

中国科学院大气物理研究所集刊

第 5 号

# 大气遥感探测问题的研究

(一)

科学出版社

P407  
8

中国科学院大气物理研究所集刊

第 5 号

# 大气遥感探测问题的研究

(一)

科学出版社

1977

## 内 容 简 介

本集主要是中国科学院大气物理研究所 1973 年以来,关于大气遥感探测问题研究的部分工作结果,共包括六篇论文。第一篇介绍了一个解遥测方程的理论方法,第二篇给出了空间微波探测大气温度分布的数值试验结果,第三篇研究了利用光闪烁效应探测大气风的原理并得到了数值试验结果,第四篇对空间遥测地面温度的大气红外窗口衰减进行了实验研究,第五篇研究激光探测烟团扩散系数的原理并介绍了初步实验结果,第六篇探索了激光探测大气湍流结构函数的原理与方法。

本集可供空间探测、大气污染、大气光学、大气传输、大气探测等方面的气象研究工作者、气象业务工作者和有关高等院校大气探测等方面教学工作者参考。

中国科学院大气物理研究所集刊

第 5 号

大气遥感探测问题的研究

(一)

\*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

北京新华书店发行所发行 各地新华书店经售

\*

1977 年 11 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

1977 年 11 月第一次印刷 印张: 5 3/4

印数: 0001—2,660 字数: 127,000

统一书号: 13031·632

本社书号: 919·13—15

定价: 0.62 元

## 前 言

大气遥感探测是气象观测中新的探测方法。从六十年代以来，它从理论基础到实验方法已逐步形成一个相对独立完整的体系，从而构成大气物理科学中一个新的分支——大气遥感探测学。它的发展对中长期天气过程、中小尺度大气结构与天气系统、以及边界层大气的研究有着很重要的意义。同时，它也为各有关领域和部门对于了解大气状态方面的直接需要提供有力的手段。

从探测理论、实验技术到数据处理等各方面，大气遥感探测和现有气象台站的地面气象观测、无线电探空和火箭探空等直接（感应）探测方法都有本质的区别。遥感探测主要利用大气本身发射出来的各类物理信息（如不同频率的电磁波、声波、重力内波等），或者利用人工（例如激光和微波雷达）和天体（太阳等）发射的信息与作为传输介质的大气的相互作用，从中分析推算出大气要素的空间分布与时间变化。因此，大气物理信息的形成、不同大气状态下的信息特征以及信息在大气介质中的传播等大气物理问题的理论、观测和实验研究就构成了大气遥感探测的理论基础；而如何检测和识别大气信息，如何通过信息处理反演得到大气要素分布并应用于天气预报分析、人工影响天气等方面，就构成了大气遥感探测在资料分析和信息处理等方面一系列特殊的理论和实验技术问题。这类问题的解决不仅对大气探测的发展必不可少，而且对资源卫星空间探测、天文卫星的行星大气探测等都具有重要意义。

追溯历史，大气遥感探测的发展由来已久。在气象仪器发明以前，劳动人民在生产斗争实践中即运用这类遥感探测方法来了解大气并预测天气变化。他们或者用眼睛观察大气变化中发生的各种现象，或者观察生物对大气变化的反应，从而来预测天气变化。我国民间流传有几千年的天气谚语，大部分反映了我国劳动人民运用这种原始的大气遥感探测方法所积累的看天经验。随着气象仪器观测时代的开始，这种原始的大气遥感探测方法就逐步被直接的仪器定量观测所取代。这是气象科学发展史上的一个质的飞跃，它把气象科学引向定量的实验科学的历史阶段。然而，事物的发展是辩证的，是螺旋式上升的。到本世纪中叶以后，这种直接气象观测方法，由于所取资料方式在空间和时间上的局限性，愈来愈不适应气象科学发展的要求，也愈来愈不能满足许多国民经济和国防实际部门对大气实况了解的要求。从五十年代开始，随着卫星空间技术、激光、红外、微波等工业技术的新发展，给气象科学提供了新的实验技术条件，一种新型的大气探测技术——遥感探测遂勃然兴起，迅速发展。当前，它已应用于气象卫星，获得大量海洋和高山等人烟稀少地区的全球性气象资料；它也应用于地面气象探测，如利用微波雷达、声雷达和激光雷达等，逐步取得中小尺度天气系统和大气结构以及边界层大气结构的重要资料。对这些资料的分析研究结果显示大气遥感探测有着广阔的发展前景。这是原始大气遥感探测的一个辩证的螺旋式的发展，是气象观测发展中又一个新的质的飞跃。无疑地，它必将构成气象观测发展史中一个新的历史阶段。

在毛主席革命路线指引下，在无产阶级文化大革命推动下，我所近几年来逐步开展了

大气遥感探测的理论和实验研究。本集只是部分地反映了近两年来我们的一些初步结果。工作还比较粗糙，许多问题还有待于深入。刊印出来的目的是抛砖引玉，借以引起读者对大气遥感探测这个十分重要而又比较年青的新领域的注意，进行讨论和交流。有错误之处，希望读者批评指正。

中国科学院大气物理研究所

# 目 录

一类遥感探测方程解的理论分析.....	周秀骥 黄润恒 吕达仁 (1)
微波探测大气温度分布的一个数值试验 .....	周秀骥 黄润恒 吕达仁 (12)
利用光闪烁效应遥感大气折射率结构常数及风的分布的理论分析.....	..... 黄润恒 吕达仁 周秀骥 包玲明 (25)
8—14 微米红外辐射大气衰减的研究 .....	一室 103 组 (46)
激光遥测烟羽浓度 .....	孙景群 陶丽君 伍少明 (59)
激光探测大气湍流的实验研究 .....	吕达仁 魏 重 张健国 包玲明 (77)

# 一类遥感探测方程解的理论分析

周秀骥 黄润恒 吕达仁

从六十年代开始,由于气象卫星探测的试验成功,以及红外、激光、微波等新技术在气象科学中的广泛应用,气象观测进入了一个新的阶段——大气遥感探测时期。这对气象科学的发展将有重要的促进作用。

大气遥感探测和以往的气象观测有很大区别。它并不直接测量天气预报等所必须的大气基本要素(如温、湿、压、风等),而是测量由人工、天体发射到大气中或大气本身发射的电磁波(可见光、红外、激光、微波等)、声波等波动讯息。通过对这些波动讯息的分析研究,再计算出大气基本要素一维至三维的空间分布。例如,现在已可以通过远离地球 1 千多公里的气象卫星遥感探测大气红外和微波辐射,计算出全球范围内温度的三维空间分布。显然,这种探测技术将为气象科学提供大量的前所未有的观测资料,为我们深入认识和掌握大气运动规律提供基础。同时,这种探测方法也提出了许多大气物理和数学方面新的理论问题,是过去气象观测所没有提出的。遥感探测的反演问题就是其中的一个。

当前,在气象卫星和地面遥感探测中,经常遇到的一类遥感探测反演问题是解下列遥感探测方程:

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} K(\lambda, z)g(z)dz$$

其中,  $f(\lambda)$  是我们能够直接观测到的物理量(如大气红外或微波辐射量,波长为  $\lambda$ )。 $g(z)$  是要求解的大气基本要素的一维空间分布(如大气温度随高度  $z$  的分布)。而  $K(\lambda, z)$  表示波动讯息发射和在大气中传输特性的函数,一般称之为核函数(又称权重函数),为已知函数。所谓遥感探测的反演问题,就是要从观测不同  $\lambda$  的物理讯息  $f(\lambda)$  中计算出大气基本要素  $g(z)$  的空间分布来。显然,这是气象卫星等遥感探测中一个重要而又基本的问题。

遥感探测方程是第一类弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程。随着空间遥感探测技术的迅速发展,这类方程的研究引起极大重视,已进行了不少工作<sup>[1]</sup>。我们在现有工作基础上,从实际应用角度,进一步分析了遥感探测方程解的物理本质、观测误差与反演空间分辨率以及反演解的最优化规划等问题。将本文提出的方法应用于气象卫星微波测温以及光闪烁法探测大气湍流与风分布的反演,取得较好的结果<sup>[2-3]</sup>。

## 一、解的不稳定性与核函数的空间滤波作用

对遥感探测方程

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} K(\lambda, z)g(z)dz \quad (1.1)$$

来说,首先有一个解的存在和唯一性问题。Лаврентьев<sup>[4]</sup> 对此做过理论上的讨论。实际

上不难看出,方程(1.1)并不是总有唯一解的。例如当核函数为常数时

$$K(\lambda, z) = K_0$$

则有

$$f(\lambda) = K_0 \int_0^{\infty} g(z) dz \quad (1.2)$$

显然,可以选择许多个解  $g(z)$  使式(1.2)满足。从观测  $f(\lambda)$  中无法得到  $g(z)$  的分布。

如果核函数  $K(\lambda, z)$  为 Dirac 函数:

$$K(\lambda, z) = K_0 \delta(z - z_0)$$

代入式(1.1)得解:

$$f(\lambda) = K_0 g(z_0) \quad (1.3)$$

则测定  $f(\lambda)$  即得到稳定的唯一解:  $g(z_0) = \frac{f(\lambda)}{K_0}$

因此,方程(1.1)的解是否存在和唯一以及解的性质关键在于核函数的性质。

除解的存在和唯一性问题以外,方程(1.1)还有另一个重要特性,即反演解的稳定性问题。Тихонов<sup>[5]</sup> Towmey<sup>[6]</sup> 和 Philips<sup>[7]</sup> 等人都指出过此问题。

把方程(1.1)写成算子方程:

$$f(\lambda) = \mathcal{K}_\lambda g(z) \quad (1.4)$$

如果其解存在而且唯一,则必定存在逆算子  $\mathcal{K}_z^{-1}$ , 而解为:

$$g(z) = \mathcal{K}_z^{-1} f(\lambda) \quad (1.5)$$

在实际问题中,观测值  $f(\lambda)$  必具有误差  $\Delta f$ , 则反演结果不是  $g(z)$ , 而是  $g'(z)$ :

$$g'(z) = \mathcal{K}_z^{-1} f(\lambda) + \mathcal{K}_z^{-1} \Delta f \quad (1.6)$$

则反演误差  $\Delta g(z)$  为:

$$\Delta g \equiv g' - g = \mathcal{K}_z^{-1} \Delta f \quad (1.7)$$

逆算子  $\mathcal{K}^{-1}$  完全可能具有这样的性质,当  $\Delta f$  很小时,  $\Delta g$  值可以相当大,这即产生了解的稳定性问题。显然,从以上分析可知,这种稳定性来源于误差  $\Delta f$ , 而决定于核函数  $K(\lambda, z)$  的性质。

下面,我们对核函数的物理本质再作进一步的分析。

将  $K(\lambda, z)$ ,  $g(z)$  在  $(-\infty, 0)$  上解析延拓为:

$$\begin{cases} K(\lambda, -z) = K(\lambda, z) \\ g(-z) = g(z) \end{cases}$$

则  $K(\lambda, z)$ ,  $g(z)$  的傅里叶(Fourier)展开为:

$$K(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega, \lambda) e^{j\omega z} d\omega \quad (1.8)$$

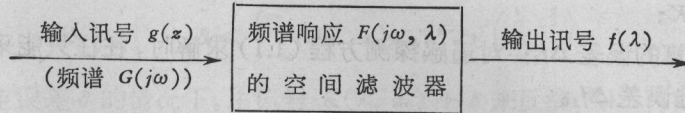
$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{j\omega z} d\omega \quad (1.9)$$

代入方程(1.1),得到:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega, \lambda) G(j\omega) d\omega \quad (1.10)$$

由上式,可以看出方程(1.1)明显的物理意义。 $g(z)$  相当于一个空间频谱为  $G(j\omega)$  的输入讯号,核函数  $K(\lambda, z)$  的作用相当于一个空间频谱响应为  $F(j\omega, \lambda)$  的空间滤波器,

而  $f(\lambda)$  则为该滤波器的输出讯号。



这样,核函数  $K(\lambda, z)$  对输入讯号  $g(z)$  完全起空间滤波作用。实际上,  $G(j\omega)$  表示输入讯号  $g(z)$  在空间尺度为  $(1/\omega)$  上的结构。当通过空间滤波器  $K(\lambda, z)$  以后,空间尺度为  $(1/\omega)$  的结构  $G(j\omega)$  或被放大,或被衰减,完全取决于空间滤波器  $K(\lambda, z)$  的空间频谱响应特性  $F(j\omega, \lambda)$ 。当核函数  $K(\lambda, z)$  为常数时,表示该空间滤波器只能让输入讯号  $g(z)$  中的直流成分通过,任何具有空间分布的讯号  $g(z)$  都完全被该空间滤波器所衰减掉。这样,就根本不可能从观测  $f(\lambda)$  中反映出  $g(z)$  的空间分布来。如果核函数为 Dirac 函数,则其空间频谱响应  $F(j\omega, \lambda)$  为常数。此时,具有任意尺度空间结构的讯号  $g(z)$  都可以无畸变地通过该空间滤波器,而在输出讯号如实地反映出来。一般,核函数  $K(\lambda, z)$  介于常数和 Dirac 函数两个极端之间,而为具有有限宽度通频带  $(-\omega^*, +\omega^*)$  的空间滤波器。在此通频带以外  $F(j\omega, \lambda)$  值已经非常小。如果观测量  $f(\lambda)$  有误差  $\Delta f$  时,代入式 (1.10),可得:

$$f(\lambda) + \Delta f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega, \lambda) G(j\omega) d\omega \quad (1.11)$$

稍加变换,不难求得:

$$f(\lambda) + \Delta f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega^*}^{+\omega^*} F(j\omega, \lambda) G(j\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\omega^*}^{\infty} F(j\omega, \lambda) G(j\omega) d\omega \quad (1.12)$$

令

$$\Delta f^* = \frac{1}{\pi} \int_{\omega^*}^{\infty} F(j\omega, \lambda) G(j\omega) d\omega \quad (1.13)$$

由此可见,即使当  $\omega \geq \omega^*$  时输入讯号成分  $G(j\omega)$  很强,但是由于此时  $F(j\omega, \lambda)$  值足够小,而仍可使  $\Delta f^* \leq \Delta f$ , 这样输出以后,就成为  $f(\lambda)$  中的噪音(即误差)。这种性质实际上就是反演解的不稳定性问题,它和反演  $g(z)$  的空间细致结构,也即空间分辨率问题密切相关,本质上是一个问题。因此,即使在遥测方程 (1.1) 的解存在而且唯一的情况下,由于实际观测中总存在误差  $\Delta f$ , 就不可能反演出  $g(z)$  中尺度为  $\Delta z \leq \frac{1}{\omega^*}$  的空间变化来(除非引进除方程(1.1)以外其他新的讯息)。而且误差  $\Delta f$  愈大,  $g(z)$  的反演空间分辨率也愈差。

上述分析说明,遥感探测方程(1.1)中的核函数起着空间滤波作用。反演解  $g(z)$  的稳定性和空间分辨率完全决定于核函数和遥感探测方程的总误差  $\Delta f$ 。核函数愈接近 Dirac 函数,误差值愈小,则反演解  $g(z)$  的空间分辨率愈高,解也愈稳定。当核函数和误差  $\Delta f$  确定以后,反演解  $g(z)$  的空间分辨率是有限的。妄图盲目地通过增加观测通道个数  $N(f(\lambda_i))$ ,  $i = 1, \dots, N$  来提高空间分辨率,非但是徒劳的,而且会引起反演解的不稳定性。

最后,再对误差  $\Delta f$  作一些分析,它基本上决定于三个因子:

- (1) 观测误差  $\Delta f_i$ : 由于观测仪器测量讯息  $f(\lambda)$  时实际存在的误差;
- (2) 大气模式误差  $\Delta K$ : 核函数  $K(\lambda, z)$  表示大气波动讯息形成和大气中波动传输

的物理规律而采用的模式,对情况变化很大的实际大气来说,这种模式只是一种近似,而必然带有误差  $\Delta K$ ;

(3) 近似计算的误差  $\Delta f_3$ : 对遥感探测方程 (1.1) 求解时,往往只能采用近似计算方法,这就必然引进误差  $\Delta f_3$ 。

因此,在实际应用中,方程(1.1)为:

$$f + \Delta f_1 + \Delta f_3 = \int_0^{\infty} K(\lambda, z)g(z)dz + \int_0^{\infty} \Delta K g(z)dz \quad (1.14)$$

令 
$$\Delta f_2 = - \int_0^{\infty} \Delta K g(z)dz$$

总误差  $\Delta f$  为:

$$\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2 + \Delta f_3$$

则有

$$f + \Delta f = \int_0^{\infty} K(\lambda, z)g(z)dz \quad (1.15)$$

必须指出,由于实际大气变化的复杂性,大气模式误差  $\Delta f_2$  往往占主要成分。而且,这种误差可达百分之十左右。在这种情况下,要求把观测误差  $\Delta f_1$  提高到千分之几是没有意义的。

## 二、遥感探测反演的局地极限空间分辨尺度

在前节讨论分析的基础上,我们将从广义函数理论出发,分析反演解  $g(z)$  在不同  $z$  处的最大可分辨尺度与核函数和误差之间的定量关系。

令输入讯息  $g(z)$  为 Dirac 函数:

$$g(z) = \delta(z - z_0) \quad (2.1)$$

这相当于输入讯号  $g(z)$  是一个位于空间  $z_0$  处的脉冲。代入(1.1)后,得:

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} K(\lambda, z)\delta(z - z_0)dz = K(\lambda, z_0) \quad (2.2)$$

假设  $K(\lambda, z)$  为良函数(或称正则函数),而且  $K(\lambda, z) \geq 0$ , 则作解析延拓以后,根据广义函数理论<sup>[8]</sup>有:

$$K(\lambda, z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda, z) e^{-n(z-z_0)^2} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} dz \quad (2.3)$$

当  $n$  为有限值时,函数  $e^{-n(z-z_0)^2} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$  为具有一定空间分布宽度的函数,其半宽度  $L$  可定义为:

$$\frac{1}{2} = e^{-nz^2/2} \quad (2.4)$$

$$L = 2z_{\frac{1}{2}} = \frac{1.66}{\sqrt{n}} \quad (2.5)$$

假如讯号  $f(\lambda)$  或  $K(\lambda, z_0)$  有误差  $\Delta f \equiv \delta > 0$ , 则可以找到一个  $N$  值使:

$$K(\lambda, z_0) + \delta = \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda, z) e^{-N(z-z_0)^2} \left(\frac{N}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} dz \quad (2.6)$$

而当  $n < N$  时,

$$K(\lambda, z_0) + \delta < \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda, z) e^{-n(z-z_0)^2} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} dz \quad (2.7)$$

因此,在给定误差  $\delta$  的情况下,用讯号  $K(\lambda, z_0) + \delta$  来反演,即不再得到 Dirac 函数  $\delta(z, z_0)$ , 而为一具有一定宽度的分布函数  $e^{-N(z-z_0)^2} (N/\pi)^{\frac{1}{2}}$ , 其半宽度  $L^*$  为:

$$L^* = \frac{1.66}{\sqrt{N}} \quad (2.8)$$

我们定义  $L^*$  为在误差  $\delta$  条件下,在空间  $z_0$  处反演的局地极限空间分辨尺度。因为,若在  $z_0$  处有二个脉冲讯息  $\delta(z - z_1)$ ,  $\delta(z - z_2)$  同时输入,而当  $|z_1 - z_2| < L^*$  时,则反演时已无法分辨这两个讯息。因此,局地极限空间可分辨尺度  $L^*$  与核函数和总误差  $\delta$  的关系即为:

$$K(\lambda, z_0) + \delta = \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda, z) e^{-\frac{2.76}{L^{*2}}(z - z_0)^2} \left(\frac{2.76}{\pi L^{*2}}\right)^{\frac{1}{2}} dz \quad (2.9)$$

若已知  $K(\lambda, z)$  和  $\delta$ , 由式(2.9)即可确定  $L^*$ 。下面考虑几个简单的特例:

(1) 当核函数为:

$$K(\lambda, z) = a(\lambda) e^{-p(\lambda)z} \quad (2.10)$$

地面微波测温方程的核函数和此相似。其半宽度为:

$$L_1 = 2z_{\frac{1}{2}} = \frac{1.39}{p} \quad (2.11)$$

将(2.10)代入(2.9)计算后得到相对误差值为:

$$\beta = \frac{\delta}{K(\lambda, z_0)} = e^{\frac{p}{4N}} - 1 \approx \frac{p^2}{4N} \quad (p^2 < 4N) \quad (2.12)$$

再代入(2.8)和(2.11)两式得:

$$L_1^* = 2.4 L_1 \sqrt{\beta} \quad (2.13)$$

其数值见表 1。

(2) 当核函数为:

$$K(\lambda, z) = e^{-p(\lambda)(z-z_0)^2} \quad (2.14)$$

气象卫星的红外和微波测温方程中的核函数与此相近。用上例中的同样方法可得

$$L_2^* \approx L_2 \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{0.5 - \beta}} \quad (\beta \leq 0.1) \quad (2.15)$$

$L_2$  为函数(2.14)的半宽度。 $L_2$  的数值也见表[1]。

表 1 局地极限空间可分辨尺度  $L^*$  与误差关系

$\beta(\%)$	10	5	1	0.5
$L_1^*$	$0.76L_1$	$0.54L_1$	$0.24L_1$	$0.17L_1$
$L_2^*$	$0.50L_2$	$0.34L_2$	$0.14L_2$	$0.10L_2$

因此,在一定误差条件下,大气遥感探测的最大通道数  $N(\lambda_i; i = 1, \dots, N)$  是有限的。如果确定了局地极限空间可分辨尺度  $L^*(z)$ , 则可以此为判据来确定有效通道的最

大数目。为此,我们定义核函数的“重心”位置为:

$$z_i = \frac{\int_0^{\infty} z K(\lambda_i, z) dz}{\int_0^{\infty} K(\lambda_i, z) dz} \quad (2.16)$$

如对应两个通道的核函数  $K(\lambda_i, z)$ ,  $K(\lambda_j, z)$  在其“重心”位置  $z_i$  与  $z_j$  处的局地极限空间分辨率各为  $L^*(z_i)$  和  $L^*(z_j)$ 。则可以定义选择通道的判据为: 必须选择这样的通道以使下式满足:

$$|z_i - z_j| \geq \frac{1}{2} [L^*(z_i) + L^*(z_j)] \quad (2.17)$$

如果不满足上式,则这两个通道提供的讯息大部重复,而相互独立提供的新讯息量很小,也就是说下列两个方程之间的线性独立性很差:

$$f(\lambda_i) = \int_0^{\infty} g(z) K(\lambda_i, z) dz$$

$$f(\lambda_j) = \int_0^{\infty} g(z) K(\lambda_j, z) dz$$

当然,按判据(2.17)所选择出来的通道数  $N$  是理论最大可能的通道数。其通道位置只能大致被确定,但可作为初始值,再用下节所提出的方法进一步精确。当然,由于技术条件的限制,实际可能实现的通道数  $N'$  往往要小于  $N$ ,这就还必须从  $N$  中选出一组最优的  $N'$  通道来。

### 三、核函数与通道的最优化规划

当遥感探测方程(1.1)的解即使存在而且唯一,但在实际应用中,往往只能观测有限个数的通道讯号  $f(\lambda_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ )。理论上最大可能的通道数  $N$  可由上节中的方法确定。而实际可实现的通道数  $N'$  则受技术条件的限制。此时遥感探测方程即为:

$$f(\lambda_i) = \int_0^{\infty} K(\lambda_i, z) g(z) dz \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.1)$$

从这  $N$  个方程最多也只能反演出  $N$  个  $g(z_i)$ , ( $i = 1, \dots, N$ ) 值,而  $z_i$  是事前根据实际要求选定的。根据前两节分析的结果,为要从方程组(3.1)中得到比较稳定的反演解  $g(z_i)$ ,还可以把方程组(3.1)组合成一组新的方程,以找到一组最优化通道  $\lambda_i$  而使新方程组中的新核函数最佳地逼近 Dirac 函数  $\delta(z - z_i)$ , ( $i = 1, \dots, N$ )。实质上,这就是求方程组(3.1)的最优化规划。以下我们即提出一个方法。

方程(3.1)唯一可能有实际价值的组合是线性组合:

$$I_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} f(\lambda_j) = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij} K(\lambda_j, z) \right] g(z) dz \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.2)$$

我们是要选择一组最优化系数  $a_{ij}$  而使新核函数  $A_i = \sum_j a_{ij} K(\lambda_j, z)$  最优地逼近 Dirac 函数  $\delta(z - z_i)$ 。为给出“最优逼近”一个定量的测度,定义偏离度  $S$  为:

$$S = \int_0^{\infty} (z - z_i)^m [A_i(z) - \delta(z - z_i)]^2 dz \quad (3.3)$$

其中  $m$  可取 0, 2, 4, ... 为偶数值,然而,根据我们在二个实例中试验的结果<sup>[2-3]</sup>,在式

(3.3)中取  $m = 2$  为好。此时,  $S$  表示核函数  $A_i$  对 Dirac 函数的离散度, 具有比较明确的物理意义。因此, 以下都取  $m = 2$  来讨论。这样, 所谓“最优逼近”, 即求一组最优化系数  $a_{ij}$  而使  $S$  值为最小。此外还需取以下二个约束条件:

(1) 取归一化条件:

$$\int_0^{\infty} A_i(z) dz = 1 \quad (3.4)$$

以使

$$I_i = \int_0^{\infty} A_i(z) g(z) dz = g(z_i^*)$$

(2) 对组合以后的量  $I_i = \sum_j a_{ij} f(\lambda_j)$ , 还必须有一个误差限制, 可令其均方误差不超过某一数  $\varepsilon$ 。

$$\sqrt{\overline{\Delta I_i^2}} = \sqrt{\left[ \sum_j a_{ij} \Delta f(\lambda_j) \right]^2} \leq \varepsilon$$

或写成:

$$\overline{\Delta I_i^2} = \left[ \sum_j a_{ij} \Delta f(\lambda_j) \right]^2 \leq \varepsilon^2 \quad (3.5)$$

其中  $\Delta f(\lambda_j) \equiv \Delta f_j$  为观测值  $f_j$  的误差, 如果各通道观测误差是相互独立无关的统计量, 则有:

$$\overline{\Delta f_j \Delta f_k} = \varepsilon_j^2 \delta_{jk} \quad (3.6)$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}; \quad \varepsilon_j^2 = \overline{\Delta f_j^2}$$

由此式(3.5)为:

$$\overline{\Delta I_i^2} = \sum_j a_{ij}^2 \varepsilon_j^2 \leq \varepsilon^2 \quad (3.7)$$

因此, 我们即在下列二个约束条件下:

$$\int_0^{\infty} \left[ \sum_j a_{ij} K(\lambda_j, z) \right] dz = 1 \quad (3.8)$$

$$\varepsilon^2 - \sum_j a_{ij}^2 \varepsilon_j^2 = 0 \quad (3.9)$$

求最优化系数  $a_{ij}$  和通道  $\lambda_j$ , 以使偏离度  $S$  最小:

$$S = \int_0^{\infty} (z - z_i)^2 \left[ \sum_j a_{ij} K(\lambda_j, z) - \delta(z - z_i) \right]^2 dz \quad (3.10)$$

根据最优化规划理论<sup>[9]</sup>, 可用拉格朗日 (Lagrange) 方法求上述问题的解。引入拉格朗日乘子  $\gamma^*$ ,  $\beta^*$  和拉格朗日函数  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = S + \gamma^* \left[ 1 - \int_0^{\infty} \left[ \sum_j a_{ij} K(\lambda_j, z) \right] dz \right] + \beta^* \left[ \varepsilon^2 - \sum_j a_{ij}^2 \varepsilon_j^2 \right] \quad (3.11)$$

求满足:  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{ij}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, N)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^*} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta^*} = 0 \quad (3.12)$$

时的  $a_{ij}$  和  $\lambda_j$ 。

从条件(3.12),不难得到:

$$\sum_k a_{ik} G_{ik} = \frac{\gamma^*}{2} b_i + \beta^* \left[ \sum_k a_{ik} \varepsilon_k^2 \delta_{ik} \right] (j = 1, \dots, N) \quad (3.13)$$

$$\sum_k a_{ik} B_{ik} = \frac{\gamma^*}{2} c_i + \beta^* \left[ \sum_k a_{ik}^2 \varepsilon_k \frac{d\varepsilon_k}{d\lambda_k} \delta_{ik} \right] (j = 1, \dots, N) \quad (3.14)$$

$$\sum_k b_k a_{ik} = 1 \quad (3.15)$$

$$\varepsilon^2 = \sum_k a_{ik}^2 \varepsilon_k^2 \quad (3.16)$$

其中

$$G_{ik} = \int_0^\infty (z - z_i)^2 K(\lambda_i, z) K(\lambda_k, z) dz \quad (3.17)$$

$$B_{ik} = \int_0^\infty (z - z_i)^2 K(\lambda_k, z) \frac{\partial K(\lambda_i, z)}{\partial \lambda_i} dz \quad (3.18)$$

$$b_i = \int_0^\infty K(\lambda_i, z) dz \quad (3.19)$$

$$c_i = \int_0^\infty \frac{\partial K(\lambda_i, z)}{\partial \lambda_i} dz \quad (3.20)$$

从方程(3.13)~(3.16)中可以解出(2N+2)个变量 $a_{ik}, \lambda_j, \beta^*, \gamma^*$ ,即得到了问题的解。然而,由于这是一组非线性方程组,一般只能用迭代近似法求解。

如果N为理论最大可能通道数,则可先按照第(二)节中提出的方法,初步确定 $\lambda_j^0$  ( $j = 1, \dots, N$ )值。以此为初值代入方程组(3.13), (3.15), (3.16),而求得一级近似解 $a_{ik}^1, \beta_1^*, \gamma_1^*$ ,再以此代入方程(3.14)求得通道位置的一级近似解 $\lambda_j^1$  ( $j = 1, \dots, N$ )。依次迭代运算,直到 $a_{ik}^n, \lambda_j^n, \beta_n^*, \gamma_n^*$ 的变化在所需误差范围之内即可。

因此,先解方程组:

$$\begin{cases} \sum_k a_{ik}^1 G_{ik} = \frac{\gamma_1^*}{2} b_i + \beta_1^* \left[ \sum_k a_{ik}^1 \varepsilon_k^2 \delta_{ik} \right] \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \sum_k b_k a_{ik}^1 = 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 = \sum_k a_{ik}^2 \varepsilon_k^2 \end{cases} \quad (3.23)$$

因为方程(3.21)中的 $\beta_1^*$ 项和方程(3.23)都代表误差项,一般是小量。故先忽略,而求解:

$$\begin{cases} \sum_k a_{ik}^{10} G_{ik} = \frac{\gamma_{10}^*}{2} b_i \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} \sum_k b_k a_{ik}^{10} = 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

不难求得其解为:

$$\begin{cases} a_{ik}^{10} = \frac{\mathcal{G}_{k1}}{\sum_k b_k \mathcal{G}_{k1}} \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} \gamma_{10}^* = 2 \frac{\mathcal{G}_0}{\sum_k b_k \mathcal{G}_{k1}} \end{cases} \quad (3.27)$$

其中

$$\mathcal{G}_0 = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{vmatrix} \quad \mathcal{G}_{k1} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & \downarrow b_1 & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & \downarrow b_n & \cdots & G_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

(第  $k$  列)

不难证明,这结果和 Backus 和 Gilbert<sup>[10]</sup> 等人无误差时的结果是完全相一致的。解(3.26), (3.27)也是不考虑观测误差时的最优化系数。

将(3.26)一(3.27)式代入方程(3.21)中的  $\beta_i^*$  项,再解

$$\begin{cases} \sum_k a_{ik}^{11} G_{jk} = \frac{\gamma_{11}^*}{2} b_j + \beta_{11}^* E_{ij} & (3.29) \\ \sum_k b_k a_{ik}^{11} = 1 & (3.30) \\ \varepsilon^2 = \sum_k (a_{ik}^{11})^2 \varepsilon_k^2 & (3.31) \end{cases}$$

而  $E_{ij} = \sum_k \varepsilon_k^2 a_{ik}^{10} \delta_{jk}$

不难得解:

$$\frac{\gamma_{11}^*}{2} = \frac{\gamma_{10}^*}{2} - \beta_{11}^* \frac{\sum_k b_k \mathcal{G}_{k3}}{\sum_k b_k \mathcal{G}_{k1}} \quad (3.32)$$

$$a_{ik}^{11} = a_{ik}^{10} + \beta_{11}^* M_k \quad (3.33)$$

$$\beta_{11}^* = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \quad (3.34)$$

其中:

$$\mathcal{G}_{k3} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & E_{i1} & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & E_{in} & \cdots & G_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.35)$$

(第  $k$  列)

$$M_k = \frac{\mathcal{G}_{k3} \sum_k b_k \mathcal{G}_{k1} - \mathcal{G}_{k1} \sum_k b_k \mathcal{G}_{k3}}{\mathcal{G}_0 \sum_k b_k \mathcal{G}_{k1}} \quad (3.36)$$

$$P = \sum_k \varepsilon_k^2 M_k^2 \quad Q = 2 \sum_k a_{ik}^{10} M_k \varepsilon_k^2 \quad R = \sum_k (a_{ik}^{10})^2 \varepsilon_k^2 - \varepsilon^2 \quad (3.37)$$

由方程(3.34),  $\beta^*$  具有两个值。究竟取那一个,在实际应用中,可分别对应两个  $\beta^*$  值计算出二组最优化系数  $a_{ik}^{11}$  以及对应的最优化核函数。最后进行比较,决定取舍。

再将用上法求得的一级近似值  $a_{ik}^{11}$ ,  $\beta_i^*$ ,  $\gamma_i^*$  代入方程(3.14),而求最优化通道  $\lambda_j$ , ( $j=1, \dots, N$ )。因为,  $N$  为理论最大可能通道数,则  $\lambda_j$  和根据第二节局地极限空间分辨尺度判据所选定的初始通道值  $\lambda_j^0$  不会相差很大。因此,可取近似:

$$K(\lambda_k, z) \approx K(\lambda_k^0, z) + \frac{\partial K(\lambda_k^0, z)}{\partial \lambda_k} \Delta \lambda_k \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial K(\lambda_k, z)}{\partial \lambda_k} \approx \frac{\partial K(\lambda_k^0, z)}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial^2 K(\lambda_k^0, z)}{\partial \lambda_k^2} \Delta \lambda_k \quad (3.39)$$

将上两代入方程(3.14)后,可得:

$$\sum_{k=1}^N \Delta \lambda_k A_{jk} = B_j \quad (j = 1, \dots, N) \quad (3.40)$$

其解为,

$$\Delta \lambda_k = \frac{\mathcal{B}_{jk}}{\mathcal{A}} \quad (3.41)$$

其中

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{vmatrix} \quad (\text{第 } k \text{ 列})$$

$$\mathcal{B}_{jk} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & B_1 & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & B_N & \cdots & A_{NN} \end{vmatrix}$$

而

$$A_{jk} = a_{jk} B_{jk}^{(3)} + \delta_{jk} \sum_l a_{il} B_{il}^{(2)} - \frac{\gamma^*}{2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 K(\lambda_j^0, z)}{\partial \lambda_j^2} dz \delta_{jk}$$

$$B_j = - \sum_k a_{jk} B_{jk}^{(1)} + \frac{\gamma^*}{2} \int_0^\infty \frac{\partial K(\lambda_j^0, z)}{\partial \lambda_j} dz + \beta^* \left[ \sum_k a_{jk}^2 \varepsilon_k \frac{d\varepsilon_k}{d\lambda_k} \delta_{jk} \right]$$

$$B_{jk}^{(1)} = \int_0^\infty (z - z_i)^2 K(\lambda_k^0, z) \frac{\partial K(\lambda_j^0, z)}{\partial \lambda_j} dz$$

$$B_{jk}^{(2)} = \int_0^\infty (z - z_i)^2 K(\lambda_k^0, z) \frac{\partial^2 K(\lambda_j^0, z)}{\partial \lambda_j^2} dz$$

$$B_{jk}^{(3)} = \int_0^\infty (z - z_i)^2 \frac{\partial K(\lambda_k^0, z)}{\partial \lambda_k} \frac{\partial K(\lambda_j^0, z)}{\partial \lambda_j} dz$$

这样,我们即求得全部一级近似值,确定了最优化系数  $a_{ik}$  以及最优化通道  $\lambda_i$ 。

必须指出,当受到技术条件的限制,实际可能做到的通道数  $N$  小于理论最大可能通道数时,则(3.38)与(3.39)式的近似式遂不能应用,而必须解非线性方程(3.14)。这问题还有待于进一步解决。

利用本文所提出的理论分析和方法,在无误差情况下,我们对气象卫星微波测温 and 光闪烁探测大气风和湍流分布的反演问题进行了数值试验,取得比较成功的结果<sup>[2-3]</sup>。这也证明本文中所提出的理论方法对解遥感探测方程(1.1)是有一定成效的。

当然,本文中所提出的理论分析在数学上还不是非常严密的。特别当通道数  $N$  为任意值时,如何普遍地解非线性方程组(3.13)—(3.16)的问题等,都还有待于今后加以改进和解决。

## 参 考 文 献

- [1] 曾庆存: 大气红外遥测原理, 科学出版社, 1974。
- [2] 周秀骥、黄润恒、吕达仁: 微波探测大气温度分布的一个数值试验。本书 12 页。
- [3] 黄润恒、吕达仁、周秀骥、包玲明: 利用光闪烁效应遥感大气折射率结构与风的分布的理论分析。本书 25 页。
- [4] Лаврентьев, М. М.: О Некоторых некорректных задачах Математической физики. Новосибирск Изд-во, сиб. отделения, АН СССР. 1962.
- [5] Тихонов, А. Н.: О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. Докл. АН СССР, Т. 151 (1963), вып. 3.
- [6] Towmey, S.: The application of numerical filtering to the solution of integral equations encountered in indirect sensing measurements. *J. of the Franklin Institute*, Vol. 279, (1965), No. 2.

