数学考研题集丛书

数学一

考研题集

史俊贤 滕 勇 梁希泉 主编

NEUPRESS
东北大学出版社

数学一考研题集

主　编　史俊贤　滕　勇　梁希泉
副主编　宋代清　王　刚
主　审　王学理

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

数学一考研题集 / 史俊贤，滕勇，梁希泉主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2003.3
ISBN 7-81054-723-2

Ⅰ.数… Ⅱ.①史… ②滕… ③梁… Ⅲ.数学—研究生—入学考试—试题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 054273 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市昌通彩色印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：140mm×203mm
印　　张：10.25
字　　数：276 千字
出版时间：2003 年 3 月第 1 版
印刷时间：2003 年 3 月第 1 次印刷
责任编辑：刘　莹　刘宗玉　　　责任校对：章　力
封面设计：唐敏智　　　责任出版：秦　力

定　　价：12.00 元

前　言

考研科目中“数学”以满分150分记入总成绩，在总分中的比重高达30%，“数学”科目的重要性由此可见一斑．正是出于这方面的考虑，加之数学本身概念抽象、计算繁复，我们从强化训练、提高应试能力出发，以帮助考生取得理想成绩为目的，编写出这套《数学考研题典丛书》．丛书分二个系列共六册，具体为：

数学一系列
- ● 高等数学考研题典
- ● 线性代数考研题典
- ● 概率论与数理统计考研题典
- ⊙ 数学一考研题集

数学二系列
- ● 数学二考研题典
- ● 数学二考研题集

题典（四本）分别以“数学一”、“数学二”试题为主要内容，题集（二本）有“数学一”、“数学二”试卷各30套，四本书都有全部试题的详解．之所以如此安排，是考虑积蓄力量多年的考生，他们在基础知识、解题方法基本掌握的基础上，还必须做一定数量的典型题，才能达到质的飞跃，向上提高一个层次．

本书为《数学一考研题集》．

若干年来，考研数学成绩一直不太理想，加之总分由100分提高到150分，对考生提出了更高、更严的要求．针对这种情况，我们这些多年工作在数学教学第一线并从事考研辅导的教师进行了深入细致的分析，发现考生的基础知识比较扎实，但重点、难点把握

不准，因而实际应用能力差；相当部分的学生会解题但不熟练，尤其是方法不得当，题做对了但耗时较多，时间分配不合理，应得到分数得不到，总体体现为应试能力差；高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门课不平衡，个别考生偏科严重，最终结果是总成绩不理想.

综上所述，我们认为：对于学完数学课程，并进行了系统的考研复习、训练的考生来说，进入“实战演练”状态是十分必要的.这时候，能有一本模拟试题与真题各半的数学考研题集供考生演练，对考生的整体应试能力定是受益匪浅，这也是发现不足并及时调整、最终提高考试成绩最有效的途径.但对于这一套套模拟试题来说，如何能使其起到检验、提高之目的，并非易事.我们在总结多年数学教学、考研数学辅导经验的基础上，针对考生普遍存在的问题，精心编写出这本题集，旨在把最好的考研辅导书奉献给全国的考生，相信它一定能助广大考生一臂之力.

本书分为两部分，即模拟试题部分和真题部分，共有“数学一”模拟试题 20 套，“数学一”真题 10 套.模拟试题是严格按“全国硕士研究生入学系统一考试数学考试大纲”，并结合作者多年数学考研辅导及阅卷体会精心编写而成；真题部分为近 10 年来数学的考研试题.通过模拟试题与真题实际演练，一能增强考生对考试的总体了解，二能从中发现不足以调整方向，最终达到提高应试能力的目的.本书的特色之一是所有试题均给出详细解答，一部分给出解题思路和方法，指出易犯的错误并剖析原因.还向读者介绍了许多方便快捷的解题方法，有的还给出多种解法，这些方法是作者多年教学经验的总结，它会大大增进读者对数学的理解并有助于应试水平的提高.

建议考生最好能在考试前的冲刺阶段完成这三十套题的演练；若确实没有时间，亦应做 10 套模拟试题、5 套近年的真题.我们相信这一套套精心编写的模拟题以及真题，对考生整体水平的提高确有帮助，抽出一部分时间认真去做，一定会有事半功倍之效果.

本书的主编为史俊贤、滕勇、梁希泉，副主编为宋代清、王刚，参加编写的还有魏淑惠、关江、赵玉怀，全书由王学理审订.

本书是作者们从事几十年数学教学、研究心血的结晶、今天把它奉献给立志考研的学子们，希望它能成为你们打开成功之门的一把“金钥匙”.

编　者

2002 年 10 月

目　　录

第一部分　考研模拟试题

第一套

一、填空题　($4\times6=24$ 分)

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\arctan(x-t)\mathrm{d}t}{\sin3x\ln(1+2x)}=$______.

2. $u=3x^2y+x^2z^2-y^3\sin z$ 在点 $P(1,1,0)$ 的方向导数的最小值为______.

3. 已知 $f(x,y)=xy+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由直线 $y=x$，$y=0$ 和 $x=1$ 围成，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}^*)=$______.

5. 设两事件 A，B 满足 $P(A)+P(B)=0.8$，$P(A\cup B)=0.6$，则 $P(\overline{A}B)+P(\overline{B}A)=$______.

6. 设 $X_1\sim N(1,25)$，$X_2\sim N(0,3)$，$X_3\sim N(2,1)$，且 X_1，X_2，X_3 相互独立，则 $P\{0\leqslant2X_1+3X_2-X_3\leqslant6\}=$______.（标准正态分布函数 $\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(0)=0.5$，$\Phi(2)=0.9725$，$\Phi(0.5)=0.69146$）.

二、选择题 （4×6＝24 分）

1. 设 $f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在且等于 A 是$f'(x_0)$存在且等于 A 的[ ]条件．

(A) 充分非必要； (B) 必要非充分；

(C) 充分必要； (D) 既非充分又非必要．

2. 设函数 $f(x)$满足关系式 $f''(x)+\sin^2 f'(x)=\sin x$，且 $f'(0)=0$，则必有[ ]．

(A) $f(0)$是 $f(x)$的极大值；

(B) $f(0)$是 $f(x)$的极小值；

(C) 点$(0, f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点；

(D) $f(0)$不是 $f(x)$的极值，点$(0, f(0))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点．

3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则[ ]．

(A) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必收敛；

(B) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必发散；

(C) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$必收敛；

(D) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$必发散．

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵，要使 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$是同解方程组的一个充分条件是[ ]．

(A) $r(\boldsymbol{B})=n$； (B) $r(\boldsymbol{B})=s$；

(C) $r(\boldsymbol{A})=m$； (D) $r(\boldsymbol{A})=s$．

5. 随机变量 X，Y 线性正相关，且 $D(X)=25$，$D(Y)=16$，则 $D(X-Y)=$[ ]．

(A) 9;　(B) 1;　(C) 21;　(D) 1.

6. n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n, 当 t[　　] 时, $\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

(A) $<\min\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$;　(B) $>\min\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$;

(C) $<\max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$;　(D) $>\max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$.

三、设 $z=xf\left(2x, \frac{y^2}{x}\right)$, f 具有连续的 2 阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. (9 分)

四、设 $f(x)=a|\cos x|+b|\sin x|$ 在 $x=-\frac{\pi}{3}$ 处取得极小值, 并且 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x)]^2 \mathrm{d}x=2$, 试求常数 a, b 的值.(11 分)

五、求 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$. (11 分)

六、求 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截的有限部分, 法向量指向凸侧外.(12 分)

七、设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f(x)\neq 0$, $f'(0)$ 存在且等于 a, 并设对任意 x, y, 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 求 $f(x)$. (12 分)

八、已知函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上可导, $f(x)>0$, 且满足不等式 $[xf(x)]'\leqslant -kf(x)$ (k 为确定的常数), 试证: 在 $[2, +\infty)$ 上, $f(x)\leqslant Ax^{-k-1}$, 其中 A 是与 x 无关的常数.(11 分)

九、设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, a+1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(a-1, -a, 1)^{\mathrm{T}}$ 分别是 λ_1, λ_2 所对应的特征向量, $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 λ_0, λ_0 所对应的特征向量是 $\boldsymbol{\beta}_0=(2, -5a, 2a+1)^{\mathrm{T}}$, 求 a 及 λ_0 的值.(9 分)

十、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 已知 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{AB}$ 可逆.

(1) 验证 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{BA}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{AB})^{-1}$；

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n]^{\mathrm{T}}\neq 0$，求 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})^{-1}$.（9 分）

十一、已知 $(X,\ Y)$ 的联合概率密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}21x^2y^3, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 求在 $Y=y$ 条件下，X 的条件概率密度函数；

(2) X 与 Y 是否相互独立；

(3) 求 $P\left\{0<X<\frac{1}{2}\,\middle|\,Y=\frac{1}{2}\right\}$.（10 分）

十二、设事件 A，B 满足 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{2}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$（8 分）

第二套

一、填空题（$4\times 6=24$ 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的 2 阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 5x}\right]}{3^x-1}=2$，则 $f''(0)=$______.

2. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$______.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y$ 确定，其中 f 具有 2 阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______.

4. 已知 n 阶 $(n\geqslant 3)$ 行列式 $|\boldsymbol{A}|=a$，将 $|\boldsymbol{A}|$ 中的每一列减去其

余的各列得到的行列式记成$|\boldsymbol{B}|$，则$|\boldsymbol{B}|=$______．

5．甲、乙、丙三人通过抽签决定两张同一场次的参观票的归属，甲先、乙次、丙最后，则乙抽到参观票的概率为______．

6．设 X，Y 是两个独立且均服从正态分布$N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$的随机变量，则随机变量$|X-Y|$的数学期望$E(|X-Y|)=$______，方差$D(|X-Y|)=$______．

二、选择题　$(4\times6=24$ 分)

1．设两个函数$f(x)$，$g(x)$都在$x=a$处取得极大值，则函数$F(x)=f(x)g(x)$在$x=a$处[　　]．

(A) 必取极大值；　(B) 必取极小值；

(C) 不可能取极值；　(D) 是否取极值不一定．

2．设$I_R=\oint\limits_{x^2+y^2=\frac{1}{R^2}}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+xy)^2}$，则$R\to0$时，下列说法中，正确的是[　　]．

(A) I_R是R的1阶无穷小；　(B) I_R是R的2阶无穷小；

(C) I_R是R的3阶无穷小；　(D) I_R至少是R的3阶无穷小．

3．已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n\ (u_n>0)$条件收敛，若设$v_n=5u_{2n-1}-u_{2n}\ (n=1,2,\cdots)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$[　　]．

(A) 条件收敛；　(B) 绝对收敛；

(C) 发散；　(D) 敛散性不确定．

4．线性方程组$\boldsymbol{A}x=b$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$是4×5的矩阵，且$\boldsymbol{A}$的行向量组线性无关，则错误的命题是[　　]．

(A) 齐次方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}x=0$只有零解；

(B) 齐次方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x=0$必有无穷多解；

(C) $\forall b$，方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}x=b$总有惟一解；

(D) $\forall b$，方程组 $\boldsymbol{A}x=b$ 总有无穷多解．

5．设当事件 A 与 B 同时发生时，C 也发生，则[　　]．

(A) $P(C)=P(A\cap B)$；　(B) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$；

(C) $P(C)=P(A\cup B)$；　(D) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$．

6．已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，且有关系 $b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}a_{kj}b_{ik}$ $(i,\ j=1,2,\ \cdots,\ n)$，则下列关系式中，正确的是[　　]．

(A) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}$；　(B) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；

(C) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}$；　(D) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$．

三、设当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=x(1-x^2)$，且 $f(x+1)=af(x)$，试确定常数 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求出此导数．(9 分)

四、求曲线 L：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3x\\2x^2-3y^2+5z^2=4\end{cases}$ 在点 $P(1,\ 1,\ 1)$ 的切线方程，并求 a，b，使该切线在平面 $x+ay+bz+3=0$ 上．(11 分)

五、计算球面上的三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2(x>0,\ y>0,\ z>0)$ 的边界线的形心坐标．(11 分)

六、设半径为 R 米的球盛满液体，深度为 h 处，每单位体积的质量与 ah 成正比(a 为常数，比例系数为 $k>0$)，质量单位为千克/米^3，现将液体从球顶部全部抽出，问做多少功？(12 分)

七、设 a，b，c 为常数，$a\neq0$，$f(x)=ax^2+bx+c$，当 $|x|\leqslant1$ 时，$|f(x)|\leqslant1$，证明：当 $|x|\leqslant1$ 时，$|f'(x)|\leqslant4$．(11 分)

八、设函数 $f(x)$ 在 $|x|\leqslant1$ 上有定义，在 $x=0$ 的某邻域内有连续的 2 阶导数，$f(x)\neq0$ $(x\neq0)$，且当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小，又对任意的正整数 n，恒有 $\left|\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right|\leqslant\left|\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{f\left(\frac{1}{n-1}\right)}\right|$ 成

立，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|b_n \cdot b_{n+3}|}$ 收敛 .(12 分)

九、在 R^n 中，设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关($r<n$)，并设向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 的每一个均正交，且 $s+r>n$，试证明：$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_s$ 线性相关 . (9 分)

十、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & a & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征值有重根，判断 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化，并说明理由 . (9 分)

十一、某种商品一周的需要量是一个随机变量，其概率密度为 $f(t)=\begin{cases} t\mathrm{e}^{-t}, & t>0, \\ 0, & t\leqslant 0, \end{cases}$ 设各周的需要量是相互独立的 . 试求：

(1) 两周的需要量的概率密度；

(2) 三周的需要量的概率密度 . (9 分)

十二、设总体 X 的分布密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}, & x>0, \\ 0, & \leqslant 0, \end{cases}$ 其中 $\lambda>0$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本($n>1$). 令

$$\hat{\lambda}_1=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \hat{\lambda}_2=n[\min(x_1, x_2, \cdots, x_n)],$$

试比较关于 λ 的两个估计量 $\hat{\lambda}_1$ 与 $\hat{\lambda}_2$ 哪个更有效 . (9 分)

第三套

一、填空题 (4×6=24 分)

1. 不定积分 $\int \dfrac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=$______ .

2. 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 $f(x)$可微，则 $dy=$______ .

3. 设$(a+3b)$与$(7a-5b)$垂直，$(a-4b)$与$(7a-2b)$垂直，则 a 与 b 的交角等于______ .

4. 已知 $A_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2^{-1}\end{bmatrix}$，$B^*$是 B 的伴随矩阵，则$|B^*|=$______ .

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自 X 的样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $E(S^4)=$______ .

6. 假设随机变量 X 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_{20}$是来自 X 的一个样本，令 $Y=3\sum_{i=1}^{10}X_i-4\sum_{i=1}^{20}X_i$，则 Y 服从分布______ .

二、选择题 （3×5=15 分）

1. 设 $f(x)$在 $x=0$ 点的某邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在 $x=0$ 处，$f(x)$[　　].

(A) 不可导；　　(B) 可导，且 $f'(0)\neq 0$；

(C) 取极大值；　　(D) 取极小值 .

2. 设 $f(s)$在$(-\infty,+\infty)$连续，则 $\int_{(0,0)}^{(1,2)}yf(xy)dx+xf(xy)dy$等于[　　].

(A) $\int_0^1 f(s)ds$；　　(B) $\int_0^2 f(s)ds$；

(C) $f(2)-f(0)$；　　(D) $f(1)-f(0)$.

3. 下列命题中，正确的是[　　].

(A) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r>1$；

(B) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$；

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛；

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则数列 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n}$ 收敛．

4．已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则基础解系还可以是[　　]．

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$．

5．设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 只有两个间断点，则[　　]．

(A) X 一定是离散型随机变量；

(B) X 一定是连续型随机变量；

(C) X 一定不是离散型随机变量；

(D) X 一定不是连续型随机变量．

6．设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代表余子式，则[　　]．

(A) $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$；　　(B) $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|^2$；

(C) $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|^3$；　　(D) $|\boldsymbol{B}|=0$．

三、$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，试确定常数 a 的值，使 $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$ 存在，并求出此极限．(9 分)

四、已知 $\varphi(1)=0$，$\varphi'(1)=0$，试确定 $\varphi(x)$，使方程 $[3x^2-2\varphi(x)]y\mathrm{d}x-[x^2\varphi'(x)+\sin y]\mathrm{d}y=0$ 成为全微分方程，并求上述方程满足初始条件 $y(1)=\frac{\pi}{2}$ 的特解．(11 分)

五、$f(x)$ 具有 2 阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(x)>0$. 在曲线上，$y=f(x)$ 上任意一点 $(x, f(x))(x\neq 0)$ 做此曲线的切线，此切线在 x 轴上的截距记为 u，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(u)}{uf(x)}$. (11 分)

六、计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1}(1\leqslant y\leqslant 3) \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面，它的法向量与 y 轴正向夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$. (12 分)

七、求均匀薄片的重心，其外形是心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围成图形在第一、四象限部分(其中 $a>0$). (11 分)

八、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 2 阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则存在 $\varepsilon\in(a, b)$，使得 $|f''(\varepsilon)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$. (12 分)

九、设 λ_1，λ_2 为 n 阶方阵 A 的特征值，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，而 x_1，x_2 分别为对应的特征向量，试证明：ax_1+bx_2 不是 A 的特征向量，$ab\neq 0$. (9 分)

十、已知齐次线性方程组 $\begin{cases} (a+3)x_1+x_2+2x_3=0, \\ 2ax_1+(a-1)x_2+x_3=0, \\ (a-3)x_1-3x_2+ax_3=0, \end{cases}$ 有非零解，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ 是正定矩阵，试求 a，并求 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=2$ 时，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的最大值．(9 分)