$，得到

$$A^+(\bigcup_{i=1}^{N} S_i) \leq \sum_{i=1}^{N} A^+(S_i),$$

$$A^-(\bigcup_{i=1}^{N} S_i) \geq \sum_{i=1}^{N} A^-(S_i).$$

由 S_i 有面积的假设，即

$$A^+(S_i) = A^-(S_i) = A(S_i),$$

又因为并集的内面积不能超过其外面积，就推出等式 (1).

现在容易验证，这里定义的“面积”在特殊情形下可以用第一卷里考虑的积分表示出来. 例如，设 S 是由区间 $a \leq x \leq b$ 上一个连续正函数 $y = f(x)$ 的图形“下方”的点组成的，即满足

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

的点 (x,y) 的集合. 考虑任何把区间 $[a,b]$ 分划为 N 个长度为 Δx_i 的子区间, 令 m_i 及 M_i 为 $f(x)$ 在第 i 个子区间上的最小值和最大值. 以 Δx_i 为底, m_i 为高的矩形显然是互不重叠的, 并且其并集包含在 S 内, 所以

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i \leq A(S).$$

类似地有

$$A(S) \leq \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i.$$

对于连续的 f, 下和与上和都趋于 f 的积分, 于是我们得出关于 S 的面积的经典表达式

$$A(S) = \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

练 习 4.1

1. 若 S 和 T 都有面积, 并且 S 包含在 T 内, 求证: $A(S) \leq A(T)$.

2. 在练习 1 的假设下, 证明 $T - S$ 有面积, 其中 $T - S$ 是 T 中那些不含于 S 内的点的集合.

3. 若 S 与 T 是有界的, 求证

(a) $A^+(S \cup T) + A^+(S \cap T) \leq A^+(S) + A^+(T)$,

(b) $A^-(S \cup T) + A^-(S \cap T) \geq A^-(S) + A^-(T)$.

4. 设 S 与 T 是任何互不相交其并集有面积的集合, 求证

$$A^+(S) + A^-(T) = A(S \cup T).$$

5.(a) 若一集合 S 在一个坐标系下有面积, 求证它在任何一个通过转动和平移得到的坐标系下还有面积.

(b) 证明 S 在所有这些坐标系下的面积相同.

需要全本请访问 www.ertongbook.com