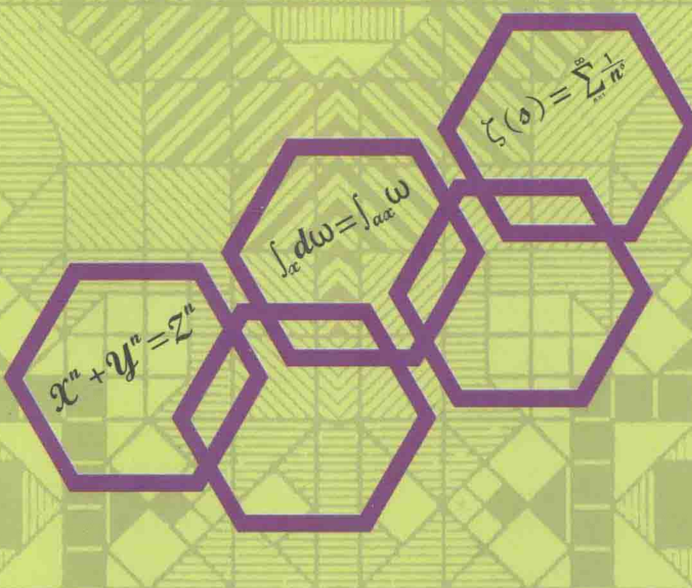
FULL STRATEGIES OF ADVANCED MATHEMATICAL PROBLEMS (I)

高等数学解题全攻略

（上卷）

吴振奎　梁邦助　唐文广　编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

FULL STRATEGIES OF ADVANCED MATHEMATICAL PROBLEMS (I)

高等数学解题全攻略（上卷）

吴振奎　梁邦助　唐文广　编著

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

高等数学是大学理工科及经济管理类专业的重要基础课，是培养学生形象思维、抽象思维、创造性思维的重要园地.

本书从浩瀚的题海中归纳、总结出的题型解法，对同学们解题具有很大的指导作用. 书中的经典问题解析对教材的重点、难点进行了诠释，对同学们掌握这方面知识起到了事半功倍的效果.

本书是针对考研、参加数学竞赛的同学撰写的，对在读的本科生、专科生及数学教师同仁也具有很高的参考价值.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学解题全攻略. 上卷/吴振奎，梁邦助，唐文广编著.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013. 5
ISBN 978-7-5603-4040-1

Ⅰ. ①高... Ⅱ. ①吴… ②梁… ③唐… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 067331 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http：//hitpress. hit. edu. cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 39 字数 1153 千字
版　　次 2013 年 5 月第 1 版 2013 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5603－4040－1
定　　价 58. 00 元

◎前言

近年来，随着高等教育事业的迅猛发展，我国研究生的报考和招收人数逐年增多，这无论是对高校在校学子，还是对已经工作的往届大学毕业生乃至自学者来讲，都无疑提供了极好的继续深造、施展才华的机会。

“高等数学（微积分）”（包括线性代数和概率论与数理统计）是大学理工科及部分文科（如经济、管理等）专业的重要基础课，也是大多数专业研究生入学考试的必试科目。但其内容较为庞杂，涉及分支也多，且题目新颖灵活、花样纷繁多变。这一切常令不少考生因敬畏而却步，也许会留下终生遗憾。

1982 年，余在辽宁大学供职，正课之暇，为学校部分打算报考研究生的学子开设了“高等数学复习与试题选讲”选修课，目的是从知识上给学生们一个小结，方法上给他们一点开拓，技巧上给他们些微启迪，让他们多看些、多练些（当时的考研正是方兴未艾之际）。

当时课讲得很辛苦，但学生们学的极认真。教者与学者不断的交流、研讨、切磋，使得两遍下来，讲义便已形成，且由辽宁科学技术出版社于 1984 年出版，转年增订本再印。

尔后，笔者调天津工作，种种原因，加之机会未逮与环境不济，使笔者终与本书修订再版工作无缘。

一晃 20 余年过去，时过境迁，感触良多。

随着近年来大学扩招，由于办学条件的限制，学生们对数学学习普遍感到困难，不少学生都希望能有一本数学复习用书，希望这本书的知识面广阔些，内容上丰富些，层次稍高些，这不仅对在校生复习迎考有所帮助，而且对于考研甚至参加数学竞赛也能有益，因为学子们都将同样面临复习、考试，尽管是不同的类型、层次的考试。

此前，北京工业大学出版社将本书曾按学科拆分成："高等数学（微积分）"、"线性代数"和"概率论与数理统计"三册出版。但事后发觉有些读者因无法购得全套书而多有不便，故又将它们合并为二册。

眼下再应哈尔滨工业大学出版社之邀，笔者又将书稿再次修订，如今再由哈尔滨工业大学出版社奉献给广大读者。为此笔者对原书大动刀斧，以使之适应新时代、新潮流、新形势、新变化。

另外，在本书的每章增加了以下内容：

（1）经典问题解析；

（2）1987 年以后全国硕士学位研究生招生数学统考试题选讲；

（3）国内外大学生数学竞赛题赏析。

俗话说："温故知新"，历史也许不会重复，但考试却不然，几年、十几年前的题目，往往又会被改头换面地拿出来，甚至原封不动地"克隆"。了解这些看上去也许有些"陈旧"的试题，细细品味，有时仍感新鲜、别致，不信就请查一查近年的考卷，你总会有"似曾相识"之感。因为"高等数学"内容就那么多，好的试题也就那么一些。正如时尚的流行，一个周期下来，便是旧时尚的复制与翻版（当然不是简单的重复）。

"登高望远"，对考研题乃至竞赛题的了解与赏析，往往会使我们开阔眼界、打通思路，因为掌握蕴涵在这些题目中的匠心、立意、解法、技巧，不仅使我们会有茅塞顿开之感，有时还会使我们大吃一惊，啊哈！原来如此。

本书编写过程参阅了大量文献，天津文登学校也提供了极为宝贵的资料，笔者谨向他们致以谢意。本书修订过程中，年轻的梁邦助、唐文广两老师的加盟，加之哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室的编辑精心审读、编辑加工，已使本书增色不少。

尽管笔者十分努力，但精力与体力已使我感到力不从心，幸好有梁、唐两才俊的力助，使我已感轻松不少，但我知道我仍须努力，我也仍会努力，且依旧在努力。

本书的出版唤起了笔者对在辽宁大学工作的那段美好时光的追忆，对昔日的挚友、同仁的怀念，在此也向他们捎去祝福。

笔者也殷切期待着读者的建议、批评和指教，让我们一起将这本书再次修订成功。

吴振奎

2012 年 8 月

目　　录

数学分析与空间解析几何篇

数学分析与
空间解析几何篇

第1章

函数、极限、连续

内 容 提 要

(一) 集合及运算

集合是现代数学中最基本的概念，其观点和方法已渗透到数学的许多分支中. 通常用“具有某种特定性质事物(对象)的全体”去描述集合. 集合简称集，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 构成集合的事物称为元素，通常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

若 a 是 A 的元素，称 a 属于 A，记 $a\in A$；若 a 不是 A 的元素，称 a 不属于 A，记作 $a\overline{\in}A$.

又 $A=\{a\mid a$ 具有 $P\}$ 表示集合 A 由满足条件 P 的元素组成.

不含任何元素的集合叫**空集**，记作 $\varnothing$.

又若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记 $A\subseteq B$.

当 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$ 时，称集合 A,B **相等**，记 $A=B$.

集合的运算指交、并、差等(图 1)：

X：$\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称集合 A,B 的**并**，记 $A\cup B$；

Y：$\{y\mid y\in A$ 且 $y\in B\}$ 称集合 A,B 的**交**，记 $A\cap B$；

Z：$\{z\mid z\in A$ 且 $z\overline{\in}B\}$ 称集合 A,B 的**差**，记 $A-B$ 或 $A\backslash B$；

又若 S 是全空间，则任一集合 $A\subseteq S$，称 $S-A$ 为 A 的余集或补集，记 $\overline{A}$.

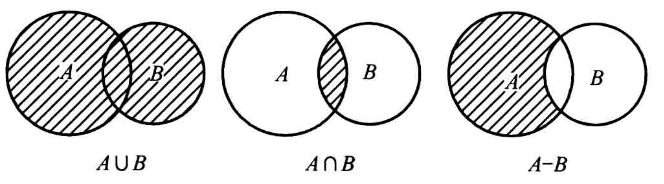


图 1

(二) 函数概念

1. 函数

如图 2 所示，X,Y 两个集合，若对 X 中每一元素 x，通过法则(映射) f 对应到 Y 中一个元素 y，则称 f 为定义在 X 上的一个函数，记 $y=f(x)$(x 又称自变量，y 称因变量).

X 称为函数**定义域**，而 $Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为函数的**值域**. 变量也称为**元**. 随自变量个数不

同函数又分一元函数、二元函数 …… 多元函数.

注 这里 X 中的元素 x 可以是 n 维空间中的点，这样一来定义就包括了一元函数、二元函数、多元函数等.

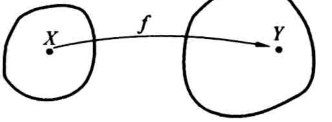


图 2

2. 函数的表示法

函数的表示法有解析法(又称公式法，它有显式、隐式、参数式之分)、列表法、图象法等.

3. 函数的几种特性

单、多值性	对定义域 X 中每一个 x，只确定唯一的 y 的函数叫**单值函数**；否则称为**多值函数**
奇 偶 性	$f(-x)=f(x)$ 称 $f(x)$ 为**偶函数**，$f(-x)=-f(x)$ 称 $f(x)$ 为**奇函数**(对所有 $x\in X$)
单 调 性	对于 X 内任两点 $x_1<x_2$，若 $f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)\leqslant f(x_2)$) 则称函数 $f(x)$ **单增(不减)**；$f(x_1)>f(x_2)$($f(x_1)\geqslant f(x_2)$) 则称函数 $f(x)$ **单减(不增)**
有 界 性	若 $\vert f(x)\vert\leqslant M$($M$ 是正的常数) 对所有 $x\in X$ 成立，则 $f(x)$ 在 X 上**有界**；否则称**无界**
周 期 性	若 $f(x+T)=f(x)$，对所有 $x\in X$ 成立，称 $f(x)$ 为**周期函数**. 满足上式的最小正数 T(如果存在) 称为该函数的**周期**
齐 次 性	对多元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 来说，若 $f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称该函数为 k **次齐次函数**

4. 反函数、复合函数

复合函数是由函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 经过中间变量 u 而组合成的函数 $y=f[\varphi(x)]$.

注意当 $x\in X$(或其一部分)，$\varphi(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 的定义域中时，函数才能复合.

	自变量	因变量	定义域	值 域	表达式
函 数	x	y	X	Y	$y=f(x)$
反函数	y	x	Y(或部分)	X(或部分)	$x=f^{-1}(y)$

注 函数与反函数是相对的，它们的位置可互换.

5. 显函数、隐函数

	定 义	表 示 式
显函数	已解出因变量为自变量的解析表达式所表示的函数	$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
隐函数	未解出因变量，而是用方程表示自变量与因变量间的关系的函数	$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$

6. 初等函数

基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等.

初等函数是由基本初等函数经有限次代数运算或函数复合得到的函数.

基本初等函数
- 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数)
- 指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq 1$)
- 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0,a\neq 1$)
- 三角函数 $y=\sin x,\cos x,\cdots$
- 反三角函数 $y=\arcsin x,\arccos x,\cdots$

↓ (四则运算)(函数复合)

初等函数

(三) 极限的概念

1. 极限

极限分数列的极限和函数的极限，详见如下：

数列的极限	对一个数列$\{x_n\}$，若任给$\varepsilon>0$，存在自然数$N=N(\varepsilon)$，使当$n>N$时，不等式$\lvert x_n-A\rvert<\varepsilon$恒成立，则称$A$为$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A$(当$n\to\infty$时)
函数的极限	若任给$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时，不等式$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$恒成立，则称$A$为$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当$x\to x_0$时) 当x从x_0左(右)边趋向于x_0时，$f(x)$的极限称为左(右)极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\left(\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\right)$

注1　一些常见数列的极限，如：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>1)$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

注2　这里函数极限定义只给了其中的一种情形，其他情形如下：

任　给	存　在	当自变量变化到	恒有关系式成立	结　论	记　号
$\varepsilon>0$	$N>0$	$\lvert x\rvert>N$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	A为$x\to\infty$时$f(x)$的极限	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$
		$x>N$		A为$x\to+\infty$时$f(x)$的极限	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$
		$x<-N$		A为$x\to-\infty$时$f(x)$的极限	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

注3　若数列$\{x_n\}$看成自变量只取自然数的函数：$x_n=f(n)$，则数列极限可看做一种函数极限. 然而应注意：函数的自变量取连续变化的实数值，而数列中n只取自然数.

2. 极限的运算

若$\lim f(x)=A$，$\lim\varphi(x)=B$，则：

(1) $\lim[f(x)\pm\varphi(x)]=\lim f(x)\pm\lim\varphi(x)=A\pm B$；

(2) $\lim cf(x)=c\lim f(x)=cA$；

(3) $\lim f(x)\cdot\varphi(x)=\lim f(x)\cdot\lim\varphi(x)=A\cdot B$；

(4) $\lim\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim\varphi(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq0)$.

这里lim下未写x的趋向，表示$x\to x_0$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$中的一种.

3. 两个重要的极限

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}\qquad\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$

4. 无穷大量、无穷小量及其阶

无穷小量	$\lim\alpha(x)=0$	关　系	$\lim\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$
无穷大量	$\lim g(x)=\infty$		$\lim\dfrac{1}{g(x)}=0$

无穷小量 $\alpha(x),\beta(x)$ 的阶

比值		定义	记号
$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	$=0$	$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶无穷小	$\alpha(x)=o[\beta(x)]$
	$=A\neq 0$	$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小	$\alpha(x)=O[\beta(x)]$①
	$=1$	$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小	$\alpha(x)\sim\beta(x)$
$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=A\neq 0(k>0)$		$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小	$\alpha(x)=O[\beta^k(x)]$

无穷小量的性质：

(1) 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量；

(2) 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量；

(3) 无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

注 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$(有极限)$\Leftrightarrow x\to a$ 时 $f(x)-A$ 是无穷小量.

5. 极限存在的判定

(1) **柯西(Cauchy)准则** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow N(\varepsilon)>0$，使任何 $x_1\geqslant N,x_2\geqslant N$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 恒成立.

(2) **单调有界函数有极限** (a,b) 内单调有界函数 $f(x)$ 存在 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

(3) **压挤或夹逼准则** $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，又 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，则 $\lim f(x)=A$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$.

6. 极限的常用求法

方法	例子
利用定义 $(\varepsilon-\delta(N)$ 方法)	若 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$ (国防科技大学，1981)
利用极限的基本性质和法则	求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{a^{\frac{x}{2}}}(a>1)$ (中南矿冶学院，1982)
连续函数求极限	求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (大连铁道学院，1989)
利用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n$ (东北重型机械学院，1981) 求 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$ (一机部 1981 ～ 1982 年出国进修生)
利用适当的函数变换(化去不定型的不定性或变化不定型类型)	求 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}$ (哈尔滨工业大学，1981) 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$(提示：令 $1-x=u$) (湘潭大学，1981)

① 更确切地讲，若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$，则记 $\alpha(x)=O^*[\beta(x)]$；若 $\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|\leqslant M\neq 0$，则记 $\alpha(x)=O[\beta(x)]$.

方　法	例　子
洛必达(L'Hospital)法　则	求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x-\sin x}$　　(国防科技大学,1983)
极限判别准则	设对 $n=1,2,\cdots$ 均有 $0<x_n<1$,且 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$　　(湘潭大学,1981)
等价无穷小代换	求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$　　(湖南大学,1983)
用左右极限关系	设 $y=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to 0}y$　　(厦门大学,1980)
用级数敛散性	求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$　　(成都地质学院,1979;山东矿业学院,1982)
适当放缩(利用不等式)	求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt[3]{\sin\dfrac{1}{x^2}}$　　(湘潭大学,1982)
利用积分	求 $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$　　(华东水利学院,1980)

注　表中方法的详细使用情况,请见后文或相应章节及例子(关于洛必达法则内容见下一章).

(四) 函数的连续性

1. 连续性的概念及连续函数

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,称 $f(x)$ 在点 x_0 **处连续**.

若函数 $f(x)$ 在某区间的每一点都连续,则说函数在该区间上连续,且称 $f(x)$ 为该区间上的**连续函数**.

2. 左、右连续及函数连续条件

右连续
若 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$

左连续
若 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$

函数在 x_0 连续
$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$

$\Leftrightarrow$ $f(x)=f(x_0)+\alpha$
当 $x\to x_0$ 时 $\alpha\to 0$

3. 函数的间断点

函数的间断点	间断点的分类
①$f(x)$ 在 x_0 无定义; ②$f(x)$ 在 x_0 有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在; ③$f(x)$ 在 x_0 有定义,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$(可去间断点); ④ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$	满足③、④的间断点称为第一类间断点,其余的间断点称为第二类间断点

4. 一致连续

函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使对任意 $x_1,x_2\in I$,当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,总有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 成立,则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

5. 闭区间连续函数的基本性质

最(大、小)值定理	若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在该区间至少取得最大、最小值各一次(它们分别记为 M,m,由此可推出 $|f(x)|\leqslant M$(有界性))
介值定理	若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,又 $\mu\in[m,M]$,则 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=\mu$. 特别地,若 $f(a)f(b)<0$,则有 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$
一致连续定理	闭区间上的连续函数,在该区间一致连续

连续函数性质
- 局部性质　$f(x)$ 在 x_0 的邻域有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)(局部保号性)
- 闭区间整体性质
  - 最(大、小)值定理
  - 介值定理
  - 一致连续定理

6. 连续函数的性质

四则运算的连续性	若 $f_1(x),f_2(x)$ 在某一区间上连续,则 $\alpha f_1(x)\pm\beta f_2(x)$, $f_1(x)\cdot f_2(x)$, $f_1(x)/f_2(x)$ $(f_2(x)\neq 0)$ 也连续(在同一区间),这里 α,β 为常数
复合函数	若 $y=f(z)$ 在 z_0 连续,$z=\varphi(x)$ 在 x_0 连续,且 $z_0=\varphi(x_0)$,则 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 连续
反 函 数	若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增(减)、连续,则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在其值域上也单增(减)、连续

7. 初等函数的连续性

(1) 基本初等函数在其定义域内是连续的;

(2) 初等函数在其定义域内是连续的.

经 典 问 题 解 析

1. 函数及其表达式

(1) 函数表达式

例 1　设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,试求 $f(f(f(f(x))))$ 和 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ $(x\neq 0$ 且 $x\neq 1)$.

解　由 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$,有 $\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$,则

$$f(f(x))=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x$$

故
$$f(f(f(x))) = f(x)$$
从而
$$f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}} = x$$
而
$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-1} = 1-x \quad x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 1$$

注　由解题过程不难发现
$$\underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{k\text{重}} = \begin{cases} f(x), & k \text{ 为奇数} \\ x, & k \text{ 为偶数} \end{cases}$$
严格的证明，还要用数学归纳法去完成.

例 2　若 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$，求 $f(x,y)$.

解　设 $x+y=u$，$\frac{y}{x}=v$，解得 $x=\frac{u}{1+v}$，$y=\frac{uv}{1+v}$，故
$$f(u,v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{(1-v)u^2}{1+v}$$
即
$$f(x,y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y}$$

还有一批函数解析式的求法可见后面的"微分方程"一章内容.

这里我们想指出一点，并非所有函数均可用解析式表达，有的函数只能用语言文字描述，比如：

符号函数
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

迪利克雷(Dirichlet) 函数
$$y = D(x)^{①} = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数时} \\ 0, & x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

黎曼(Riemann) 函数
$$y = R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{当 } x = \frac{m}{n} \text{ 时}, m, n \text{ 互质}, n \geqslant 1 \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

高斯(Gauss) 函数：$y = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

(2) 函数定义域

例 1　设 $f(x) = \frac{1}{\ln(3-x)} + \sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域.

解　由题设有 $3-x>0$，$3-x \neq 1$，即 $\ln(3-x) \neq 0$ 和 $49-x^2 \geqslant 0$.

故 $f(x)$ 的定义域为 $-7 \leqslant x < 2$，$2 < x < 3$.

例 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域($a>0$).

解　令 $x+a=u$，$x-a=v$，则 $f(x+a)+f(x-a)=f(u)+f(v)$.

由题设有：

---

① 迪利克雷函数还可写成极限形式的表达式：$\lim\limits_{m\to\infty}\{\lim\limits_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^n\}$.

$0\leqslant u\leqslant 1$，即 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，得 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$；

$0\leqslant v\leqslant 1$，即 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，得 $a\leqslant x\leqslant 1+a$.

若 $0<a\leqslant \frac{1}{2}$,则所求定义域为区间$[a,1-a]$;若 $a>\frac{1}{2}$,其定义域不存在.

(3) 函数奇偶性、周期性

例 1 试证定义在$(-l,l)$内的任何函数 $f(x)$ 均可表为奇函数与偶函数之和的形式,且表示式唯一.

证 令 $H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,易验证 $H(x)$,$G(x)$ 分别为定义在$(-l,l)$上的偶函数和奇函数.则

$$f(x)=H(x)+G(x) \tag{*}$$

下证唯一性.若还有偶函数 $H_1(x)$ 和奇函数 $G_1(x)$ 使 $f(x)=H_1(x)+G_1(x)$,则由式(*)有

$$H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x)$$

用 $-x$ 代入上式有 $H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x)$,故

$$H(x)=H_1(x),\ G(x)=G_1(x)$$

此即说明表示式唯一.

例 2 求 $f(x)=x-[x]$ 的最小周期.

解 设 $x=n+r$ $(0\leqslant r<1,n$ 为整数$)$,T 为任意整数,则由

$$\begin{aligned}f(x+T)&=f(n+T+r)=n+T+r-[n+T+r]=n+T+r-(T+[n+r])\\&=n+r-[n+r]=f(x)\end{aligned}$$

故任何整数均为其周期,则最小周期 $T=1$.

例 3 试证 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

证 考虑 $\sin x^2=0$,即 $f(x)$ 的零点分布:$x^2=k\pi$，$x=\sqrt{k\pi}$ $(k=0,1,2,\cdots)$.注意到

$$\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}}$$

它随 k 的增大而变小,即 $f(x)$ 的零点随 k 的增大越来越密,这是不可能的.因为周期函数的零点分布也是以周期形式出现的.

2. 数列极限及函数极限

说到数列极限及函数极限的经典问题莫过于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

利用它们的结果和方法可解决许多数列及函数的极限问题.

(1) 数列极限

例 1 求 $x_0=0,x_1=1$,且 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由题设 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})-x_n=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})$,反复运用此结论可有

$$x_{n+1}-x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x_1-x_0)=\frac{(-1)^n}{2^n}\quad n=1,2,\cdots$$

于是由下面变形有

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=(x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_1-x_0)+x_0\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)+1\end{aligned}$$