

经全国中小学教材审定委员会

2004年初审通过

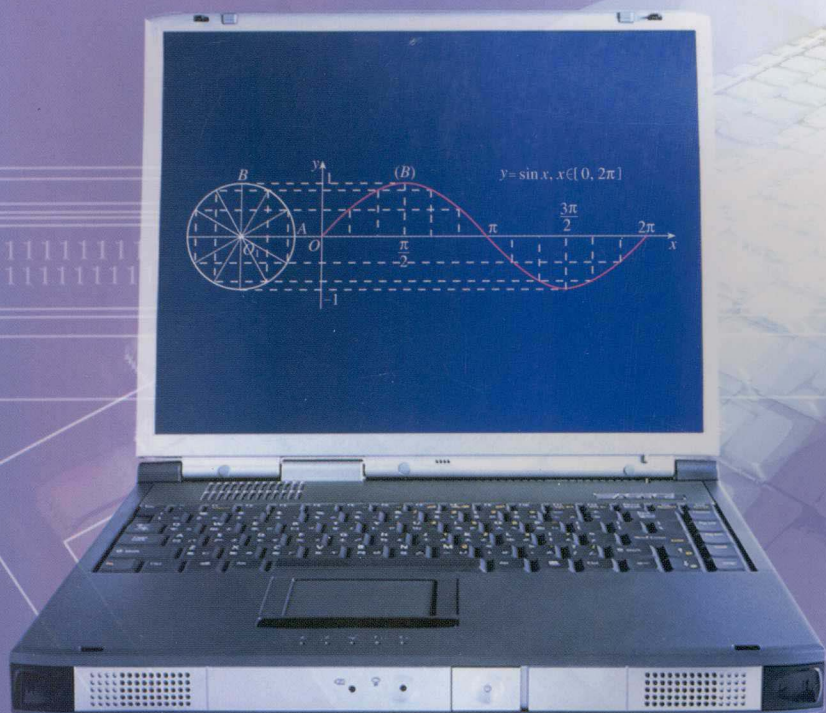
普通高中课程标准实验教科书

数学

4

必修

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数学 ④

必修

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心

本册主编：章建跃
主要编者：章建跃 任子朝 刘长明 孙建忠
责任编辑：章建跃 刘长明
美术编辑：王俊宏 王 艾
封面设计：林荣辉

普通高中课程标准实验教科书

必修

数学

④

人民教育出版社 课程教材研究所

中学数学课程教材研究开发中心

ISBN 7-107-19230-1

定价：3.00元

http://www.pep.com.cn

北京 100088

010-58581166

010-58581167

010-58581168

010-58581169

010-58581170

010-58581171

010-58581172

010-58581173

010-58581174

010-58581175

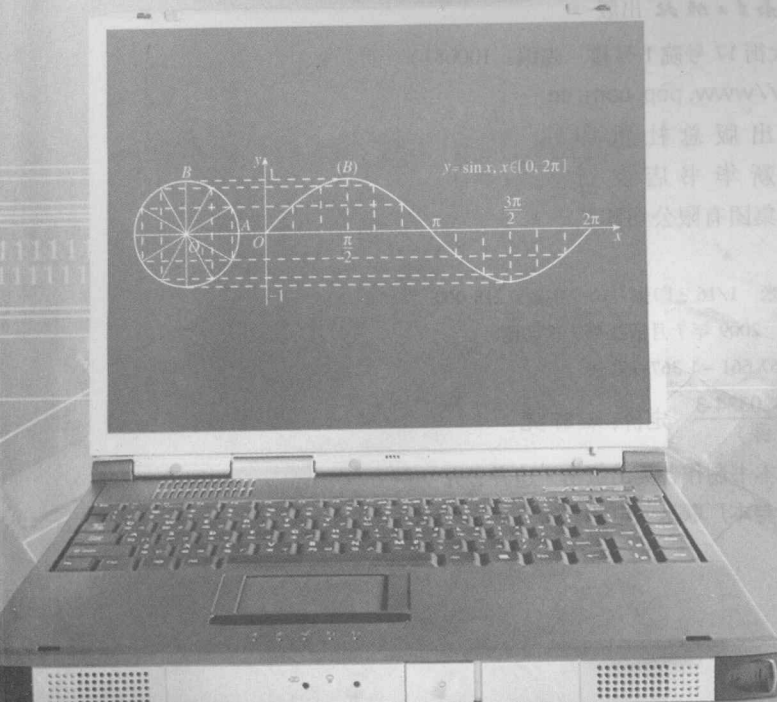
010-58581176

010-58581177

010-58581178

010-58581179

010-58581180



人民教育出版社

A 版

普通高中课程标准实验教科书

④ 学 楼

主编 祖春梅 林尧舜 孙群 孙群 孙群 孙群
心中式开发奈福林尧舜学楼楼中

普通高中课程标准实验教科书

数学 4

必修

A 版

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心

*

人民教育出版社 出版

(北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编: 100081)

网址: <http://www.pep.com.cn>

浙江省出版总社重印

浙江省新华书店发行

浙江印刷集团有限公司印装

*

开本: 890 毫米 × 1 240 毫米 1/16 印张: 10 字数: 218 000

2007 年 2 月第 2 版 2009 年 7 月浙江第 7 次印刷

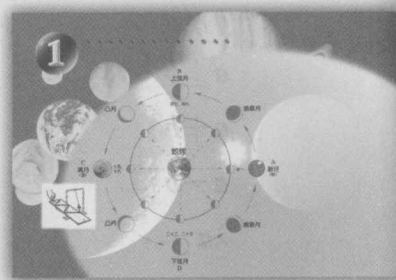
印数: 1 067 661 - 1 367 660 册

ISBN 978-7-107-20334-3 定价: 8.87 元
G · 13384 (课)

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究
如发现印、装质量问题,请与本厂联系。电话: 0571 - 85155604

目 录

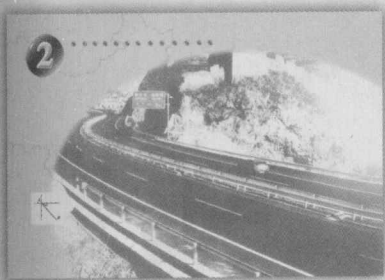
第一章 三角函数	1
1.1 任意角和弧度制	2
1.2 任意角的三角函数	11
阅读与思考 三角学与天文学	17
1.3 三角函数的诱导公式	23
1.4 三角函数的图象与性质	30
探究与发现 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及	
函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期	36
探究与发现 利用单位圆中的三角函数线研究	
正弦函数、余弦函数的性质	41
信息技术应用 利用正切线画函数	
$y=\tan x, x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象	48
1.5 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象	49
阅读与思考 振幅、周期、频率、相位	56
1.6 三角函数模型的简单应用	60



小结	67
复习参考题	69

第二章 平面向量 73

2.1 平面向量的实际背景及基本概念	74
阅读与思考 向量及向量符号的由来	78
2.2 平面向量的线性运算	80
2.3 平面向量的基本定理及坐标表示	93
2.4 平面向量的数量积	103
2.5 平面向量应用举例	109
阅读与思考 向量的运算(运算律)与图形 性质	114
小结	116
复习参考题	118



第三章 三角恒等变换 123

3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式	124
信息技术应用 利用信息技术制作 三角函数表	136
3.2 简单的三角恒等变换	139
小结	145
复习参考题	146



第一章

三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.2 任意角的三角函数

1.3 三角函数的诱导公式

1.4 三角函数的图象与性质

1.5 函数 $y=A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

1.6 三角函数模型的简单应用

蛾眉月

初一

A
新月
(朔)

蛾眉月

现实世界中的许多运动、变化都有着循环往复、周而复始的现象，这种变化规律称为周期性。例如：地球自转引起的昼夜交替变化和公转引起的四季交替变化；月亮圆缺变化的周期性，即朔—上弦—望—下弦—朔；潮汐变化的周期性，即海水在月球和太阳引力作用下发生的周期性涨落现象；物体做匀速圆周运动时位置变化的周期性；做简谐运动的物体的位移变化的周期性；交变电流变化的周期性；等等。如何用数学的方法来刻画这种变化规律呢？

我们知道，函数是刻画客观世界变化规律的数学模型。在数学1中，我们学习了指数函数、对数函数等，知道这些函数可以用来刻画现实问题中某些类型的变化规律。那么，在数学中又如何刻画客观世界中的周期性变化规律呢？本章要学习的三角函数就是刻画这种变化规律的数学模型。

三角函数到底是一种怎样的函数？它具有哪些特有的性质？在解决具有周期性变化规律的问题中到底能发挥哪些作用？下面我们就来研究这些问题。

1.1

任意角和弧度制

1.1.1 任意角



你的手表慢了5分钟，你是怎样将它校准的？假如你的手表快了1.25小时，你应当如何将它校准？当时间校准后，分针旋转了多少度？

我们知道，角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形。如图 1.1-1，一条射线的端点是 O ，它从起始位置 OA 按逆时针方向旋转到终止位置 OB ，形成一个角 α ，射线 OA 、 OB 分别是角 α 的始边和终边。

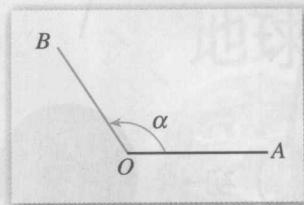


图 1.1-1

过去我们研究过 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围的角，但现实中还有其他角。例如，体操中有“转体 720° ”（即“转体 2 周”），“转体 $1\ 080^\circ$ ”（即“转体 3 周”）这样的动作名称，而旋转的方向也有顺时针与逆时针的不同；又如，图 1.1-2 是两个齿轮旋转的示意图，被动轮随着主动轮的旋转而旋转，而且被动轮与主动轮有相反的旋转方向。这样， OA 绕 O 旋转所成的角与 $O'B$ 绕 O' 旋转所成的角就会有不同的方向。因此，要准确地描述这些现象，不仅要知道角形成的结果，而且要知道角形成的过程，即必须既要知道旋转量，又要知道旋转方向。这就需要对角的概念进行推广。

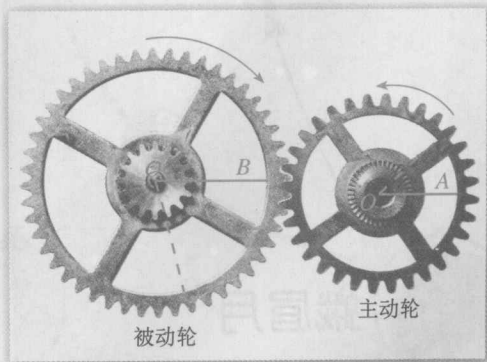


图 1.1-2

我们规定，按逆时针方向旋转形成的角叫做正角 (positive angle)，按顺时针方向旋转形成的角叫做负角 (negative angle)。如果一条射线没有作任何旋转，我们称它

形成了一个零角 (zero angle). 这样, 零角的始边与终边重合. 如果 α 是零角, 那么 $\alpha=0^\circ$.

图 1.1-3(1)中的角是一个正角, 它等于 750° ; 图 1.1-3(2)中, 正角 $\alpha=210^\circ$, 负角 $\beta=-150^\circ$, $\gamma=-660^\circ$; 正常情况下, 如果以零时为起始位置, 那么钟表的时针或分针在旋转时所形成的角总是负角.

① 为了简单起见, 在不引起混淆的前提下, “角 α ” 或 “ $\angle\alpha$ ” 可以简记成 “ α ”.

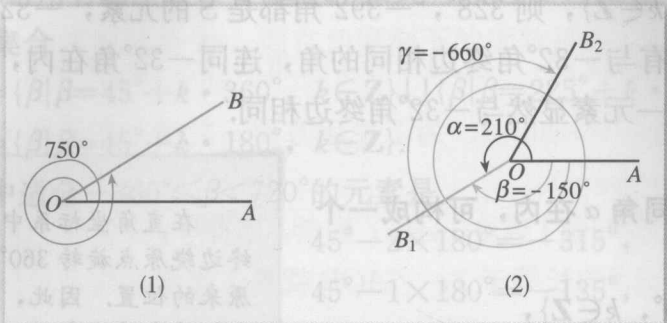


图 1.1-3

这样, 我们就把角的概念推广到了任意角 (any angle), 包括正角、负角和零角.

今后我们常在直角坐标系内讨论角. 为了讨论问题的方便, 我们使角的顶点与原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 那么, 角的终边在第几象限, 我们就说这个角是第几象限角 (quadrant angle). 例如, 图 1.1-4 中的 30° 角、 -120° 角分别是第一象限角和第三象限角. 如果角的终边在坐标轴上, 就认为这个角不属于任何一个象限.



你能说说在直角坐标系内讨论角的好处吗?

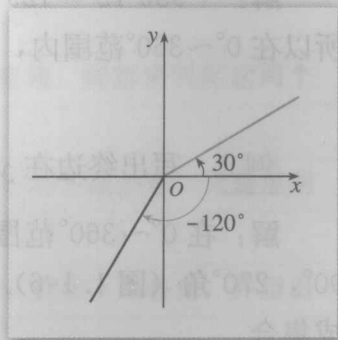


图 1.1-4

探究

将角按照上述方法放在直角坐标系中后, 给定一个角, 就有唯一的一条终边与之对应. 反之, 对于直角坐标系内任意一条射线 OB (如图 1.1-5), 以它为终边的角是否唯一? 如果不唯一, 那么终边相同的角有什么关系?

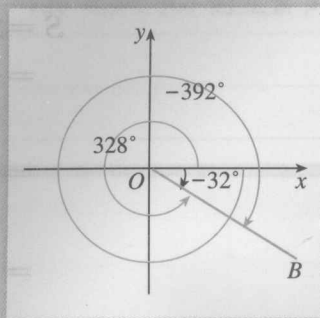


图 1.1-5

不难发现,在图 1.1-5 中,如果 -32° 的终边是 OB ,那么 $328^\circ, -392^\circ, \dots$ 角的终边都是 OB ,并且与 -32° 角终边相同的这些角都可以表示成 -32° 的角与 k 个 ($k \in \mathbf{Z}$) 周角的和,如

$$328^\circ = -32^\circ + 360^\circ \quad (\text{这里 } k = \underline{\quad}),$$

$$-392^\circ = -32^\circ - 360^\circ \quad (\text{这里 } k = \underline{\quad}).$$

设 $S = \{\beta | \beta = -32^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $328^\circ, -392^\circ$ 角都是 S 的元素, -32° 角也是 S 的元素 (此时 $k = \underline{\quad}$). 因此,所有与 -32° 角终边相同的角,连同 -32° 角在内,都是集合 S 的元素;反过来,集合 S 的任一元素显然与 -32° 角终边相同.

一般地,我们有:

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合

$$S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

在直角坐标系中,角的终边绕原点旋转 360° 后回到原来的位置. 因此,在直角坐标系中讨论角可以很好地表现角的“周而复始”的变化规律.

例 1 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内,找出与 $-950^\circ 12'$ 角终边相

同的角,并判定它是第几象限角.

$$\text{解: } -950^\circ 12' = 129^\circ 48' - 3 \times 360^\circ,$$

所以在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内,与 $-950^\circ 12'$ 角终边相同的角是 $129^\circ 48'$,它是第二象限角.

例 2 写出终边在 y 轴上的角的集合.

解: 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内,终边在 y 轴上的角有两个,即 $90^\circ, 270^\circ$ 角 (图 1.1-6). 因此,所有与 90° 角终边相同的角构成集合

$$S_1 = \{\beta | \beta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

而所有与 270° 角终边相同的角构成集合

$$S_2 = \{\beta | \beta = 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

于是,终边在 y 轴上的角的集合

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$= \{\beta | \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$\cup \{\beta | \beta = 90^\circ + 180^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{\beta | \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$\cup \{\beta | \beta = 90^\circ + (2k+1)180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{\beta | \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}\}.$$

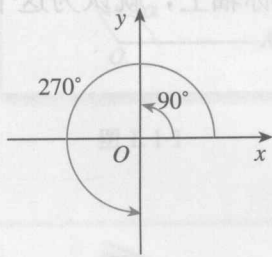


图 1.1-6

① $0^\circ \sim 360^\circ$ 是指 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

例 3 写出终边在直线 $y=x$ 上的角的集合 S , 并把 S

中适合不等式 $-360^\circ \leq \beta < 720^\circ$ 的元素 β 写出来.

解: 如图 1.1-7, 在直角坐标系中画出直线 $y=x$, 可以发现它与 x 轴的夹角是 45° , 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 终边在直线 $y=x$ 上的角有两个: $45^\circ, 225^\circ$. 因此, 终边在直线 $y=x$ 上的角的集合

$$S = \{\beta | \beta = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\beta | \beta = 225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\} = \{\beta | \beta = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

S 中适合 $-360^\circ \leq \beta < 720^\circ$ 的元素是

$$45^\circ - 2 \times 180^\circ = -315^\circ,$$

$$45^\circ - 1 \times 180^\circ = -135^\circ,$$

$$45^\circ + 0 \times 180^\circ = 45^\circ,$$

$$45^\circ + 1 \times 180^\circ = 225^\circ,$$

$$45^\circ + 2 \times 180^\circ = 405^\circ,$$

$$45^\circ + 3 \times 180^\circ = 585^\circ.$$

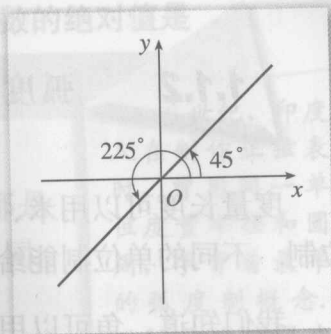


图 1.1-7

练习

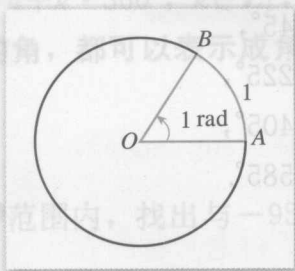
- (口答) 锐角是第几象限角? 第一象限角一定是锐角吗? 再分别就直角、钝角来回答这两个问题.
- (口答) 今天是星期三, 那么 $7k (k \in \mathbf{Z})$ 天后的一天是星期几? $7k (k \in \mathbf{Z})$ 天前的一天是星期几? 100 天后的一天是星期几?
- 已知角的顶点与直角坐标系的原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 作出下列各角, 并指出它们是第几象限角:
 - 420° ;
 - -75° ;
 - 855° ;
 - -510° .
- 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 找出与下列各角终边相同的角, 并指出它们是第几象限角:
 - $-54^\circ 18'$;
 - $395^\circ 8'$;
 - $-1\ 190^\circ 30'$.
- 写出与下列各角终边相同的角的集合, 并把集合中适合不等式 $-720^\circ \leq \beta < 360^\circ$ 的元素 β 写出来:
 - $1\ 303^\circ 18'$;
 - -225° .

1.1.2 弧度制

度量长度可以用米、英尺、码等不同的单位制，度量重量可以用千克、磅等不同的单位制，不同的单位制能给解决问题带来方便，角的度量是否也能用不同的单位制呢？

我们知道，角可以用度为单位进行度量，1度的角等于周角的 $\frac{1}{360}$ 。这种用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制 (degree measure)。为了使用方便，数学上还采用另一种度量角的单位制——弧度制 (radian measure)：

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度(radian)的角，用符号 rad 表示，读作弧度。如图 1.1-8，圆 O 的半径为 1， \widehat{AB} 的长等于 1， $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角。



可以证明，一定大小的圆心角 α 所对应的弧长与半径的比值是唯一确定的，与半径大小无关。

图 1.1-8

探究

如图 1.1-9，半径为 r 的圆的圆心与原点重合，角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，交圆于点 A ，终边与圆交于点 B 。请在下列表格中填空，并思考：如果一个半径为 r 的圆的圆心角 α 所对的弧长是 l ，那么 α 的弧度数是多少？既然角度制、弧度制都是角的度量制，那么它们之间如何换算？

表 1.1-1

\widehat{AB} 的长	OB 旋转的方向	$\angle AOB$ 的弧度数	$\angle AOB$ 的度数
πr	逆时针方向		
$2\pi r$	逆时针方向		
r		1	
$2r$		-2	
		$-\pi$	
		0	
			180°
			360°

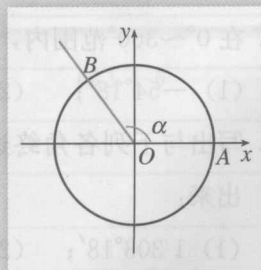


图 1.1-9

一般地，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0。

如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l , 那么, 角 α 的弧度数的绝对值是

$$|\alpha| = \frac{l}{r}.$$

这里, α 的正负由角 α 的终边的旋转方向决定.

用角度制和弧度制来度量零角, 单位不同, 但量数相同 (都是 0); 用角度制和弧度制度量任一非零角, 单位不同, 量数也不同. 因为周角的弧度数是 2π , 而在角度制下的度数是 360, 所以

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad},$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad},$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}.$$

反过来有:

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

一般地, 我们只需根据

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ$$

就可以进行弧度与角度的换算了.

例 1 按照下列要求, 把 $67^\circ 30'$ 化成弧度:

- (1) 精确值; (2) 精确到 0.001 的近似值.

解: (1) 因为 $67^\circ 30' = \left(\frac{135}{2}\right)^\circ$, 所以

$$67^\circ 30' = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \times \frac{135}{2} = \frac{3}{8} \pi \text{ rad}.$$

- (2) 利用计算器有

MODE MODE 2

67 . , . , 30 . , . , SHIFT DRG 1 = 1.178097245.

因此, $67^\circ 30' \approx 1.178 \text{ rad}$.

例 2 将 3.14 rad 换算成角度 (用度数表示, 精确到 0.001).

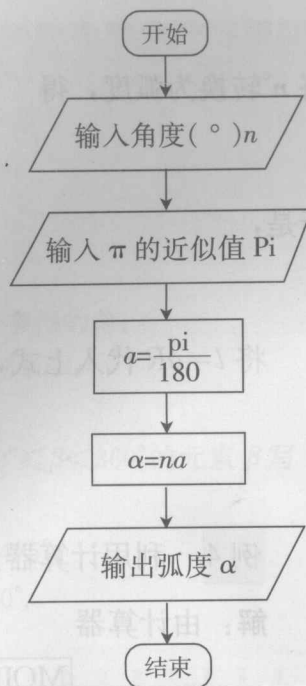
解: 利用计算器

MODE MODE 1

3.14 SHIFT DRG 2 = 179.9087477.

6 世纪, 印度人在制作正弦表时, 曾用同一单位度量半径和圆周, 孕育着最早的弧度制概念. 欧拉是明确提出弧度制思想的数学家. 1748 年, 在他的一部划时代著作《无穷小分析概论》中, 提出把圆的半径作为弧长的度量单位, 使一个圆周角等于 2π 弧度, 1 弧度等于周角的 $\frac{1}{2\pi}$. 这一思想将线段与弧的度量统一起来, 大大简化了三角公式及计算.

利用下列算法可以把角度换算为弧度, 你能在计算机上实现一下吗?



因此, $3.14 \text{ rad} \approx 179.909^\circ$.
今后用弧度制表示角时,“弧度”二字或“rad”通常略去不写,而只写该角所对

应的弧度数.例如,角 $\alpha=2$ 就表示 α 是 2 rad 的角, $\sin \frac{\pi}{3}$ 就表示 $\frac{\pi}{3}$ rad 的角的正弦,即 $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

填写下列特殊角的度数与弧度数的对应表:

度	0°	30°	45°			120°	135°	150°			360°
弧度				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$				π	$\frac{3\pi}{2}$	

角的概念推广后,在弧度制下,角的集合与实数集 \mathbf{R} 之间建立起一一对应的关系:每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应;反过来,每一个实数也都有唯一的一个角(即弧度数等于这个实数的角)与它对应(图 1.1-10).

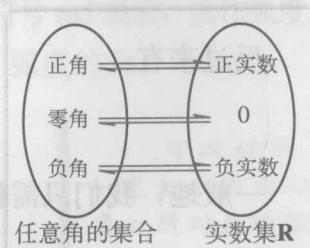


图 1.1-10

例 3 利用弧度制证明下列关于扇形的公式:

$$(1) l = \alpha R; \quad (2) S = \frac{1}{2} \alpha R^2; \quad (3) S = \frac{1}{2} lR.$$

其中 R 是半径, l 是弧长, $\alpha (0 < \alpha < 2\pi)$ 为圆心角, S 是扇形的面积.

证明: 由公式 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 立即可得

$$l = \alpha R.$$

下面证明 (2) (3). 由于半径为 R , 圆心角为 n° 的扇形的弧长公式和面积公式分别是:

$$l = \frac{n\pi R}{180}, \quad S = \frac{n\pi R^2}{360},$$

将 n° 转换为弧度, 得

$$\alpha = \frac{n\pi}{180},$$

于是,

$$S = \frac{1}{2} \alpha R^2.$$

将 $l = \alpha R$ 代入上式, 即得

$$S = \frac{1}{2} lR.$$

由例 3 看出, 采用弧度制时, 弧长公式和扇形面积公式简单了. 这正是引入弧度制的原因之一.

例 4 利用计算器比较 $\sin 1.5$ 和 $\sin 85^\circ$ 的大小.

解: 由计算器

MODE MODE 2 正数, 负角的弧度数

$$\sin 1.5 = 0.997494986.$$

$$\text{MODE MODE } 1$$

$$\sin 85 \text{ 。 , , } = 0.996194698.$$

所以

$$\sin 1.5 > \sin 85^\circ.$$

练习

1. 把下列角度化成弧度:

(1) $22^\circ 30'$; (2) -210° ; (3) $1\ 200^\circ$.

2. 把下列弧度化成度:

(1) $\frac{\pi}{12}$; (2) $-\frac{4\pi}{3}$; (3) $\frac{3\pi}{10}$.

3. 用弧度表示:

(1) 终边在 x 轴上的角的集合;

(2) 终边在 y 轴上的角的集合.

4. 利用计算器比较下列各对值的大小 (精确到 0.001):

(1) $\cos 0.75^\circ$ 和 $\cos 0.75$; (2) $\tan 1.2^\circ$ 和 $\tan 1.2$.

5. 分别用角度制、弧度制下的弧长公式, 计算半径为 1 m 的圆中, 60° 的圆心角所对的弧的长度 (可用计算器).

6. 已知半径为 120 mm 的圆上, 有一条弧的长是 144 mm, 求该弧所对的圆心角的弧度数.

习题 1.1

A 组

1. 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 找出与下列各角终边相同的角, 并指出它们是哪个象限的角:

(1) -265° ; (2) $-1\ 000^\circ$; (3) $-843^\circ 10'$; (4) $3\ 900^\circ$.

2. 写出终边在 x 轴上的角的集合.

3. 写出与下列各角终边相同的角的集合, 并把集合中适合不等式 $-360^\circ \leq \beta < 360^\circ$ 的元素 β 写出来:

(1) 60° ; (2) -75° ; (3) $-824^\circ 30'$; (4) 475° ;
 (5) 90° ; (6) 270° ; (7) 180° ; (8) 0° .

4. 分别用角度和弧度写出第一、二、三、四象限角的集合.

5. 选择题:

- (1) 已知 α 是锐角, 那么 2α 是 ().
- (A) 第一象限角 (B) 第二象限角
(C) 小于 180° 的正角 (D) 第一或第二象限角

- (2) 已知 α 是第一象限角, 那么 $\frac{\alpha}{2}$ 是 ().

- (A) 第一象限角 (B) 第二象限角
(C) 第一或第二象限角 (D) 第一或第三象限角

6. 一条弦的长等于半径, 这条弦所对的圆心角等于 1 弧度吗? 为什么?

7. 把下列各角度化成弧度:

- (1) 36° ; (2) -150° ; (3) $1\ 095^\circ$; (4) $1\ 440^\circ$.

8. 把下列各弧度化成度:

- (1) $-\frac{7}{6}\pi$; (2) $-\frac{10}{3}\pi$; (3) 1.4; (4) $\frac{2}{3}$.

9. 要在半径 $OA=100$ cm 的圆形金属板上截取一块扇形板, 使其弧 AB 的长为 112 cm, 求圆心角 $\angle AOB$ 是多少度 (可用计算器, 精确到 1°).

10. 已知弧长 50 cm 的弧所对圆心角为 200° , 求这条弧所在的圆的半径 (可用计算器, 精确到 1 cm).

B 组

1. 每人准备一把扇子, 然后与本小组其他同学的对比, 从中选出一把展开后看上去形状较为美观的扇子, 并用计算器算出它的面积 S_1 .

(1) 假设这把扇子是从一个圆面中剪下的, 而剩余部分的面积为 S_2 , 求 S_1 与 S_2 的比值;

(2) 要使 S_1 与 S_2 的比值为 0.618, 则扇子的圆心角应为几度 (精确到 10°)?

2. (1) 时间经过 4 h (时), 时针、分针各转了多少度? 各等于多少弧度?

(2) 有人说, 钟的时针和分针一天内会重合 24 次. 你认为这种说法是否正确? 请说明理由.

(提示: 从午夜零时算起, 假设分针走了 t min 会与时针重合, 一天内分针和时针会重合 n 次, 建立 t 关于 n 的函数关系式, 并画出其图象, 然后求出每次重合的时间.)

3. 已知相互啮合的两个齿轮, 大轮有 48 齿, 小轮有 20 齿, 当大轮转动一周时, 小轮转动的角是 _____ 度, 即 _____ rad. 如果大轮的转速为 180 r/min (转/分), 小轮的半径为 10.5 cm, 那么小轮周上一点每 1 s 转过的弧长是 _____.

1.2

任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数

思考?

我们已经学过锐角三角函数，知道它们都是以锐角为自变量，以比值为函数值的函数。你能用直角坐标系中角的终边上点的坐标来表示锐角三角函数吗？

如图 1.2-1，设锐角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，那么它的终边在第一象限。在 α 的终边上任取一点 $P(a, b)$ ，它与原点的距离 $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ 。过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M ，则线段 OM 的长度为 a ，线段 MP 的长度为 b 。

根据初中学过的三角函数定义，我们有

$$\sin \alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{b}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{r}, \quad \tan \alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{a}.$$

由相似三角形的知识，对于确定的角 α ，这三个比值不会随点 P 在 α 的终边上的位置的改变而改变，因此我们可以将点 P 取在使线段 OP 的长 $r=1$ 的特殊位置上（如图 1.2-2）。这样就可以得到用直角坐标系内点的坐标表示的锐角三角函数：

$$\sin \alpha = \frac{MP}{OP} = b, \quad \cos \alpha = \frac{OM}{OP} = a, \quad \tan \alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{a}.$$

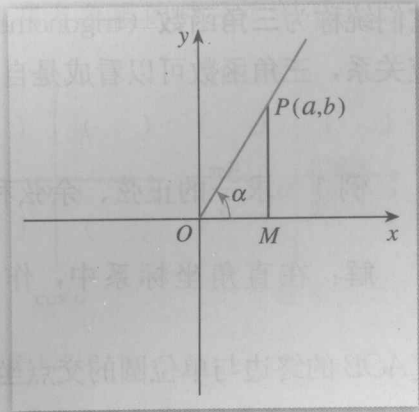


图 1.2-1

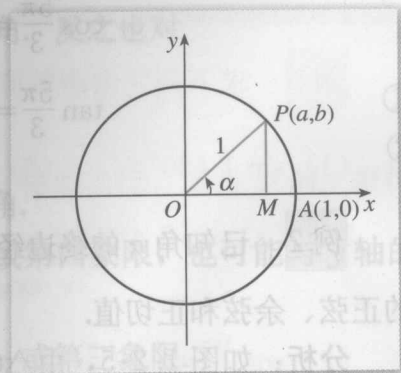


图 1.2-2

在引进弧度制时我们看到，在半径为单位长的圆中，角 α 的弧度数的绝对值等于圆心角 α 所对的弧长（符号由角 α 的终边的旋转方向决定）。在直角坐标系中，我们称以原点 O 为圆心，以单位长度为半径的圆为单位圆（unit circle）。这样，上述 P 点就是 α 的终边与单位圆的交点。锐角三角函数可以用单位圆上点的坐标表示。

同样的，我们可以利用单位圆定义任意角的三角函数。

如图 1.2-3，设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$ ，那么：

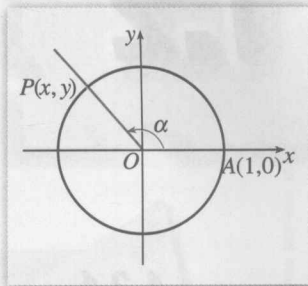


图 1.2-3

(1) y 叫做 α 的正弦 (sine)，记作 $\sin \alpha$ ，即

$$\sin \alpha = y;$$

(2) x 叫做 α 的余弦 (cosine)，记作 $\cos \alpha$ ，即

$$\cos \alpha = x;$$

(3) $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切 (tangent)，记作 $\tan \alpha$ ，即

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0).$$

可以看出，当 $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时， α 的终边在 y 轴上，这时点 P 的横坐标 x 等于 0，所以 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ 无意义。除此之外，对于确定的角 α ，上述三个值都是唯一确定的。所以，正弦、余弦、正切都是以角为自变量，以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数，我们将它们统称为三角函数 (trigonometric function)。由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，三角函数可以看成是自变量为实数的函数。

例 1 求 $\frac{5\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值。

解：在直角坐标系中，作 $\angle AOB = \frac{5\pi}{3}$ (如图 1.2-4)。易知

$\angle AOB$ 的终边与单位圆的交点坐标为 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 。所以，

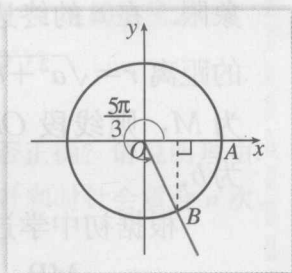


图 1.2-4

$$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

例 2 已知角 α 的终边经过点 $P_0(-3, -4)$ ，求角 α 的正弦、余弦和正切值。

分析：如图 1.2-5，由 $\triangle OMP \sim \triangle OM_0P_0$ ，可求出相应的三角函数值。

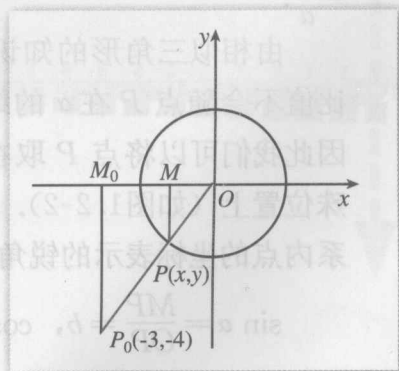


图 1.2-5