

# 光学原理

下册

M. 玻恩 E. 沃耳夫 著

科学出版社

# 光 学 原 理

光的传播、干涉和衍射的电磁理论

(下 册)

M. 玻恩 E. 沃耳夫 著

黄乐天 陈熙谋 陈秉乾 译校

科 学 出 版 社

1 9 8 1

## 内 容 简 介

本书是光学方面的一部名著。全书在经典电磁理论范围内系统地讨论了光在各种媒质中传播的基本规律,包括光的反射、折射、色散、干涉和衍射以及金属光学和晶体光学等。几何光学作为波长趋于零的极限情况,也纳入了麦克斯韦方程系统,同时讨论了象差的衍射理论等。中译本根据原书第五版译出,分上、下两册出版。上册包括历史引言和前八章,下册包括后六章及附录,主要内容为衍射理论、金属光学、晶体光学等。

本书可供光学专业的工作人员和高等院校师生参考。

Max Born and Emil Wolf

### PRINCIPLES OF OPTICS

*Electromagnetic Theory of Propagation,  
Interference and Diffraction of Light*

(5th ed.)

Pergamon Press, 1975

## 光 学 原 理

光的传播、干涉和衍射的电磁理论

(下册)

M. 玻恩 E. 沃耳夫 著

黄乐天 陈熙谋 陈秉乾 译校

责任编辑 方开文

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1981年7月第一版 开本: 850×1168 1/32

1981年7月第一次印刷 印张: 13 3/4 插页: 2

印数: 0001—9,120 字数: 362,000

统一书号: 13031·1589

本社书号: 2185·13—3

定价: 2.75 元

# 目 录

<b>第九章 象差的衍射理论</b> .....	603
§ 9.1 有象差存在时的衍射积分.....	604
§ 9.1.1 衍射积分 .....	604
§ 9.1.2 位移定理。参考球的变化 .....	607
§ 9.1.3 强度与波阵面平均形变之间的关系 .....	609
§ 9.2 象差函数的展开.....	610
§ 9.2.1 泽尼克圆多项式 .....	610
§ 9.2.2 象差函数的展开 .....	613
§ 9.3 初级象差的容限条件.....	616
§ 9.4 与单一象差相联系的衍射图样.....	622
§ 9.4.1 初级球面象差 .....	626
§ 9.4.2 初级彗差 .....	629
§ 9.4.3 初级象散 .....	632
§ 9.5 扩展物的成象.....	634
§ 9.5.1 相干照明 .....	635
§ 9.5.2 不相干照明 .....	639
<b>第十章 部分相干光的干涉和衍射</b> .....	648
§ 10.1 引言 .....	648
§ 10.2 实多色场的复数表示 .....	652
§ 10.3 光束的相关函数 .....	659
§ 10.3.1 两个部分相干光束的干涉。互相干函数和复相干度 .....	659
§ 10.3.2 互相干的谱表示 .....	664
§ 10.4 准单色光的干涉和衍射 .....	667
§ 10.4.1 准单色光的干涉。互强度 .....	667
§ 10.4.2 扩展不相干准单色光源发出的光的互强度和相干度的计算 .....	671

(a) 范西特-泽尼克定理 .....	671
(b) 霍普金斯公式 .....	677
§ 10.4.3 一个例子 .....	679
§ 10.4.4 互强度的传播 .....	684
§ 10.5 某些应用 .....	686
§ 10.5.1 扩展的不相干准单色光源象中的相干度 .....	686
§ 10.5.2 聚光镜对显微镜分辨率的影响 .....	691
(a) 临界照明 .....	691
(b) 柯勒照明 .....	694
§ 10.5.3 用部分相干准单色照明成象 .....	696
(a) 互强度通过光学系统的透射 .....	696
(b) 透照物的象 .....	699
§ 10.6 关于互相干的一些定理 .....	704
§ 10.6.1 来自不相干光源光的互相干的计算 .....	704
§ 10.6.2 互相干的传播 .....	707
§ 10.7 部分相干性的严格理论 .....	709
§ 10.7.1 互相干波动方程 .....	709
§ 10.7.2 互相干传播定律的严格表述 .....	711
§ 10.7.3 相干时间和有效谱宽 .....	715
§ 10.8 准单色光的偏振特性 .....	719
§ 10.8.1 准单色平面波的相干矩阵 .....	720
(a) 完全非偏振光(自然光) .....	725
(b) 完全偏振光 .....	726
§ 10.8.2 某些等价表示, 光波的偏振度 .....	728
§ 10.8.3 准单色平面波的斯托克斯参量 .....	732
<b>第十一章 严格的衍射理论</b> .....	<b>736</b>
§ 11.1 引言 .....	736
§ 11.2 边界条件与面电流 .....	738
§ 11.3 平面屏的衍射: 巴俾涅原理的电磁形式 .....	740
§ 11.4 平面屏的二维衍射 .....	742
§ 11.4.1 二维电磁场的标量性质 .....	742
§ 11.4.2 平面波的角谱 .....	743
§ 11.4.3 利用对偶积分方程表述 .....	746

§ 11.5 半平面对平面波的二维衍射 .....	748
§ 11.5.1 $E$ 偏振对偶积分方程的解 .....	748
§ 11.5.2 用非涅耳积分表示的解 .....	751
§ 11.5.3 解的性质 .....	755
§ 11.5.4 $H$ 偏振的解 .....	760
§ 11.5.5 某些数值计算 .....	762
§ 11.5.6 与近似理论及实验结果的比较 .....	764
§ 11.6 半平面对平面波的三维衍射 .....	766
§ 11.7 半平面对局域源的衍射 .....	769
§ 11.7.1 平行于衍射棱边的线电流 .....	769
§ 11.7.2 偶极子 .....	775
§ 11.8 其他问题 .....	779
§ 11.8.1 两个平行的半平面 .....	779
§ 11.8.2 平行错开的半平面的无限堆垛 .....	782
§ 11.8.3 窄条 .....	783
§ 11.8.4 某些进一步的问题 .....	785
§ 11.9 解的唯一性 .....	785
<b>第十二章 光被超声波衍射</b> .....	<b>788</b>
§ 12.1 现象的定性描述和基于麦克斯韦微分方程的理论概要 .....	788
§ 12.1.1 现象的定性描述 .....	788
§ 12.1.2 基于麦克斯韦方程的理论概要 .....	792
§ 12.2 用积分方程法处理光被超声波衍射 .....	796
§ 12.2.1 $E$ 偏振的积分方程 .....	798
§ 12.2.2 积分方程的试探解 .....	799
§ 12.2.3 衍射和反射光谱中光波振幅的表达式 .....	803
§ 12.2.4 方程用逐次逼近法得出的解 .....	803
§ 12.2.5 某些特殊情况下第一序和第二序谱线强度的表达式 .....	808
§ 12.2.6 某些定性的结果 .....	810
§ 12.2.7 喇曼-纳斯近似 .....	812
<b>第十三章 金属光学</b> .....	<b>815</b>
§ 13.1 波在导体中的传播 .....	816

§ 13.2	金属表面的折射和反射 .....	820
§ 13.3	金属光学常数的初等电子理论 .....	832
§ 13.4	波在分层导电媒质中的传播. 金属膜的理论 ...	836
§ 13.4.1	透明衬底上的吸收膜 .....	836
§ 13.4.2	吸收衬底上的透明膜 .....	842
§ 13.5	导体球的衍射;米氏理论 .....	843
§ 13.5.1	问题的数学解 .....	845
(a)	用德拜势表示场 .....	845
(b)	场分量的级数展开 .....	851
(c)	关于缔合勒让德函数与柱面函数的公式概述 .....	860
§ 13.5.2	米氏公式的某些结果 .....	862
(a)	分波 .....	862
(b)	极限情况 .....	864
(c)	散射光的强度和偏振 .....	869
§ 13.5.3	总散射与消光 .....	875
(a)	某些一般的考虑 .....	875
(b)	计算结果 .....	881
<b>第十四章</b>	<b>晶体光学</b> .....	<b>887</b>
§ 14.1	各向异性媒质的介电张量 .....	887
§ 14.2	在各向异性媒质中单色平面波的结构 .....	890
§ 14.2.1	相速度和光线速度 .....	890
§ 14.2.2	光在晶体中传播的非涅耳公式 .....	894
§ 14.2.3	确定传播速度和振动方向的几何作图 .....	898
(a)	波法线椭球 .....	898
(b)	光线椭球 .....	901
(c)	法线面和光线面 .....	902
§ 14.3	单轴晶体和双轴晶体的光学性质 .....	904
§ 14.3.1	晶体的光学分类 .....	904
§ 14.3.2	光在单轴晶体中的传播 .....	906
§ 14.3.3	光在双轴晶体中的传播 .....	908
§ 14.3.4	晶体中的折射 .....	912
(a)	双折射 .....	912
(b)	锥形折射 .....	914
§ 14.4	晶体光学测量 .....	920

§ 14.4.1	尼科耳棱镜 .....	920
§ 14.4.2	补偿器 .....	921
(a)	四分之一波片 .....	922
(b)	巴俾涅补偿器 .....	923
(c)	索累补偿器 .....	925
(d)	伯列克补偿器 .....	925
§ 14.4.3	有晶片时的干涉 .....	926
§ 14.4.4	单轴晶片的干涉图 .....	931
§ 14.4.5	双轴晶片的干涉图 .....	934
§ 14.4.6	晶体媒质的光轴定位及其主折射率的测定 .....	936
§ 14.5	应力双折射和形式双折射 .....	937
§ 14.5.1	应力双折射 .....	937
§ 14.5.2	形式双折射 .....	941
§ 14.6	吸收晶体 .....	944
§ 14.6.1	光在吸收的各向异性媒质中的传播 .....	944
§ 14.6.2	吸收晶片的干涉图 .....	951
(a)	单轴晶体 .....	952
(b)	双轴晶体 .....	953
§ 14.6.3	二向色的起偏振器 .....	955
附录 1	变分法 .....	959
§ 1	作为极值必要条件的欧勒方程 .....	959
§ 2	希耳伯特独立积分与哈密顿-雅科毕方程 .....	961
§ 3	致极曲线场 .....	963
§ 4	从哈密顿-雅科毕方程的解确定全部致极曲线 .....	965
§ 5	哈密顿正则方程 .....	967
§ 6	被积函数中不显含独立变量时的特殊情况 .....	968
§ 7	不连续性 .....	970
§ 8	维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 条件和勒让德条件 (极值的充分条件) .....	972
§ 9	一个端点约束在一曲面时变分积分的极小值 .....	975
§ 10	极小值的雅科毕判据 .....	976
§ 11	例一: 光学 .....	976
§ 12	例二: 质点系力学 .....	979

附录 2	光学, 电子光学和波动力学 .....	983
§1	基本形式的哈密顿类似 .....	983
§2	变分形式的哈密顿类似 .....	986
§3	自由电子的波动力学 .....	989
§4	光学原理应用于电子光学 .....	992
附录 3	一些积分的渐近逼近 .....	995
§1	最速下降法 .....	995
§2	稳相法 .....	1002
§3	二重积分 .....	1003
附录 4	狄喇克 $\delta$ 函数 .....	1006
附录 5	严格推导洛伦兹-洛伦茨定律用到的一个数学引理 (\$ 2.4.2) .....	1012
附录 6	电磁场中不连续性的传播 (\$ 3.1.1) .....	1015
§1	联系各个场矢量不连续变化的关系式 .....	1015
§2	运动的不连续面上的场 .....	1018
附录 7	泽尼克圆多项式 (\$ 9.2.1) .....	1020
§1	某些一般考虑 .....	1020
§2	径向多项式 $R_n^m(\rho)$ 的显式 .....	1022
附录 8	一个不等式的证明 (\$ 10.7.3) .....	1028
附录 9	计算两个积分的值 (\$ 12.2.2) .....	1030

## 第九章 象差的衍射理论

第五章中，我们在几何光学基础上研究了象差效应。在那一种处理中，认为象就是几何光线与象平面的交点所构成的模糊图样。由于几何光学给出的是在波长很短的极限情况下有效的近似模型，因此可以预料，当象差变小时，几何理论逐渐失效。例如，在从一个圆孔发出的理想球面会聚波的极限情况下，几何光学预言焦平面上焦点处的强度无限大，其他各处的强度为零；然而，正如在§ 8.5.2中已经指出的，实象是由一个被一些暗环和亮环围绕着的中央亮区(爱里图样)组成的。在焦平面附近，光分布也呈现出比几何光学所设想的更为复杂的性质(参看图 8.41)。这就促使我们在衍射理论基础上研究象差效应。

这个领域内的首批研究成果是瑞利<sup>1)</sup>提出的。他的主要贡献是用公式立出判据(在§ 9.3中讨论)，它的一种推广形式已经广泛地用于确定光学仪器所能容许的最大象差。这一课题已由于许多作者的研究进一步推进了，他们研究了各种象差效应<sup>2)</sup>，我们可以特别提到斯图瓦尔特(Steward)、皮希特(Picht)和玻恩的一些更广泛的处理方法<sup>3)</sup>。

- 
- 1) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5), 8 (1879), 403. 重载于他的 *Scientific Papers* (Cambridge University Press, 1899), 1, 428.
  - 2) E. Wolf 在 *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), 14 (1951), 95 中已给出象差衍射理论的历史概述.
  - 3) G.C. Steward, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A, 225 (1925), 131; 也见于他的书 *The Symmetrical Optical System* (Cambridge University Press, 1928). J. Picht, *Ann. d. Physik*, (4) 77 (1925), 685. 同上 80 (1926), 491; 也见于他的 *Optische Abbildung* (Braunschweig, Vieweg, 1931). M. Born, *Naturwissenschaften*, 20 (1932), 921; 以及他的 *Optik* (Berlin, Springer, 1933), p. 202.

有象差存在时成象的广泛衍射处理方法是奈波尔<sup>1)</sup>提出的,其中一部分在泽尼克的合作下完成。他们研究了波阵面与球面的偏离不到一个波长时的微小象差的影响。范卡本 (Van Kampen)<sup>2)</sup>在衍射理论的基础上,利用渐近逼近法研究了大象差的效应;这种处理方法的基础是形式上推广到稳相原理的双变量函数,它后来已首先由福克 (J. Focke) 严格地用公式作了表述 (见附录 3, 1002 页)。

本章主要叙述奈波尔-泽尼克理论,并考查受初级象差影响的衍射象的结构。在最后一节 (§ 9.5) 中,将从点状物推广到扩展物,并研究相干照明和不相干照明的成象问题。部分相干照明的成象将在第十章中讨论。

## § 9.1 有象差存在时的衍射积分

### § 9.1.1 衍射积分

考虑一个具有单色点光源  $P_0$  的共轴光学系统 (图 9.1)。取笛卡儿坐标系,原点位于  $P_0$  的高斯象点  $P_1^*$ ,  $z$  轴沿  $CP_1^*$ , 其中  $C$  是出射光瞳的中心,  $y$  轴取在子午面 (包含  $P_0$  和系统轴的平面) 内。  $P_0$  和  $P_1^*$  的离轴距离分别用  $Y_0$  和  $Y_1^*$  表示。

同第五章一样,出射光瞳区内波阵面的形变用象差函数  $\Phi$  描述。设  $\bar{Q}$  和  $Q$  分别是象空间内的一条光线与通过  $C$  的波阵面及

1) B.R.A. Nijboer (上册译作奈波), Thesis, University of Groningen, 1942. 主要部分也发表于 *Physica*, **10** (1943), 679; 同上, **13** (1947), 605; F. Zernike 和 B.R.A. Nijboer, 撰稿于 *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 227. K. Nienhuis 和 B.R.A. Nijboer 在 *Physica*, **14** (1948), 590 中讨论了理论推广到象差稍大的情况。还必须提到 K. Nienhuis 的一篇论文 (University of Groningen, 1948), 它主要涉及象差效应的实验研究。在 § 9.4 中复制了 Nienhuis 获得的几张精美的照片。

在上册 576 页所引 M.P. Bachynski 和 G. Bekefi 的论文以及 *Trans. Inst. Radio Eng.*, AP-4 (1956), 412 中描述了在微波频段有象差存在时象区结构的实验研究。

2) N.G. Van Kampen, *Physica*, **14** (1949), 575; 同上, **16** (1950), 817; 同上, **25** (1958), 437

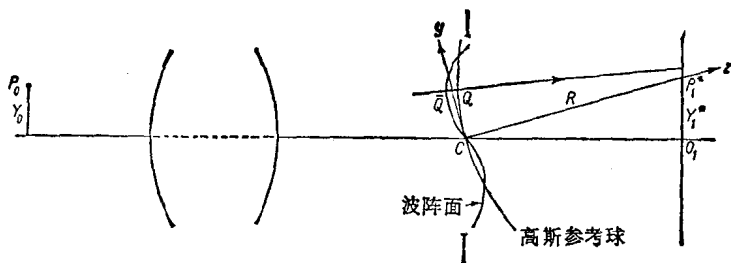


图 9.1 参考系和记号的选择

高斯参考球的交点。假定象空间的折射率为 1,  $\Phi$  (图 9.1 中取正值) 表示沿光线测得的距离  $\bar{O}Q$ 。

设  $R$  表示高斯参考球的半径  $CP_1^*$ ,  $s$  为  $Q$  与象区内任一点  $P$  之间的距离。  $Q$  点的扰动用  $Ae^{ik(\Phi-R)}/R$  表示, 其中  $A/R$  是  $Q$  点的振幅。根据惠更斯-菲涅耳原理,  $P$  点的扰动由下式给出:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{Ae^{-ikR}}{R} \iint \frac{e^{ik[\Phi+s]}}{s} dS, \quad (1)$$

式中积分遍及参考球近似充满出射光瞳的那一部分。(1) 式中已假定所涉及的角度很小, 因此倾斜因子在参考球上的变化可以忽略; 也已假定波的振幅在波阵面上基本上是常数, 因此  $A$  可提出积分号外。

设  $(\xi, \eta, \zeta)$  是  $Q$  的坐标,  $(x, y, z)$  是  $P$  的坐标,  $a$  是出射光瞳的半径。同 § 8.8 中讨论过的无象差波 ( $\Phi \equiv 0$ ) 的特殊情况一样, 令

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a\rho \sin \theta, & x &= r \sin \phi, \\ \eta &= a\rho \cos \theta, & y &= r \cos \phi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

与 § 8.8(2) 式和 § 8.8(9) 式一样<sup>1)</sup>, 我们有

$$k(s-R) = -v\rho \cos(\theta-\phi) - \frac{1}{2}u\rho^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 u, \quad (3)$$

式中  $u$  和  $v$  是  $P$  的两个“光学坐标”:

1)  $R$  现在相当于 § 8.8 的  $f$ 。值得指出: 如果应用 § 8.8 的(2)和(3)式, 则衍射积分可再次用平面波的角谱形式来表示[见 J. Focke, *Optica Acta*, 3 (1956), 110]。

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{R}\right)^2 x, \quad v = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{R}\right) \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

这时把  $\Phi$  看作  $Y_1^*$ ,  $\rho$  和  $\theta$  的函数是方便的, 即

$$\Phi = \Phi(Y_1^*, \rho, \theta). \quad (5)$$

高斯参考球的面元是  $dS = a^2 \rho d\rho d\theta$ , 如果  $CP_1^*$  与系统轴的夹角很小, 则积分范围可取为  $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$ . 此外, 对于象区内的观察点, 在被积函数分母中可用  $R$  代替  $s$ . 因此, 将(3)式代入, (1)式变为

$$\begin{aligned} U(P) &= U(u, v, \phi) \\ &= -\frac{i}{\lambda} \frac{Aa^2}{R^2} e^{i\left(\frac{R}{a}\right)^2 u} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}u\rho^2]} \rho d\rho d\theta, \end{aligned} \quad (6)$$

因此,  $P$  点的强度为

$$\begin{aligned} I(P) &= |U(P)|^2 \\ &= \left(\frac{Aa^2}{\lambda R^2}\right)^2 \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}u\rho^2]} \rho d\rho d\theta \right|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

把强度  $I(P)$  表示为强度  $I^*$  的分数是方便的, 如果象差不存在,  $I^*$  就是在高斯象点  $P^*$  得到的强度. 根据(7)式, 有

$$I^* = \pi^2 \left(\frac{Aa^2}{\lambda R^2}\right)^2, \quad (8)$$

因此归一化强度为<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} i(P) &= \frac{I(P)}{I^*} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}u\rho^2]} \rho d\rho d\theta \right|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

象差不存在时, 强度在高斯象点处为极大. 当象差存在时, 一般就不再是这种情况了, 我们可以把强度极大的点称为衍射焦

1) 归一化强度所用的符号  $i$  与  $\sqrt{-1}$  所用的同一符号之间不会引起混乱, 因为前者总是带着自变量出现的, 例如  $i(P), i(u, v, \phi)$ , 等等.

点<sup>1)</sup>。通常人们感兴趣的只是特定观察平面内的强度极大值；这个值[按(9)式那样归一化时]就称为斯特列耳(Strehl)强度<sup>2)</sup>。

由(9)式可立即导出以后必需的一些简单结果。

### § 9.1.2 位移定理. 参考球的变化

设 $\Phi$ 和 $\Phi'$ 是两个象差函数,使得

$$\Phi' = \Phi + H\rho^2 + K\rho \sin \theta + L\rho \cos \theta + M, \quad (10)$$

式中 $H, K, L$ 和 $M$ 都是与 $\lambda$ 同数量级的常数。又设 $i(u, v, \phi)$ 和 $i'(u, v, \phi)$ 是相应的归一化强度,则由(9)式得出

$$i(u, v, \phi) = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i\Phi(u, v, \phi; \rho, \theta)} \rho d\rho d\theta \right|^2, \quad (11)$$

式中

$$f(u, v, \phi; \rho, \theta) = k\Phi - v\rho \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}u\rho^2, \quad (12)$$

对于 $i'$ 有类似的表达式。现在根据(10)式,则后一式也可写成如下形式:

$$\begin{aligned} f(u, v, \phi; \rho, \theta) &= k\Phi' - k[H\rho^2 + K\rho \sin \theta \\ &\quad + L\rho \cos \theta + M] - v\rho \cos(\theta - \phi) \\ &\quad - \frac{1}{2}u\rho^2 \\ &= k\Phi' - v'\rho \cos(\theta - \phi') - \frac{1}{2}u'\rho^2 - kM \\ &= f'(u', v', \phi'; \rho, \theta) - kM, \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} u' &= u + 2kH, & v' \sin \phi' &= v \sin \phi + kK, \\ v' \cos \phi' &= v \cos \phi + kL. \end{aligned} \quad (14)$$

- 1) 当然,一般说来可能有不止一个衍射焦点,但如果象差充分小,衍射焦点就是唯一的。
- 2) 这个概念出自 K. Strehl, *z.f. Instrumkde.*, 22 (1902), 213, 他称之为“Definitionshelligkeit”。在英文文献中常采用不大恰当的术语(“definition”) (清晰度)。

根据(2)和(4)式, (14)式表示如下变换:

$$\begin{aligned} z' &= z + 2\left(\frac{R}{a}\right)^2 H, & x' &= x + \left(\frac{R}{a}\right) K, \\ y' &= y + \left(\frac{R}{a}\right) L. \end{aligned} \quad (15)$$

由(11)和(13)式得出

$$i(u, v, \phi) = i'(u', v', \phi'). \quad (16)$$

由此我们已证明了如下的位移定理: 象差函数加上一项  $H\rho^2 + K\rho\sin\theta + L\rho\cos\theta + M$ , 其中  $H, K, L$  和  $M$  都是与  $\lambda$  同数量级的常数, 并不引起焦点附近三维强度分布的变化, 只是整个分布按照变换(15)有一位移; 即沿主方向  $CP^*$  离出射光瞳的位移量为  $2(R/a)^2 H$ , 在正  $x$  和  $y$  方向的位移量分别为  $(R/a)K$  和  $(R/a)L$ .

(10)式右方的附加项可以解释为代表参考球的变化。假定我们

选择一个新参考球, 球心在象区  $P'(x', y', z')$  点上, 而半径为  $R'$ , 使得它至多偏离高斯球几个波长。设光线  $\bar{Q}Q$  与新参考球相交于  $N$  点。于是以这个新球作参考的波象差  $\Phi'$  为(见图 9.2)

$$\begin{aligned} \Phi' &= \bar{Q}N = \bar{Q}Q - NQ \\ &\sim \bar{Q}Q - NG, \end{aligned} \quad (17)$$

式中  $G$  是  $NP'$  线与高斯参考球的交点, 和前面一样, 假定象空间的折射率为 1。这时

$\bar{Q}Q = \Phi$  就是以高斯球作参考的波象差,  $NG = NP' - GP' = R' - s$ , 式中  $s$  表示从  $G$  到  $P'$  的距离。因此(17)式可写成

$$\Phi' \sim \Phi + s - R'$$

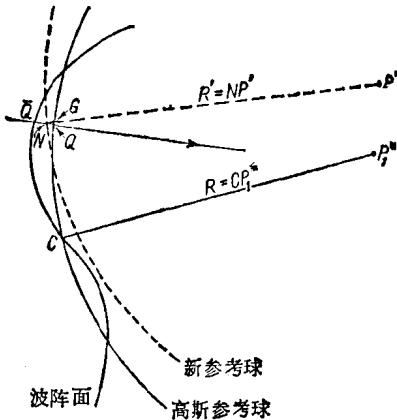


图 9.2 参考球的变化

$$= \Phi + \frac{\lambda}{2\pi} \left[ -\nu\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2} u\rho^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 u \right] + (R - R'), \quad (18)$$

式中已用了(3)式。这里  $u$ ,  $\nu$  和  $\psi$  由(3)和(4)式给出,其中以  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  代替  $x$ ,  $y$ ,  $z$ 。取

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 z', & K &= -\left(\frac{a}{R}\right) x', \\ L &= -\left(\frac{a}{R}\right) y', & M &= z' + R - R', \end{aligned} \quad (19)$$

可将(18)式写成(10)式那样的形式。

### § 9.1.3 强度与波阵面平均形变之间的关系

当象差很小时,可用波象差的均方值表示参考球中心处的强度。设  $\Phi_P$  是以象区内  $P$  点为中心的参考球作参考的波象差。于是,根据(9)和(18)式, $P$ 点的归一化强度可表示为如下形式:

$$\begin{aligned} i(P) &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{ik\Phi_P} \rho d\rho d\theta \right|^2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} [1 + ik\Phi_P + \frac{1}{2} (ik\Phi_P)^2 + \dots] \rho d\rho d\theta \right|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

设  $\overline{\Phi_P^n}$  表示  $\Phi_P$  的  $n$  次幂的平均值,即

$$\overline{\Phi_P^n} = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi_P^n \rho d\rho d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi_P^n \rho d\rho d\theta. \quad (21)$$

如果假定象差小到足以忽略(20)式中  $k\Phi_P$  的三次及更高次幂,则  $P$ 点的强度可写成

$$\begin{aligned} i(P) &\sim \left| 1 + ik\overline{\Phi_P} - \frac{1}{2} k^2 \overline{\Phi_P^2} \right|^2 \\ &= 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 [\overline{\Phi_P^2} - (\overline{\Phi_P})^2]. \end{aligned} \quad (22)$$

右边括号中的量是波阵面的“均方形变” $(\Delta\Phi_p)^2$ , 即

$$(\Delta\Phi_p)^2 = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\Phi_p - \overline{\Phi_p})^2 \rho d\rho d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta} = \overline{\Phi_p^2} - (\overline{\Phi_p})^2, \quad (23)$$

因此 (22) 式可写成

$$i(P) \sim 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\Delta\Phi_p)^2. \quad (24)$$

这个公式的意思是, 当象差很小时, 焦区内参考球中心处的归一化强度与象差的性质无关, 并且它小于理想值 1, 其差值正比于波阵面的均方形变。

## §9.2 象差函数的展开

### §9.2.1 泽尼克圆多项式

在几何光学基础上讨论象差效应时(第五章), 我们曾将象差函数 $\Phi$ 展开为幂级数。在现在这种处理中, 必须在单位圆上作积分, 因此更适宜于用在单位圆内部相互正交的多项式完备集来展开 $\Phi$ <sup>1)</sup>。可以构成许多个具有这种性质的多项式的集; 不过, 由泽尼克<sup>2)</sup>引入的这样一个集具有某些简单的不变性。在附录 7 中将表明这些泽尼克圆多项式可以用什么方法导出, 并且讨论它们的一些特性; 这里仅概述本章所需的公式。

泽尼克圆多项式是两个实变量  $X, Y$  的多项式  $V_n^l(X, Y)$ , 用极坐标 ( $X = \rho \sin \theta, Y = \rho \cos \theta$ ) 表示时, 它的形式是

$$V_n^l(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta) = R_n^l(\rho) e^{il\theta}, \quad (1)$$

式中,  $l \geq 0$  和  $n \geq 0$  均为整数,  $n \geq |l|$ , 并且  $n - |l|$  为偶

1) 术语“完备”的含义是任一性能适当良好的函数均能展开为该集的一系列函数。这一术语更精确的定义, 例如可参看 R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I (1st English Edition, New York, Interscience Publishers, 1953), pp. 51—54.

2) F. Zernike, *Physica*, **1** (1934), 689.