“高等数学单元学导式教学法”导学丛书

高等数学一点通

刘培进 焦方蕾 主编

GAO DENG SHU XUE
YI DIAN TONG

山东大学出版社

高等数学一点通

刘培进　焦方蕾　主　编

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学一点通/刘培进主编.—济南:山东大学出版社,2001.8

ISBN 7-5607-2332-2

Ⅰ.高... Ⅱ.刘... Ⅲ.高等数学-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第056870号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路27号 邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
山东日照日报社印刷厂印刷
850×1168毫米 1/32 11.5印张 299千字
2001年8月第1版 2001年8月第1次印刷
印数:1—3000册
定价:17.80元

高等数学一点通

主　编　刘培进　焦方蕾

副主编　宋宣淮　王以忠　邹玉梅

参　编　(以姓氏笔画为序)

丁殿坤　王云丽　王相国　牛进社

石仁斌　邓　薇　边平勇　刘雪梅

吕端良　李淑英　张鲁殷　崔玉军

盛敏奇　颜　波

高等数学单元学导式三书教学法
实验研究课题组成员

课题组顾问：侯印浩　林栋才

课题组组长：刘培进

副　组　长：焦方蕾　王以忠

成　　　员：(以姓氏笔画为序)

丁殿坤　王云丽　王相国　邓　薇

边平勇　刘雪梅　吕端良　李淑英

宋宣淮　邹玉梅　盛敏奇　崔玉军

颜　波

内 容 提 要

本书是为“高等数学单元学导式三书教学实验”而编写的，也是编者来自山东科技大学教学、辅导工作的结晶。

本书是高等数学中的微积分部分，包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及应用、常微分方程等六章，是理工科大中专学生，电大、职工大学学员，自学高等数学者学习高等数学时的辅导教材，也是教师教学参考书。

前　言

《高等数学一点通》一书是为进行“高等数学单元学导式三书教学法实验”，而由我们山东科技大学职业技术学院数学教研室的老师编写的高等数学导学丛书之一。

该书概括归纳了一元微积分的基本内容，对一些常见的疑难的问题给予了解答，特别是用数学口诀系统总结了有关解题方法，是学习高等数学的指导书，适合大中专学生学习高等数学和数学教师教授高等数学时参考。

书中的“高等数学口诀”，是刘培进副教授在多年高等数学教学中总结出来的。这可能与教学的严谨性有一定差距，但在教学中受到学生的广泛欢迎，相信定会有益于学生对高等数学的学习和掌握，在本书的编写中，参考了有关文献，在此对作者表示感谢。

在“高等数学单元学导式三书教学法实验”课题的研究过程中，山东科技大学黄琦、王素玉两位专家，及课题组顾问侯印浩、林栋才两位教授等给予了大力支持和具体指导，课题组向他们表示感谢！

由于作者水平有限，书中错误难免，敬请读者批评指正。

作者于山东科技大学

2001 年 1 月 1 日

目　　录

第一章　函数与极限

第一节　刘徽和他的数学思想

刘徽(约 225～295)，我国魏晋时代的著名数学家，曾从事量衡的考校工作，研究过天文历法，但他主要的工作是数学研究．他反复学习和研究了《九章算术》，他自已曾说："徽幼习《九章》，长再详览．"著有《九章算术法》．在《九章算术法》中阐明了对正负的看法．他说："今两算得失相反，要令正、负以名之．"即计算中"得"、"失"两种量意义相反，就要用正、负数来定义，这同现行数学课本的定义是一致的．刘徽对绝对值也有正确的看法，他认为："言负者未必负于少，言正者未必正于多．"即负数的绝对值未必小，正数的绝对值未必大．刘徽对《九章算术》中许多不能令人满意的问题，一一提出解决办法并取得了卓越成就．他除了《九章算术法》外，还作了《重差》(《海岛算经》)一书，给后人留下了宝贵的数学财富．刘徽在研究数学中特别注重数学思想的研究．

一、"割圆术"极限思想

几千年来，人们一直呕心沥血地计算圆周率 π 的精确值，刘徽是我国第一个找到圆周率 π 计算方法的数学家．他在《九章算术法》中创立了有名的"割圆术"，其极限思想就是："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣．"这反映了刘徽的割圆术的中心思想．他认识到圆内接正多边形的面积小于圆面积，而正多边形的边数逐次增加，边数越多其面积越接近

于圆的面积.他用圆内接正多边形的面积逼近圆的面积,算到 192 边形时,得到 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$,算到 3072 边形时,得到 $\pi=\frac{3920}{1250}=3.1416$.刘徽的"割圆术"开创了中国数学史计算 π 的新纪元,在世界也是首创.大约 1200 年后,法国数学家才得出类似的计算方法,人们为了纪念刘徽,把 $\pi=3.14$ 叫做徽率.

刘徽在公元 263 年就给出割圆术,其可贵之处在于:

其一,他用圆的内接正多边形的面积去逼近圆的面积,而前者是已知的,后者是未知的.这样,他用已知的、可求的去逼近未知的、要求的,这种思想方法有普遍意义.

其二,他把圆的面积看作是边数无穷的正多边形的面积,而边数有限的正多边形的面积是已知的、可求的.这样,他用有限逼近无限,这点也了不起.从这里也可看出他的极限思想.

其三,正是由于他的"割圆术"计算 π 的方法,才使得南北朝的数学家祖冲之成为世界上第一位把 π 准确计算到小数点第七位的人.

二、几何上的"以盈补虚"思想

刘徽在几何方面作了许多工作,他主张"析理以辞,解体用图",就是理论与直观并用,注意几何的直观性,他在验证几何体积方面的具体方法有以下几点:

1. 以盈补虚

刘徽主要是用以盈补虚方法证明多面体体积的计算公式.他曾说:"损广补狭,此术并上下广而半之者,以盈补虚,得中平之广."可见刘徽把平面图形的割补原理推广到空间,成为"损广补狭",以证明几何体积公式.

2. 棋验法和截面法

刘徽用"棋验法和截面法"来推导比较复杂的几何体体积.所谓棋验法就是把未知的几何体割分为棋(为某些模式的几何体,长

方体为一个棋),当棋的体积已知时,那么所求的体积就是所分棋体积之和.例如,他把正方台分成一个四棱柱体、四个相等的底为长方形的直角楔形和四个相等的四棱锥.这些立方体的体积都易知.而所谓的截面法是指用平行于底的平面去截立体,其理论根据是“等高二几何体,如果在同高处截面积之比处处相等,那么两几何体体积之比等于这个常数”.利用这一原理推导几何体体积的方法称为截面法.刘徽在证明圆锥与圆台的体积公式时,在其外作一外切正方锥或正方台,用平行于底的平面去截,所采用的就是截面法.

3.“牟合方盖”方法

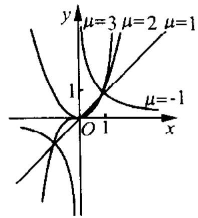
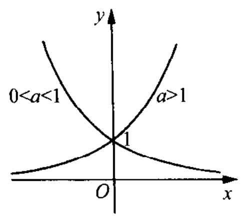
我国在很早以前就有人开始研究球的体积计算公式,在《九章算术》中就有球的体积的计算公式,但不太精确.后来,张衡、刘徽、祖冲之、祖暅都对球体积进行了研究,最后由祖氏父子给出了我们现在所熟知的球的体积的计算公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.在当时,刘徽曾用棋验法研究球体积的精确计算,他试图把球的体积计算转化为另外一个能计算体积的立体.为此,他作球的外切立方体,同时用两个直径等于球的直径的圆柱从立方体内贯穿.这时,球就被包含在两圆柱相交公共部分中,而且与圆柱相切.刘徽只保留两圆柱的公共部分,给它取名为“牟合方盖”.球和“牟合方盖”用水平面去截,其面积之比恒为 $\pi:4$,于是他用“截面法”原理得到 $V_{球}=\frac{\pi}{4}V_{牟}$.如果“牟合方盖”的体积解决了,那么球体积就解决了.

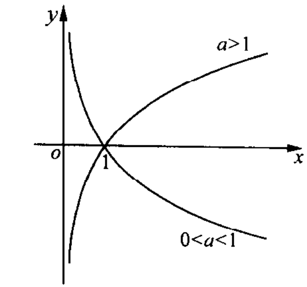
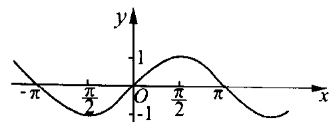
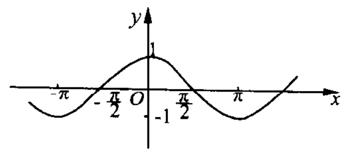
但遗憾的是,他没有解决 $V_{牟}$,虽然,刘徽没把球的精确公式找到,但他的正确思维,给祖冲之父子后来得到精确的球体积公式打下了基础.祖氏父子正是抓住了关键性的“牟合方盖”的体积计算,最终提出了祖暅原理“幂势既同,则各不容异”.

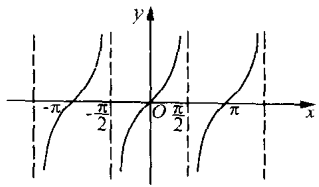
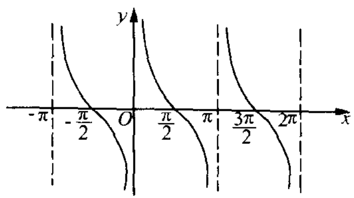
刘徽在数学上的巨大贡献,除圆周率 π 的计算和几何体积计算及理论证明外,他在美术、代数、几何等其他方面都作出了巨大的贡献.

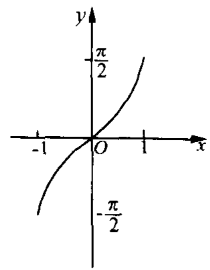
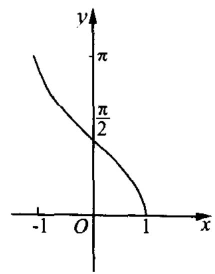
第二节　内容提要

一、基本初等函数的图形及其主要性质

函数	图形	定义域	值域	主要性质
幂函数 $y=x^{\mu}$ （μ 为常数）	 	随 μ 不同而不同，但不论 μ 取什么值，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义	随 μ 不同而不同	若 $\mu>0$，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加； 若 $\mu<0$，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
指数函数 $y=a^{x}$ （a 是常数，$a>0,a\neq1$）	 	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$a^{0}=1$ 若 $a>1$，a^{x} 单调增加； 若 $0<a<1$，a^{x} 单调减少； 直线 $y=0$ 为函数图形的水平渐近线

函数	图形	定义域	值域	主要性质
对数函数 $y=\log_a x$ (a 是常数, $a>0, a\neq1$)		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$\log_a 1=0$ 若 $a>1$,$\log_a x$ 单调增加; 若 $0<a<1$,$\log_a x$ 单调减少; 直线 $x=0$ 为函数图形的铅直渐近线
正弦函数 $y=\sin x$		$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	以 2π 为周期的周期函数,在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调增加,奇函数
余弦函数 $y=\cos x$		$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	以 2π 为周期的周期函数,在 $[0,\pi]$ 上单调减少,偶函数

函数	图形	定义域	值域	主要性质
正切函数 $y=\tan x$		$(2n-1)\frac{\pi}{2}<x<(2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$	$(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期的周期函数,在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调增加,奇函数;直线 $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 为函数图形的铅直渐近线 $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
余切函数 $y=\cot x$		$n\pi<x<(n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$	$(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期的周期函数,在 $(0,\pi)$ 内单调减少,奇函数; 直线 $x=n\pi$ 为函数图形的铅直渐近线 $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

函 数	图 形	定义域	值 域	主要性质
反正弦函数 $y=\arcsin x$		$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	单调增加，奇函数
反余弦函数 $y=\arccos x$		$[-1,1]$	$[0,\pi]$	单调减少