仪器仪表学术专著

静、动态数学模型的实用建模方法

黄俊钦 著

仪器仪表学术专著

静、动态数学模型的实用建模方法

黄俊钦 著

机械工业出版社

数学模型是分析研究过程控制系统和自动测试系统的重要手段。建立数学模型的方法过去仅在某些书刊上有零星介绍，全面系统地介绍并不多见。为此，作者将其多年来研究的各种建模方法和实验结果，加以系统整理和总结，使之成为一本较完整而实用的建模方法的参考书。

本书主要论述各种动态数学模型的建模方法，并以一定篇幅介绍了：静、动态数学模型的基本概念；性能指标的计算方法；线性和非线性静态数学模型的建模方法；动态补偿数字滤波器设计方法和消除动态误差的算法。全书内容实用，大多数为作者的研究成果。

本书可供从事静、动态数学模型应用方面的科技工作者阅读，也可供理工科大学高年级学生和研究生参考。

静、动态数学模型的实用建模方法

黄俊钦 著

*

责任编辑：秦起佑

封面设计：田淑文

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

人民交通出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $850\times1168^{1}/_{32}$·印张 $13^{5}/_{8}$·字数 358千字

1988年8月北京第一版·1988年8月北京第一次印刷

印数 0,001—3,700·定价：6.40元

*

ISBN 7-111-00572-4/TP·36

序

为了开展仪表学科的学术活动，中国仪器仪表学会1980年创刊了《仪器仪表学报》，到目前已先后刊载400多篇学术论文，汇集了我国仪表学科的科研、理论探讨和应用的精华。每篇论文都具有一定创新与独立的见解，这对仪表工业的发展与繁荣起到了很好的促进作用，也受到国内外的好评。

建国三十多年，特别是近几年来，我国仪器仪表科学技术和工业生产得到了很大的发展，取得了许多重要的科研成果，其中不少成果具有我国自己的特色，有的达到国际先进水平。为了总结和交流科技成果，提供和保存科技文献，促进仪器仪表科技事业的发展，中国仪器仪表学会认为不仅有必要，同时也有可能出版一批仪器仪表专门著作。专著是《学报》的扩展和延伸，反映著者在仪器仪表某一学科领域或某个专门课题上创造性的工作所取得的研究成果，具有较高的学术水平和指导意义。专著是由《仪器仪表学报》编委会推荐选题和组织审稿，机械工业出版社审定选题和编辑出版。

1983年，1984年先后推荐组织了六个专著选题是：《黑体辐射源特性计算及应用》、《白度理论及计测》、《振动传感器的绝对校准（装置）》、《滞后过程的预估与控制》、《金属膜片的设计》、《静、动态数学模型的实用建模方法》。

经过各方面两年多来的共同努力，这批专著即将陆续出版。在此我们应对仪器仪表学报各位编委、审阅稿件的专家以及机械工业出版社表示感谢。仪器仪表专著出版确实是仪表行业的一件大事，它标志着我国仪表学科已经走向国际，进入科学技术先进之列。

我们深信，这批专著的出版一定会受到国内外仪表学术界与

仪表行业的欢迎，并对此表示祝贺。

这批专著是初次组织，一定还存在一些问题，希望读者关心，提意见，以便今后改进提高。

中国仪器仪表学会副理事长
《仪器仪表学报》主编
王良楣
1986年5月

前　言

在分析研究过程控制系统和自动测试系统时，常常应用系统的静、动态数学模型。建立数学模型的方法，在有关参考书刊中都只有零星介绍。撰写本书的主要目的，是想把我们多年来研究的各种建模方法和实验结果，加以系统整理，使之成为一本较完整而实用的建模方法的参考书。

全书共分七章，第一章介绍各种静态数学模型和动态数学模型，以及主要静态性能指标和动态性能指标的计算方法。第二章介绍线性和非线性的静态数学模型的建模方法。第三、四、五、六章介绍各种动态数学模型的建模方法。第七章讨论动态补偿数字滤波器的设计方法和消除动态误差的算法，这是动态数学模型应用的范例之一。

与国内外类似的书籍相比，本书具有如下几个主要特点：(1)绝大部分工作都是作者历年来指导研究生过程中完成的，各种建模方法与现有相应的方法相比都有一些特点，例如运算速度快、计算精度高，算法简单等。每章都备有必要的基础，使各章内容都能由浅入深，循序渐进，有较完整的系统性。(2)全书的主要章节都有实验结果或仿真计算结果。全部实验结果都是我们自己做的，计算机程序框图也都是自己编的，所举实际例题的计算结果也全部是作者的研究生根据自己的实验数据、自己编制的程序计算的，而且都是经过多次实践考验的。所以这些建模方法都是很实用的。这种有许多实际应用结果和有系统地介绍各种建模方法的书对我国这方面的研究工作、生产建设与培养科技干部都会有较好的作用。(3)我们研究出的各种建模方法都带有检查模型优劣的计算，即检查回归效果的计算。(4)书中除介绍建立各种数学模型的方法外，还介绍各种数学模型的互相换算方法，这样便可以比较各种建模方法的效果。(5)本书还介绍用以改善

系统的动态性能的动态补偿数字滤波器的设计方法，以及消除动态误差的方法。这些都是动态数学模型的应用实例。（6）本书是根据我院自动控制系研究生硕士课程讲义，在使用过几届之后修改补充而成的。修改补充的主要出发点是使得各章内容由浅入深地循序渐进，使得具有大学毕业水平的科技工作者便于阅读，亦可作为研究生教材和教学参考书。

书中对每种建模方法都有理论分析和其它类似方法的分析比较，有仿真计算结果和实验数据处理结果，以及计算结果的对比分析等。使读者易于掌握这些建模方法。其次，向读者介绍研究问题的方法也是本书的主要目的之一。加速度传感器动态数学模型的研究方法便是一例。由时域校准法（冲击校准法）建立的数学模型和由频域校准法（振动校准法）建立的数学模型，所求得的频率响应比较符合。这不仅说明这些建模方法是正确的和所建立的数学模型是符合实际的，而且说明只要实验和数据处理的方法正确，时间域和频率域的动态校准方法都可以求得被校准系统的正确数学模型。当被校准系统的动态特性不满足要求时，如何改善系统的动态特性与如何进行实验研究等等，也是解决实际问题的一套科学研究方法。其中包含对实际系统如何进行动态校准与如何选择动态激励信号，如何建立动态数学模型与如何检验模型的正确性，如何设计动态补偿数字滤波器，如何进行实验研究和在动态测试数据处理中如何消除动态误差等等一系列的科学研究方法。我们认为在书中除介绍各种实用的建模方法和如何应用这些方法之外，向读者介绍这些针对实际问题的理论结合实际的科学研究方法也是很重要的。

书中采用的许多理论推导、实验和计算的结果都是我的历届研究生所做的工作，如孙贤主、冯一明、佘辉里、苗彤、张继志、侯连生、刘整社、宋玮等同志，许多实验是王效葵同志和我与研究生同志一起做的，特此致谢。

本书内容涉及的范围较广，由于本人水平有限，错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

目录

绪 论

一、数学模型及其种类

数学模型是描述物理系统的运动规律、特性和输入与输出关系的一个或一组方程式。过程控制系统与自动测试系统的特性分静态特性和动态特性两类。描述系统静态（工作状态不变或慢变过程）特性的模型，称为静态数学模型。例如对各种传感器与测试系统做静态校准时，所求出的都是静态数学模型。描述系统动态或瞬态与过渡态特性的模型，称为动态数学模型，例如对各种传感器与测试系统和控制系统进行动态校准时，所求出的便是动态数学模型。静态特性和动态特性有显著的区别，因而静态与动态数学模型也有很大的差异，它们的建模方法也完全不同。本书只有第二章讨论静态数学模型的建模方法，其余各章都讨论动态数学模型的建模方法及其应用。

对于模拟信号与连续系统需用连续数学模型来描述，例如微分方程、传递函数、状态空间等都是连续数学模型。对于离散信号与离散系统需用离散数学模型来描述，例如差分方程、离散传递函数、离散状态空间等都是离散数学模型。连续与离散数学模型的建模方法是本书讨论的重点。

信号与系统是确定性的，便可用确定性数学模型来描述其特性，例如做压力测试系统的静态校准时，所加的压力是确定性的，所建立的数学模型也是确定性的静态数学模型。描述随机信号，或系统对随机信号响应的数学模型，称为随机数学模型，例如许多噪声与干扰的性质是随机的，要研究噪声与干扰，或要研究系统对这些噪声与干扰的响应，都需要建立随机数学模型。随机数学模型也有连续的和离散的模型。本书主要讨论确定性数学模型的建模方法，其中有些建模方法也适用于随机模型。

可以用线性方程式（或组）来描述其特性的模型称为线性模型，例如许多力传感器与加速度传感器都具有线性特性，便可用线性模型来描述其特性。用非线性方程式（或组）来描述其特性的模型称为非线性模型，例如振动筒式和振动膜式传感器都具有明显的非线性特性，便需用非线性模型来描述其特性。有的非线性系统在一定范围内可以用线性方程式来描述其特性，例如有的压力传感器在小压力范围内具有线性特性，在大压力时具有明显的非线性特性。

静态数学模型与动态数学模型，连续数学模型与离散数学模型，确定性数学模型与随机数学模型都有线性的和非线性的数学模型。所以线性与非线性是数学模型在数学上的主要特征。

从描述方式上来看，数学模型分参数模型和非参数模型两大类。如传递函数、差分方程、状态方程等称为参数模型，瞬态响应（脉冲响应曲线与阶跃响应曲线等）和频率响应（幅频响应曲线、相频响应曲线、幅相频率特性曲线等）称为非参数模型。其实瞬态响应和频率响应都是曲线或数据表格，所以称它为非参数表示的模型，是用曲线表示的模型。

二、数学模型的功用

数学模型主要有下列几方面的功用：（1）它简明而精确地描述了物理系统的主要特性，例如用线性方程或非线性方程来描述仪器仪表的校准曲线，从方程式便可很容易看出系统的输入输出的关系；（2）从系统的数学模型很容易看出它的功能和特点，例如用线性方程来描述热电偶的特性，用多项式来描述振筒式压力传感器的特性等等；（3）有了系统的数学模型，就便于研究系统的运动规律和进行特性分析，例如描述系统动态特性的数学模型，便可以定量地说明它的运动规律和各种动态特性；（4）有了系统的数学模型，就便于研究它的设计方法和改善其特性的方法等；（5）系统的静态与动态性能指标，应该从它的数学模型中计算才比较合理。

三、建模方法

建立数学模型的方法有两大类：一类是分析法；另一类是系统辨识法。分析法是根据系统的工作原理，运用各种物理定理（如能量守恒、动量矩定理、各种电路定理等等）推导出描述系统的数学模型（例如代数方程与微分方程等），这类方法是各门学科大量采用的。但是，它只能用于比较简单的系统（例如一些电路，测试系统、过程检测、动力学系统、过程控制、飞行控制系统等），而且在建立数学模型的过程中必需做一些假设与简化，否则所建立的数学模型过于复杂，不易求解。例如对过程控制系统进行初步分析时，常用小干扰线化方法列出各个环节的方程式及其参数，绘出系统方块图，求出整个控制系统的方程式。根据这种线性方程式便易于进行系统的静、动态特性的分析研究。假如不运用小干扰线性化方法，将各环节的非线性因素都予以考虑，最后求得的系统方程式就比较复杂，不易于进行分析研究。

另一类方法是系统辨识法，是利用系统输入输出的观测数据来建立数学模型。例如对于一个复杂的测控系统，进行静态校准时，给系统输入一系列的标准量，并测出在该输入数据下的输出数据，根据这些数据就可以建立描述该系统输入输出关系的静态数学模型和静态性能指标。给复杂系统输入一定的动态激励信号，记录下系统对该信号的瞬态响应，便可求出系统的动态数学模型。这类方法更适用于较复杂的系统，例如研究较复杂的控制对象的等效动态特性、传感器等测试系统和控制对象连在一起的等效动态特性、以及研究系统的等效质量、等效阻尼、等效刚度等等。在这些情况下，运用系统辨识的方法建立系统的动态数学模型均较为方便易行。

在有些情况下可以将两种方法结合起来，亦即运用分析法列出系统的理论数学模型，运用系统辨识法来确定模型中的参数，例如有些控制系统的运动方程式可以用动力学分析法求出，方程式中的参数可以用系统辨识法，通过动态校准实验求得。两种方法结合起来，往往可以得到较好的效果，而且所求得的数学模型

的物理意义也比较明确。

四、建模方法所研究的主要问题

对系统进行动态校准时的动态激励信号有频率域的、时间域的和随机激励信号。频率域的激励信号可测出系统的频率特性（幅频与相频，实频与虚频），由这些实验频率特性（频率响应）求传递函数的方法是频率域的建模方法。有些动态校准实验只能得出系统的幅频特性，而无相频特性。由幅频特性求传递函数和差分方程的方法是幅频建模方法。求出参数模型（传递函数或差分方程）之后，便可计算出相频特性。为了检验所求得的参数模型是否正确，可由参数模型计算频率特性，可将计算结果与原实验频率特性绘在同一张坐标纸上，两者的符合情况便一目了然。

时间域的动态校准激励信号有脉冲、阶跃与负阶跃和冲击信号等等，系统对激励信号的响应便是瞬态响应（脉冲响应、阶跃响应和冲击响应等）。对瞬态响应作快速傅氏变换（FFT），即得系统的频率响应，再运用频率域建模方法便可求得系统的参数模型。第一步由时间域的瞬态响应采用快速傅氏变换求出频率响应，第二步运用频率域建模方法，由频率响应求出参数模型，这便是时间域建立参数模型的两步法。它是时间域建模方法的一种途径。另一种途径是：由时间域的瞬态响应运用时间域建模方法直接求出差分方程模型，对它作Z变换便得离散传递函数，再用输出响应不变法（优于双线性变换），由离散传递函数求得连续传递函数。这种途径优于第一种途径的两步法。

常用的随机激励信号有：白噪声、伪随机二进制序列和其它随机信号。利用随机信号激励时，需作相关分析，例如用伪随机二进制序列对系统进行激励时，系统输入输出的互相关函数与系统的脉冲响应成正比，在求得系统的脉冲响应之后，便可利用时间域建模方法求出系统的各种参数模型。需要估计互相关函数，这是采用随机激励信号时的一个特点。利用相关滤波原理，使得抗干扰性很强，这是另一个重要特点。

系统的性能指标分为静态性能指标与动态性能指标两种。静态性能指标又分为分项指标与综合指标两种。线性系统的主要分项指标有线性度、重复性、迟滞。非线性系统的分项指标有符合度与重复性。综合指标为精度(或精确度)。动态性能指标分为时间域和频率域两种。时间域的动态性能指标主要有上升时间、响应时间、超调量等等。频率域的动态性能指标主要是幅值误差和相位误差为某一规定值的工作频带与通频带等。对系统进行静、动态校准时，记录数据或曲线中不可避免地会带有一些干扰，所以某一系统的这些性能指标不能直接从静、动态校准曲线上求出，有时由于存在干扰，在校准曲线上无法求出确切的性能指标。需利用这些实验数据建立数学模型，由数学模型才能计算出各种较合理的性能指标。所以静、动态性能指标的计算方法也与数学模型有关。各种系统（过程检测控制系统、仪器仪表、传感器与测试系统等）都需要计算其静、动态性能指标。所以应该详细讨论静、动态性能指标的计算方法。

当系统的动态性能不符合要求时，可应用适当的滤波器进行动态补偿，以展宽系统的频带，改善系统的动态特性。滤波器有模拟式和数字式两种。早期（50至60年代）多采用模拟滤波器，随着数字技术和数字计算机的逐步发展，越来越多地采用数字滤波器。数字滤波器既可用硬件实现，亦可用软件实现，比较灵活，适应性较强。对于带计算机的测试和控制系统，采用软件实现的动态补偿数字滤波器更加方便实用。设计动态补偿数字滤波器时，必需有系统的动态数学模型。根据动态补偿的要求和系统的动态数学模型，便可设计动态补偿数字滤波器，以改善系统的动态特性。这就需要讨论这类动态补偿数字滤波器的设计方法，动态补偿效果的实验研究和采用微型计算机实现的结果等等。动态测试结果的动态误差如何分析与计算，如何在数据处理中消除动态误差，这是动态测量中很重要的问题之一。这就要求我们研究消除动态误差的数据处理方法，其中需要运用被测对象和测试系统结合在一起的等效的动态数学模型。

第一章　数学模型与性能指标

第1节　静态数学模型

静态数学模型描述系统工作状态不变或只有缓慢变化时的特性。

静态数学模型有线性与非线性两类，最简单的线性模型是直线方程

$$y = a + bx \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

式中　a——截距；

　　　b——直线斜率。

许多单输入单输出线性系统的静态方程式都可以用直线方程来表示。例如许多线性传感器与线性放大器的静态数学模型都为式(1-1-1)所示的形式。

多元线性模型也是实际工作中常用的静态线性模型。这种系统是一种多输入单输出系统，如图1-1-1所示。

其数学模型为

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

式中　$x_i, i = 1, 2, \cdots, n$。

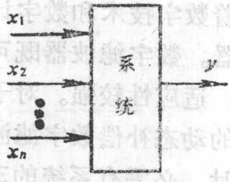

图1-1-1　多输入单输出系统

由实验数据根据一定的指标求出式(1-1-1)中的常数a和b估计值的方法，是线性回归分析方法。由实验数据根据一定的指标，求出式(1-1-2)的常数$a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$估计值的方法，是多元线性回归分析方法。

在非线性数学模型中有些是可化为直线的，这类数学模型的回归分析就可以采用线性回归分析方法，计算工作便简单得多。

例如幂函数

$$y = ax^b \tag{1-1-3}$$

等式两端取对数得：

$$\lg y = \lg a + b\lg x$$

令$U = \lg y$，$U_0 = \lg a$，$V = \lg x$，则上式变为

$$U = U_0 + bV$$

U 和V的关系便是直线方程。

指数函数

$$y = ae^{bx} \tag{1-1-4}$$

等式两端取自然对数，得：

$$\ln y = \ln a + bx$$

令 $z = \ln y$，$z_0 = \ln a$，则上式变为：

$$z = z_0 + bx$$

z和x的关系便是直线方程。

这一类的非线性数学模型很多，经过适当的变量置换都可化为直线方程。

在非线性数学模型中有些是可化为多元线性模型的。只要可化为多元线性模型，便可以采用多元线性回归分析法来求得模型参数。例如多项式模型便可化为多元线性模型，设多项式模型为：

$$y = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \tag{1-1-5}$$

令$x_i = x^j$，$a_i = a_j$代入上式，则得：

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$$

这便是多元线性模型。

设有如下的非线性方程

$$y = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_1^2 + b_4 z_1 z_2 + b_5 z_2^2 + \cdots \tag{1-1-6}$$

令 $x_1 = z_1$，$x_2 = z_2$，$x_3 = z_2$，$x_4 = z_1 z_2$，$x_5 = z_2^2 \cdots$代入上式，得：

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + \cdots$$

这便是多元线性模型。

更一般的情况，设非线性模型为：

$$y = b_0 + b_1 f_1(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_k) + b_2 f_2(z_1, z_2, \cdots z_k) + \cdots + b_n f_n(z_1, z_2, \cdots, z_k) \qquad (1\text{-}1\text{-}7)$$

式中所有 $f_i(z_1, z_2, \cdots, z_k)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是自变量z_i 的已知函数，不包含未知量。在这种情况下就可以令 $x_i = f_i(z_1, z_2,\ \cdots,\ z_k)$代入上式，便可将其化为多元线性模型：

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n$$

最一般的非线性模型为

$$y = f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{b}) \qquad (1\text{-}1\text{-}8)$$

式中 $\boldsymbol{X} = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T$

$\boldsymbol{b} = [b_1 b_2 \cdots b_m]^T$

这种非线性模型，在数值计算中可以用逐次逼近或逐次线性化的方法来处理。

第 2 节 单变量线性系统的动态数学模型

一、系统动态数学模型的分类

（一）线性与非线性模型

常微分方程是描述系统的一个重要工具。借助于系统的输入量$x(t)$和输出量$y(t)$之间的微分方程

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

及其初始条件：$\dfrac{d^i y}{dt^i}$，$i = 0, \cdots, n-1$在$t = 0$点的值，来描述系统的特性，在经典力学和经典控制论中都起着重要的作用。

如果式(1-2-1)的系数 a_i，b_j 都不是x，y及它们的导数的函数，则称它为线性的。如果a_i，b_j 是常数，则称为线性时不变的。这种线性时不变的情况在数学上是容易处理的。如果这些系数a_i, b_j 是时间t的函数，就称为线性时变模型。反之，如果 a_i, b_j