葛兆楨

卅四年十二月黄

依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學教科書

三角學

李蕃編著　段子燮校訂

商務印書館發行

三角學

第一章

角之量法

§1. **三角學** 三角學英文為 Trigonometry 源於希臘文 τρίγανον(三角形) 及 μετρον(量)二字,蓋量三角形之意也;換言之,卽在研究三角形之邊與角之關係耳.但時在今日,其範圍大加擴充,所有關係於角之代數研究亦所屬焉.

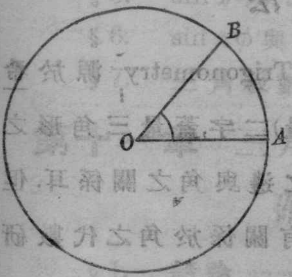
§2. **角之單位** 三角學之研究既在角,故量角不能不有單位.量角之單位有三:卽六十分制 (sexagesimal system), 百分制 (centisimal system) 及弳制 (circular system). 玆分述之如次:

I. 六十分制 六十分制以度 (degree) 爲單位,一度等於圓周三百六十分之一之弧所張之圓心角,一度六十分,一分六十秒.此蓋昔日巴比侖 (Babylon) 之天文學家取一年爲三百六十日之意也.表度,分,秒之符

號爲°,′,″;例如三度十五分十七秒書爲3°15′17″.

II. 百分制 百分制一名爲法國制(French system),分一直角爲一百級 (grade),每級一百分,每分一百秒級,分,秒之符號爲 g,\`,\`\`;例如二十五級十八分五秒書爲$25^g$ 18\`5\`\`.百分制爲用未廣.

III. 弳制 弳制一名弧度法 (circular measure),以弳(radian)爲單位,一弳等於與半徑等長之弧或此弧所函之圓心角.如圖設AB弧之長等於半徑AO,則



$$\angle AOB = 1\text{弳}$$

弳制雖實行未久,然今日之高等數學中,類皆用之.

§3. 各單位之關係 設R爲圓之半徑,π爲圓周率,即3.14159265……則由幾何學圓周$=2\pi R$,復依弳之定義,圓周之長爲2π弳,但圓周又爲三百六十度,故

$$2\pi\text{弳} = 360°$$

57'2957 / 12

即
$$1\text{弳} = \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3.1416} = 57°2957,$$

$$1\text{度} = \frac{\pi\text{弳}}{180} = \frac{3.1416\text{弳}}{180} = 0.01745329\text{弳}$$

由此得下列之關係:

$$\left.\begin{aligned}1\ \text{弳}&=57.2957\ \text{度}\\1\ \text{度}&=0.01745329\ \text{弳}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

讀者尙須明下列之記法：

$360^\circ=2\pi$ 弳，　$60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$ 弳，

$270^\circ=\dfrac{3\pi}{2}$ 弳，　$45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$ 弳，

$180^\circ=\pi$ 弳，　$30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$ 弳，

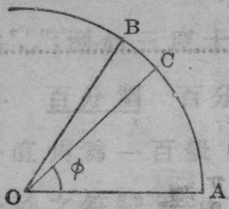
$90^\circ=\dfrac{\pi}{2}$ 弳，　$15^\circ=\dfrac{\pi}{12}$ 弳。

玆更進而求以上三種單位之關係，以便互相推算．設有一角，以度計之為 D，以級計之為 G，以弳計之為 R．因一直角為 90°，則 $\dfrac{D}{90}$ 表此角與直角之比；一直角又為 100^g，則 $\dfrac{G}{100}$ 亦表此角與直角之比；但 $\dfrac{\pi}{2}$ 表直角以弳為單位，故此角與直角之比為 $\dfrac{R}{\frac{\pi}{2}}$，卽 $\dfrac{2R}{\pi}$，

以上三比之値應相等，故得公式

$$\frac{D}{90}=\frac{G}{100}=\frac{2R}{\pi}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

§4. 弧之長　設 ϕ 為一角，以 AO 為半徑作一圓，



作 $\angle AOB$ 使等於一弳. r 表半徑之長, R 表 AC 弧之長; 則因圓心角之大小與其所對之弧成正比,故

$$\frac{\phi}{\angle AOB}=\frac{R}{r}.$$

若 ϕ 以弳爲單位,則 AOB 爲單位角,故

$$\phi=\frac{R}{r}$$

故 $$R=r\phi\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

故任何弧之長等於其半徑乘其所張之角,但此角係以弳爲單位.

習題

1. 試化 $12°$, $56°$, $43°\,15'\,8''$, $22°.9$ 爲弳及級.

2. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{18}$, $2n\pi$, 各爲若干度.

3. 試化弳 2.583, 1.85, 0.4 爲度及級.

4. 設有一圓,其半徑爲4英尺,問其圓心角爲 $80°$ 所對之弧之長爲若干? 答: 5.6英尺.

5. 已知地球與太陽之距離爲 92,897,000 英里,太陽之視直徑爲 $32'\,4''$, 求太陽之直徑. 答: 866,500 英里.

〔註〕 日月星辰,總稱天體 (celestial body). 我人觀察天體時,若於

有二視線與天體相切,且與天體中心共一平面,則此二視線所成之角曰天體之視直徑(apparent diameter).

6. 已知月球公轉地球一次所需之時間爲27.4日,問月球每日之角速度爲若干弳?

答: 約 0.22685 弳.

7. 設有三角 A, B, C. 已知 A 超過於 B 者 $\frac{\pi}{10}$ 弳, B 與 C 之和爲30級, A 與 B 之和爲36度, 問 A, B, C 三角各若干度?

答: 27°, 9°, 18°.

8. 試證等於半徑之弧所張之圓心角爲常數.

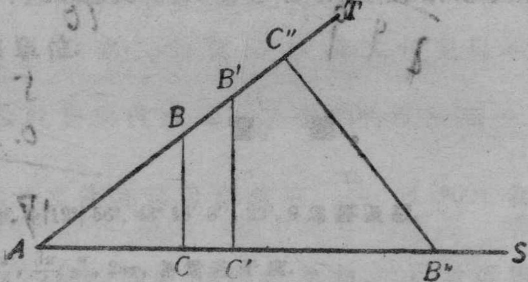
57.2957
0.31416

3.1416
25.1328

第二章

三角函數及其基本性質

§1. 銳角之三角函數 設 SAT 爲一銳角，在 AT 上取任意點 B, B'，作 AS 上之垂線 $BC, B'C'$；再在 AS 上取任意點 B''，作 AT 上之垂線 $B''C''$. 於是三角形 ABC, $AB'C'$, $AB''C''$ 爲相似，蓋 A 角爲公共且各有一角爲直角也. 相似三角形之邊之比爲相等，即



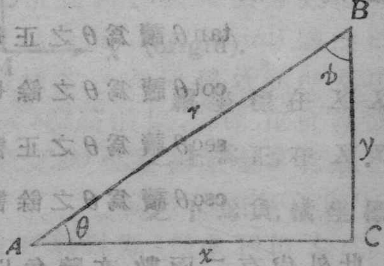
$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\frac{B''C''}{AC''}$$

此三式之分子分母各相易,其比亦等.

由此得知一角之二邊任意延長,其所成直角三角形之邊之比爲不變;反之,若角變動,則各邊之比亦隨之以變,故各邊之比爲角之函數(function)也.因比之數有六,故一角之函數爲數有六.



設 ABC 爲一直角三角形,其三邊之長爲 r, y, x,則我人命

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{y}{r}\\ \cos\theta &= \frac{x}{r}\\ \tan\theta &= \frac{y}{x}\\ \cot\theta &= \frac{x}{y}\\ \sec\theta &= \frac{r}{x}\\ \csc\theta &= \frac{r}{y}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

此六比之值謂之三角函數 (trigonometric functions).

$\sin\theta$ 讀爲 θ 之正弦 (sine),

$\cos\theta$ 讀爲 θ 之餘弦 (cosine),

$\tan\theta$ 讀爲 θ 之正切 (tangent),

$\cot\theta$ 讀爲 θ 之餘切 (cotangent),

$\sec\theta$ 讀爲 θ 之正割 (secant),

$\csc\theta$ 讀爲 θ 之餘割 (cosecant).

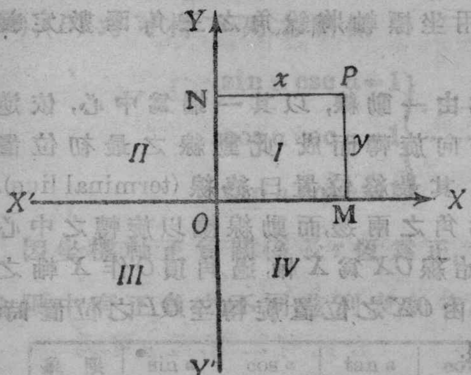
此外尙有二函數，亦隨角以變，卽

$$\text{vers}\,\theta=1-\cos\theta$$

$$\text{covers}\,\theta=1-\sin\theta$$

前者讀爲 θ 之正矢 (versed sine), 後者讀爲 θ 之餘矢 (coversed sine).

§2. 坐標　設 $X'X$ 爲一水平直線, $Y'Y$ 爲在 O 點垂直於 $X'X$ 之直線; 於是在此 $X'X$, $Y'Y$ 平面上任何點之位置可由其與 $X'X$ 及 $Y'Y$ 二垂線之距離及方向以定之. P 點與 $X'X$ 之距離 $PM(=y)$ 曰此點之縱坐標 (ordinate), P 點與 $Y'Y$ 之距離 $PN(=x)$ 曰此點之橫坐標 (abscissa), 合縱橫二坐標曰 P 點之坐標 (coördinates). $X'X$ 及 $Y'Y$ 二正交直線曰坐標軸 (axes

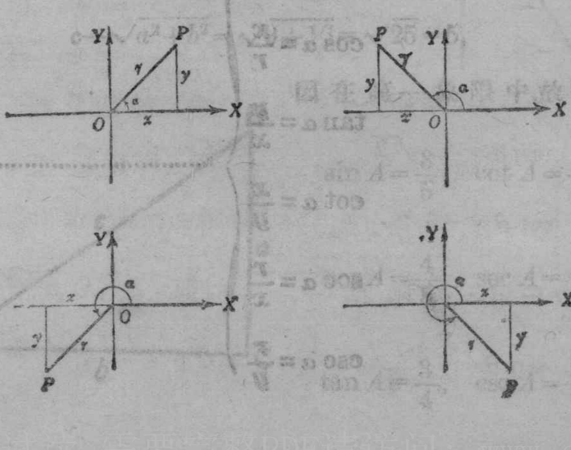


of coördinates), $X'X$ 曰 X 軸, $Y'Y$ 曰 Y 軸. O 點曰原點 (origin).

縱坐標在 $X'X$ 之上爲正, 在 $X'X$ 之下爲負; 橫坐標在 $Y'Y$ 之右爲正, 在 $Y'Y$ 之左爲負.

坐標軸分全平面爲四象限 (quadrants), 圖中 I 爲第一象限, II 爲第二象限, III 爲第三象限, IV 爲第四象限.

§3. 任意角之三角函數 若 θ 大於一直角, 則其



函數之定義,可應用坐標軸將銳角之三角函數定義擴充而得.

角之形成,可視爲由一動線,以其一端爲中心,依逆時針或順時針之方向旋轉而成.此動線之最初位置曰始線 (initial line),其最終位置曰終線 (terminal line).由是始線及終線爲角之兩邊,而動線繞以旋轉之中心點爲角頂.如圖,以始線 OX 爲 X 軸,過角頂 O 作 X 軸之垂線爲 Y 軸.當動線由 OX 之位置旋轉至 OP 之位置時,OP 爲 XOP 角之終線.

角之在何象限,視終線在何象限而定.終線在第一象限,此角在第一象限;終線在第二象限,則此角亦在第二象限;餘類推.

設在終線上取任一點 P,以 y 爲 P 點之縱坐標,x 爲 P 點之橫坐標;並以 a 表 $\angle XOP$. r 表 P 點與原點之距離;則任意角之三角函數定義如下:

$$\left.\begin{aligned}
\sin a &= \frac{y}{r}\\
\cos a &= \frac{x}{r}\\
\tan a &= \frac{y}{x}\\
\cot a &= \frac{x}{y}\\
\sec a &= \frac{r}{x}\\
\csc a &= \frac{r}{y}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

$(A),(B)$ 均可得下列之關係

$$\left.\begin{array}{r}\sin\alpha\csc\alpha=1\\ \cos\alpha\sec\alpha=1\\ \tan\alpha\cot\alpha=1\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

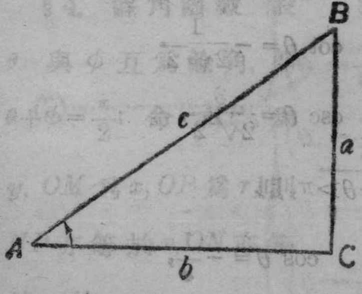
因坐標軸正負關係及 r 恆為正，三角函數之值在四象限中有正負之不同，茲列表如次，讀者須熟記之.

象限	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

例一. 如下圖，設 C 角為直角且已知 A 角之對邊 $a=3$，隣邊 $b=4$，求 A 角之諸函數.

解. $c-\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5,$

因在第一象限中，故取正號.



$$\sin A=\frac{3}{5},\quad \cot A=\frac{4}{3},$$

$$\cos A=\frac{4}{5},\quad \sec A=\frac{5}{4},$$

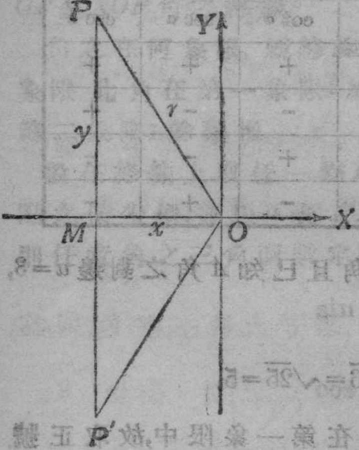
$$\tan A=\frac{3}{4},\quad \csc A=\frac{5}{3}.$$

例二. 已知 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$, 求其餘諸函數.

解. 如圖,因 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$,

則 $$\frac{x}{r}=-\frac{1}{3},$$

而 $$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}=\pm\sqrt{(3)^2-(-1)^2}=\pm\sqrt{9-1}$$
$$=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$$



在此有二解,蓋 y 可為 $+2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$ 也. 由是 θ 角可在第二及第三象限.

i. 設 θ 在第二象限,即 $\pi>\theta>\frac{\pi}{2}$, 則

$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos\theta=-\frac{1}{3},$$

$$\tan\theta=-2\sqrt{2} \qquad \cot\theta=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sec\theta=-3 \qquad \csc\theta=\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

ii. 設 θ 在第三象限,即 $\frac{3\pi}{2}>\theta>\pi$, 則

$$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \qquad \cos\theta=-\frac{1}{3},$$

$$\tan\theta=2\sqrt{2},\qquad \cot\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\sec\theta=-3,\qquad \csc\theta=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

習題

1. 下列諸角在何象限?

i. $130°$.　ii. $286°$.　iii. $412°$.　iv. $540°$

v. $2360°$.　vi. $\frac{12\pi}{5}$.　vii. $\frac{105\pi}{12}$.　viii. $\frac{29\pi}{12}$.

ix. $910°$.　x. $8267°$

2. 設 A, B, C 為一直角三角形之頂點, C 為直角, a, b, c 為三對邊, 求 A 角之諸函數, 已知

i. $a=5,\ b=6$.　ii. $b=3,\ c=4$.

iii. $a=-2,\ c=8$,　iv. $a=p,\ b=q$.

v. $a=m+n,\ b=\sqrt{m^2+n^2}$

3. 求 α 角之諸函數, 已知

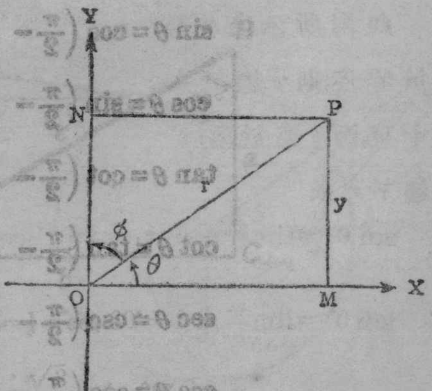
i. $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.　ii. $\tan\alpha=-7$.

iii. $\sec\alpha=-4$.

iv. $\csc\alpha=-\sqrt{3}$.

§4. 餘角函數

設 θ 與 ϕ 互為餘角, 即 $\theta+\phi=\frac{\pi}{2}$; 命 MP 為 y, OM 為 x, OP 為 r, 則 NP 亦等於 x, ON 亦等於 y. 故



$$\left.\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{y}{r} = \cos\phi\\
\cos\theta &= \frac{x}{r} = \sin\phi\\
\tan\theta &= \frac{y}{x} = \cot\phi\\
\cot\theta &= \frac{x}{y} = \tan\phi\\
\sec\theta &= \frac{r}{x} = \csc\phi\\
\csc\theta &= \frac{r}{y} = \sec\phi
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

餘弦，餘切，餘割與正弦，正切，正割互爲餘函數 (co-function)，由是得一定理如次：

定理 一銳角之函數等於其餘角之餘函數.

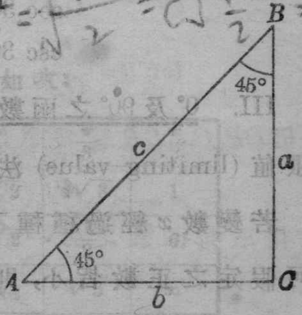
因 $\theta+\phi=\frac{\pi}{2}$，即 $\phi=\frac{\pi}{2}-\theta$，代入 (2) 式，得公式：

$$\left.\begin{aligned}
\sin\theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
\cos\theta &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
\tan\theta &= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
\cot\theta &= \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
\sec\theta &= \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
\csc\theta &= \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

§5. 特別角函數

I. 45°之函數　因 $\angle CAB=\angle ABC=45°$, 故 $BC=AC$

因 $a^2+b^2=c^2$, 卽 $2a^2=c^2$.　$a=\sqrt{\frac{c^2}{2}}=c\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$



故　$a=b=\frac{c}{2}\sqrt{2}$.

由是得

$$\sin 45°=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}=\cos 45°,$$

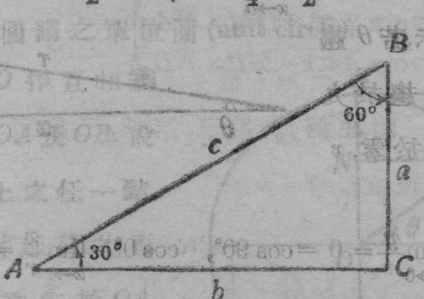
$$\tan 45°=1=\cot 45°,$$

$$\sec 45°=\sqrt{2}=\csc 45°.$$

II. 30°及60°之函數

設　$\angle ABC=60°$, $\angle CAB=30°$,

則　$a=\dfrac{c}{2}$, $b=\sqrt{c^2-\dfrac{c^2}{4}}=\dfrac{c}{2}\sqrt{3}$.



由是　$\sin 30°=\frac{1}{2}=\cos 60°$

$$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \cot 60^\circ$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} = \csc 60^\circ$$

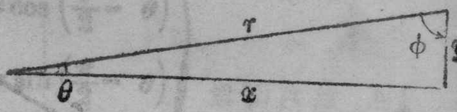
$$\csc 30^\circ = 2 = \sec 60^\circ$$

III. 0°及90°之函數　0°及90°之三角函數可用求極限值 (limiting value) 法求之。

若變數 x 經過種種不同諸值而與常數 a 之差,比任何假定之正數皆小,則謂 a 爲變數 x 之極限 (limit) 或極限值.此可以 $\lim x \to a$ 或 $\lim x = a$ 之記號記之.

若函數 $f(x)$ 之自變數 x 經過諸值而以 a 爲其極限時,卽 $\lim x \to a$,而同時函數 $f(x)$ 亦經過諸值以 A 爲極限,卽 $\lim f(x) = A$ 則以符號 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 記之.

如圖所示,若 θ 趨於零度,則 ϕ 趨於九十度,而 y 趨於零, x 趨於 r, 故



$$\sin 0^\circ = \lim_{y \to 0} \frac{y}{r} = 0 = \cos 90^\circ, \quad \cos 0^\circ = \lim_{x \to r} \frac{x}{r} = 1 = \sin 90^\circ,$$

$$\tan 0^\circ = \lim_{y \to 0} \frac{y}{x} = 0 = \cot 90^\circ, \quad \cot 0^\circ = \lim_{y \to 0} \frac{x}{y} = \infty = \tan 90^\circ,$$

$$\sec 0^\circ = \lim_{x \to r} \frac{r}{x} = 1 = \csc 90^\circ, \quad \csc 0^\circ = \lim_{y \to 0} \frac{r}{y} = \infty = \sec 90^\circ.$$