

61102

材 料 力 学

下 册

材 料 力 学 教 研 组 编

西安交通大学

1960

对

第二篇 彈性系統的穩定性

彈性系統的穩定性問題，在工程設計中具有很大的實際意義。

對於承受拉伸的直杆和均勻內壓的薄壁容器，自加力開始迄至破壞發生，並不改變其平衡狀態[如圖(11-1a)所示]，破壞是由于構件強度不足而引起的。但在相反的情況下，如一細長的受壓杆件，或上述容器(壳体)



圖 11-1 (a)

(b)

承受外壓時，情況將完全改變。此時，當外力增至某一定數值以後，杆將喪失其直線的平衡狀態而發生彎曲變形，以致損壞；壳体也會喪失其原來的平衡狀態而喪失承載能力(圖11-1b)。類似以上的問題也發生在薄板等類型的結構中，這些都稱之為穩定問題。在穩定問題中，構件承載能力的喪失，不盡然是出于強度不足所引起的，而是由于構件失去其原有的平衡狀態而引起的。

在近代工程結構中，為了減輕構件的重量和合理的使用材料，杆、板、壳等類輕型結構得到了廣泛的使用，穩定已成為一個極其重要的問題，它的研究對我國的社會主義建設事業具有重大的意義。

近世紀來，在研究和發展穩定性理論的領域中，蘇聯的科學家和工程技術人員作出了巨大的貢獻。在規模宏大的社會主義和共產主義建設事業中，提出了各種各樣的穩定問題，如：高水壩，連拱壩的穩定，大型橋梁和廠房結構中的穩定性、航空結構以及大型機械中某些重要部件的穩定性問題等等，它促進了這門科學的發展並在蘇聯取得特別輝煌的成就。

由於我國社會主義建設事業的突飛猛進，穩定問題在建築事業中已愈顯得其重要，可以深信，隨着我國社會主義建設事業的高速度發展，在穩

定問題的領域中，我們必將作出巨大的貢獻，并取得光輝的成就。

在本篇內，由于材料力学課程討論問題的限制，主要討論压杆的穩定性問題，并簡單的介紹一些在机械工程方面可以遇到的其他穩定問題。

第十一章 压杆的临界力計算

§ 11-1 基本概念：

观察如图(11-2)所示的系统，該系統由彈簧 AB 和剛杆 AO 所組成，彈簧的剛度系数为 C ，現研究系統在垂直力 P 作用下的平衡情况。

假設由于干扰的作用，使 A 点产生一个微小的偏移 y ，由于彈簧的影响， A 点除垂直力 P 外，尚作用有水平方向的彈性恢复力 cy ，这二个力对铰鏈 O 的力矩

$$M_o = py - c y l = (P - cl)y。$$

現考察 P 力大小对于平衡状态的影响。

設 $P < cl$,

这时，彈簧所产生的恢复力矩大于 P 力对 O 之矩，故一旦发生偏移，即自行恢复至平衡位置 AO 。如果 P 力逐漸增大至 $P = cl$ ，这时，不論 y 为何值，只要 y 相当小，系統总能保持平衡。若 $P > cl$ ，則不論 y 多么小，系統將喪失平衡，偏移繼續增大，直到一个新的平衡位置时为止。

上述系統在 $P < cl$ 下的平衡，称之为稳定平衡，第二种情况叫作随遇平衡，最后一种为不稳定平衡。

压力 $P = cl$ 的值，表征着系統自稳定平衡轉至不稳定平衡的临界值，称之为临界力，以 P_K 表示之。

类似情况，也发生在彈性系統方面，以細长压杆为例，压力 P 对杆件平衡状态的影响，和上述情况完全类同。如图(11-3)所示，当 P 力較小时，若給桿以一个微小的干扰，杆件在离开其直綫平衡位置后，稍作振动，即回復其原来状态，这时，杆件处于稳定平衡状态。如加大 P 力并达到某一数值时，杆能在任意微小弯曲的变形位置保持平衡，它处于随遇平衡状



图 11-2

态, 对应的压力 P 便是临界力 P_K 。当 P 力超过临界力以后, 杆能自直线状态发生突然的弯曲, 并不再恢复原状, 此时杆件丧失了稳定。

杆件自稳定平衡转到不稳定平衡是突然发生的, 只要使力 P 稍低于 P_K , 便能保持系统的稳定平衡状态。在工程结构中, 要求构件时时保持稳定的平衡状态, 故临界状态是结构的危险状态, 临界力 P_K 是危险载荷。

§ 11-2 临界力, 欧拉公式:

压杆的临界力计算是欧拉在1744年首先解得的。

现在来研究一个二端球铰的等截面直杆(图11-4), 其长度为 l , 最小刚度为 EJ , 不计杆的自重, 计算其临界力 P_K 之值。

假设把轴向压力 $P=P_K$ 作用于杆的二端, 杆件处于随遇平衡状态, 此时, 杆可以在最小刚度平面发生微小的弯曲并保持平衡。如把座标原点选在左支座, 应用直杆弯曲时的挠曲轴近似微分方程式。

$$EJy'' = M(x)$$

对于任一距座标原点为 x 的截面上的弯矩

$$M(x) = -Py,$$

在上式中 y 是杆在 x 截面处的挠度, 引入负号, 是由于座标 y 与弯矩 M 间的符号相反所致。于是微分方程式变成:

$$EJy'' + Py = 0; \quad (11-1)$$

将方程除以 EJ 并把分数 $\frac{P}{EJ}$ 用 k^2 来表示, 上列方程便变为

$$y'' + k^2y = 0$$

这方程的通解是

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (11-2)$$

方程的解中包含两个未知常数 C_1, C_2 以及 $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ 中需求的 P 值。

我们可以根据杆件在临界状态下的基本特征及其支座条件, 来确定这些未知数。



图 11-3



图 11-4

杆的支座条件为:

$$1. \text{ 当 } x=0, y=0,$$

$$2. \text{ 当 } x=l, y=0.$$

由第一个条件中得:

$$C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 0$$

它给出 $C_2=0$, 而第二个支座条件给出 $C_1 \sin kl=0$

对于上式, 取 $C_1=0$ 或 $\sin kl=0$ 皆能满足, 如果取 $C_1=0$, 则杆轴上任意一点的挠度都为零, 即杆保持直线状态而不发生弯曲。这和问题的前提不合, 应改取 $\sin kl=0$ 。由此可得

$$k = \frac{n\pi}{l} \quad (n=0, 1, 2)$$

而临界力 P 便可以公式

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (11-3)$$

确定之。由式 (11-3) 可见, 能够使细长压杆保持随遇平衡的荷重, 在理论上可以有很多值, 但从实用的观点来看, 重要的是最小值, 所以应当取最小 n 值。

如果取 $n=0$, 则 $P=0$, 这一个零解不符合问题的要求, 故取 $n=1$, 于是得

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (11-4)$$

式中 EJ 是横断面的最小刚度。以上是二端铰支的压杆的欧拉公式。与临界力数值 (11-4) 式相当的杆件变形形式是一个半波的正弦曲线。

$$y = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (11-5)$$

式中含有一个任意参数 C_1 , 由于杆处于随遇平衡, 故 C_1 是一个能在微小区间变动的不定值, 其数值应使 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 远小于 1, 俾满足利用挠曲轴近似微分方程式解稳定问题的要求。

这里值得一提的是稳定问题的研究方法。稳定问题是在给定杆件的几何尺寸和支座条件下, 决定临界力 P_k 。由上述讨论可知, 在计算 P_k 时必须引用随遇平衡的概念。

§11-8 杆端固定方法的影响

式 (11-4) 是积分二端铰支压杆的挠曲轴微分方程而得, 该式只适用

于二端铰支的条件, 对于不同的支座形式, 临界力的数值亦不同。

现取一根一端固定, 一端自由的压杆, 计算其临界力 P_K 。如图(11-5)所示, 应用与上一节相同的方法, 求得微分方程式

$$EIy'' + P(y-f) = 0 \quad (11-6)$$

而其通解为

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + f$$

式中: f 为自由端的挠度, $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, 其边界条件为:

$$1. \text{ 当 } x=0, y=0, y'=0,$$

$$2. \text{ 当 } x=l, y=f.$$

由此得:

$$\cos kl = 0, \quad \left(k = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{(n+1)\pi}{2} \right)$$

解出临界力

$$P_K = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \left(2.47 \frac{EI}{l^2} \right) \quad (11-7)$$

将式(11-7)与(11-4)相比, 其中仅相差一个系数。在一般情况下, 压杆的临界力公式可以写成为

$$P_K = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \left(\eta \frac{EI}{l^2} \right) \quad (11-8)$$

的形式。 μ 之值与支座条件有关, 称为长度系数, μl 称为相当长度。引入相当长度, 可以利用比较的方法, 计算压杆在其他支座条件下的临界力 P_K 。如对于一端固定一端自由的压杆而言, 它就相当于一长度为其二倍的铰支杆(见图11-6)。

对于其他支座形式不同的杆件, 可以应用上述相同的方法(分析法或比较法), 求出它们的临界力, 现将部分结果列表如下:



图 11-5



图 11-6

表 (11-1)

杆的 边界条件					
	I	II	III	IV	V
η	$\frac{l}{4} \pi^2 = 2.457$	$\pi^2 = 9.8696$	20.19	20.19	$4\pi^2 = 39.478$
μ	2	1	0.699	0.699	0.5

§ 11-4 稳定计算的近似方法——能量法

上述应用微分方程求积以计算临界力的方法，就其结果而言，是一个精确解。但这样一种方法只适用在某些特殊问题上，对于更一般的问题而言，常需借助近似计算来加以解决，能量法是其中使用简便，应用广泛的方法之一。

当压杆到达临界状态时，它可以以原来的平衡位置为准，在一个微小区域内发生弯曲变形，并保持平衡。此时，外力在弯曲变形时所做之功，就等于杆件变形位能的增加，若以 ΔU_1 表示外力所做之功， ΔU_2 表示弹性变形能的增量，于是

$$\Delta U_1 = \Delta U_2.$$

我们可以利用上式计算临界力 P_K 。

为了说明能量法的应用，仍取用一根二端铰支的压杆来讨论（图 11-7）。假设杆处于临界状态——随遇平衡，今使杆产生一个弯曲变形，由于压力 P 不变，故压缩变形能不变，杆件变形能的增加是由于弯曲而引起的，故

$$\Delta U_2 = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EI} = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l y^2 dz,$$

而当弯曲变形时，滑动支座 A 的轴向位移

图 11-7

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx \quad (11-9)$$

故外力 P 所做之功

$$\Delta U_1 = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx$$

如对于二端铰支的压杆，其挠曲轴方程式为

$$y = c \sin \frac{\pi x}{l}$$

将其微分一次并代入以上二式，根据 $\Delta U_1 = \Delta U_2$ ，使得

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{EJ \int_0^l (y')^2 dx}{\int_0^l y^2 dx} \\ &= \frac{EJ \int_0^l \left(\frac{c\pi}{l} \cdot \cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx}{\int_0^l \left(c \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx} \\ &= \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \end{aligned}$$

在上例中，由于选用了正确的挠曲轴方程式，我们得到了临界力的精确解。在一般情况下，当挠曲轴为未知时，应用能量法可以近似地计算临界力，这时，可首先假定挠曲轴的形状，所假定的曲线，必须适合杆端的支座条件，当所假定的曲线，愈近于真实变形，其结果也愈精确。一般而言，这种由假定曲线得出的计算结果，常比真正的临界值为高。

§ 11-5 偏心加载和初曲率的影响：

以上我们讨论了直杆在轴向压力 P 作用下，压杆的稳定问题。在工程实际中，由于制造和安装等多种原因，加载的偏心和压杆初曲率的存在，实际上是难以完全避免的，只是程度不同而已，为了估计它们对杆件稳定的影响，今用能量法分别加以讨论之。

(一) 偏心加载的影响：

取一两端铰支的直杆，设载荷的偏心距为 e ，由于偏心距的影响，在

由图(11-7)可见因为 $d(\Delta) = ds - dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} = (\sqrt{1 + y'^2} - 1) dx$

把根式依级数展开并略去 y' 的高阶微量，得

$$\sqrt{1 + y'^2} = 1 + \frac{1}{2} y'^2, \text{ 所以 } \Delta = \int_0^l d(\Delta) = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx$$

P 力作用下 ($P < P_k$), 杆件将发生弯曲变形, 并处于平衡状态。

取挠曲轴的曲线为正弦曲线,

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l},$$

于是弯曲变形位能等于

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} f^2.$$

外力 P 在杆件弯曲时所引起的相对位移

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx + 2e \cdot y'_0.$$

$$= \frac{\pi^2 f^2}{4l} + 2ef \cdot \frac{\pi}{l}.$$



图 11-8

式中, 第一项是因支座相对移动而产生的 P 力位移, 第二项是因偏心距而产生的力 P 的位移。外力之功为

$$A_P = P \cdot \Delta = P \left[\frac{\pi^2 f^2}{4l} + 2ef \cdot \frac{\pi}{l} \right].$$

为了计算 P 力的增加对杆件挠度的影响, 设将 P 增加一 dP , 杆件产生一附加挠度 df , 并处于平衡状态, 由此而引起的弯曲变形位能的增加为

$$dU = \frac{\pi^2 EI}{4l^3} f \cdot df.$$

略去高级微量, 可求得外力的功的增量,

$$dA_P = P \left[\frac{\pi^2 f}{2l} df + 2e \frac{\pi}{l} df \right].$$

由 $dU = dA_P$ 可以得到作用力 P 和最大挠度 f 之间的关系为

$$f = \frac{4l}{\pi} \cdot \frac{P}{P_k} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{P}{P_k}\right)} \quad (11-10)$$

式中 P_k 是欧拉临界力。

(二) 初曲率的影响,

我们可以完全采用与上相同的方法来解决这样一个问题。设因初曲率的影响, 在加力以前, 其变形方程为:

$$y_0 = y_0 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

力作用以后, 由于初曲率 y_0 , 杆件承受弯曲, 其变形加大是(图 11-9)。设此时变形方程为

$$y = (y_0 + f) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

梁弯曲变形能应根据弯曲变形来计算, 故

$$U = \frac{\pi^4 EJ}{4l^3} \cdot f^2.$$

在加力时, 支座之间的相对位移

$$\Delta = \frac{\pi^2}{4l} (f + y_0)^2 - \frac{\pi^2}{4l} \cdot y_0^2 = \frac{\pi^2}{4l} (f^2 + 2f \cdot y_0).$$

图 11-9

若外力加一增量 ΔP , 杆件便增加一挠度, 应用和前面相同的方法, 求得

$$\Delta A_P = P \cdot \Delta \Delta = \frac{\pi^2 \pi^2}{2l} (f + y_0) df,$$

$$\Delta U = \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} f \cdot df.$$

由

$$\Delta A_P = \Delta U$$

求得

$$f = \frac{Py_0}{\frac{EJ\pi^2}{l^2} - P} = \frac{y_0 \frac{P}{P_K}}{1 - \frac{P}{P_K}} \quad (11-11)$$

而挠曲轴方程

$$y = (f + y_0) \sin \frac{\pi x}{l} = \left[\frac{y_0 \frac{P}{P_K}}{1 - \frac{P}{P_K}} + y_0 \right] \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{y_0 \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \frac{P}{P_K}}. \quad (11-12)$$

当 $x = l/2$,

$$y = y_{\max} = \frac{y_0}{1 - \frac{P}{P_K}} \quad (11-13)$$

由公 (11-10) 及 (11-11) 可见, 当 P 趋近于直杆的欧拉临界力 P_K 的时候, 杆的挠度急速增长, 从而引起变形的剧烈增加, 因此, 我们仍然可以把欧拉临界力 P_K 作为其破坏荷重, 而认为偏心距和初曲率都不影响杆件受轴向压缩时的破坏荷重之值。

上述结论, 为实际结果所证实, [(11-10) 系根据不同试验所给出的

挠度 f 和压力 P 之间的关系, 其中以卡曼所做試驗最为精确, 其結果和理論分析最相接近。当作压杆稳定实验时, 由于在实际上不可避免地会存在着加载偏心和初曲率的影响, 为了得到较精确的结果, 对支座設計和試件加工的要求都应该比较高, 否則, 所得的結果可以具有很大的誤誤。



图 11-10

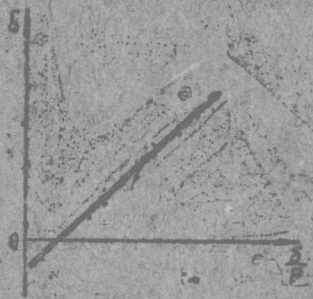


图 11-11

由于压杆的初曲率和加载偏心都是难以完全避免的, 支座亦很难做到是完全理想的, 要想用試驗来确定临界力, 实际上有一定的困难, 但是我們可以将不利情况变为有利条件, 利用初曲率和加载偏心能产生弯曲变形这样一个事实, 来求取临界力 P_K 。事实上当杆件兼有初曲率和偏心影响时, 由方程式(11-10)和(11-11)可知, 杆的中点在弯曲变形时引起的挠度

$$f = \left(y_0 + \frac{4l}{\pi} \right) \cdot \frac{\frac{P}{P_K}}{1 - \frac{P}{P_K}}$$

$$= \left(y_0 + \frac{4l}{\pi} \right) \cdot \frac{1}{\frac{P_K}{P} - 1}$$

把上式写成

$$\delta = P_K \frac{\delta}{P} - \left(y_0 + \frac{4l}{\pi} \right) \cdot$$

由試驗測得 P 与 δ 。以 δ 为纵坐标, $\frac{\delta}{P}$ 为横坐标, 則上式为一直线方程, 把实验点联成直线, 該直线的斜率即为 P_K , 常数項 $\left(y_0 + \frac{4l}{\pi} \right)$ 在此不起作用, 亦即在試驗时, 无须預先知道偏心距以及由于初曲率而引起的中点挠度之值。

第十二章 超过比例极限时的临界力计算

§ 12-1 概述，欧拉公式的应用范围

欧拉公式是于1744年提出的，由于当时工业水平的限制，建筑上所用大都系磚木结构，构件尺寸也較粗笨，設計是按許用应力进行的，似无应用欧拉公式的必要，故在相当长的时期内，欧拉公式只被认作是数学上的一种妄想。直到十九世紀下半叶，由于工业的迅速发展，在建筑方面广泛地使用了鋼结构，因为鋼的强度远較磚、木为高，故鋼制杆件，往往是比较細长，但由于当时設計观点的局限性，沒有計及到这类杆件丧失稳定的可能性，故在建筑上曾发生了一系列的事故，这些事故引起了人們对于稳定問題的注意，使欧拉公式终于得到了重視，但根据公式的計算結果，欧拉临界力 P_K 之值祇取决于杆件的几何尺寸及材料的彈性系数，而与材料的强度无关，它与某些杆件的破坏現象又有矛盾，对这些杆件而言，破坏确是由于材料强度不足（应力达到屈服极限）而发生的。这些事实，同样引起了人們对于欧拉公式的怀疑，直到1889年后，爱格赛和卡曼等在理論上和实验上确定了欧拉公式的应用范围以后，問題才得到最的解决。

事实上，彈性曲綫的微分方程式(11-1)，只是在杆件变形服从虎克定律时，才是适用的，故据此方程解得的欧拉公式(11-8)，只是当应力不超比例极限时，才能应用。

现将欧拉公式(11-8)的两边都除以杆的横截面面积 F ，得到

$$\sigma_K = \frac{P_K}{F} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 F} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (12-1)$$

式中： $\sigma_K = \frac{P_K}{F}$ 称为临界应力， i 是慣性半径， $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ 称为压杆的柔度，它在压杆的稳定計算中起着非常重要的作用。

于是，据上所述，只有当 σ_K 小于 σ_n 时，方程(12-1)才是有效的。設当 $\sigma_K = \sigma_n$ 时， $\lambda = \lambda_n$ ，于是

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_n}}$$

故只有当杆件的柔度 λ 大于 λ_n 时，（称为大柔度杆），我們才能够应用

欧拉公式计算临界力。此时， σ_K 与 λ 之间的关系，可根据公式(12-1)，在 $\sigma_K - \lambda$ 坐标平面内用一根双曲线表示，如图(12-1)所示。

实践证明，当 $\lambda < \lambda_n$ 时，杆件的临界力比根据公式(12-1)的计算结果要小。

对于同一材料而言， λ_n 是一个常数例如 3 号钢 $\sigma_n = 2000 \text{ kg/cm}^2$ ， $\lambda_n = 100$ ，松木的 $\lambda_n = 110$ ，而铸铁的 $\lambda_n = 80$ 。



图 12-1

§12-2. 超过比例极限时的临界应力计算

由材料的机械性能试验可知，当超过比例极限以后，应力和变形之间，不再保持正比关系，在此非线性阶段，曲线上任一点的斜率

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

称为切线模量。

1889 年爱格赛 (Engesser, F.) 首先提出，若将欧拉公式中的弹性系数 E ，换以切线模量 E_t ，便能用来计算超弹时的临界应力 σ_K ，即

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \dots (\lambda < \lambda_n) \quad (12-2)$$

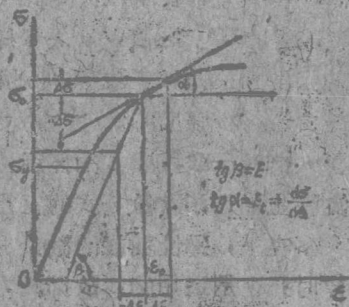


图 12-2

由于这时 E_t 是 σ_K 的函数，上式不能用以直接计算临界应力 σ_K ，但可按设计要求，先给定临界应力 σ_K ，并从 $\sigma - \varepsilon$ 图确定切线模量 E_t ，应用公式(12-2)，可自式

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_K}}$$

决定杆件的几何尺寸。

爱格赛公式提出不久，从杆件的临界状态是随遇平衡的这一个概念出发，把它用到超过比例极限的条件之下，按这样一个概念，当压力加压起始时，杆件保持直线状态，整个截面承受压缩，当杆件到达临界状态并产生一个微小的弯曲变形时，其截面的一侧受压，另一侧受拉，形成加载和卸载二个区域。在其受压部分，变形继续增加，但应力与变形不再成直线关系，需按压缩图加以决定，在受拉一侧，形成卸载区，应力的变化和变形

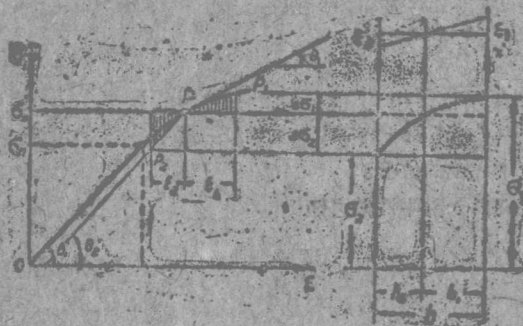


图 12-3

的变化仍保持线性关系，其比例常数接近于比例极限系数 E 。这两个区间的应力改变，如图 (12-3) 所示。爱格赛的切线模量公式，不能从实际出发反映上述这样一个概念，因而被认为是错误的。考虑到这种情况，卡曼与爱格赛建立了缩减模量理论，这时，临界应力的计算公式表示成：

$$\sigma_{\pi} = \frac{\pi^2 E_c}{\lambda^2}, \quad (12-3)$$

式中， E_c 称为缩减模量，它与截面形状和材料性质有关，如对于矩形截面，

$$E_c = \frac{4E_1 E}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E})^2}. \quad (12-4)$$

卡曼公式 (12-3) 的证明：

设直杆开始丧失稳定并产生一小弯曲变形。如果假定：在超过比例极限以后，直杆弯曲时其横截面仍保持平面，于是纵向变形

$$\Delta s = \frac{y}{\rho} \quad (12-5)$$

式中， y 是纵向纤维距中性轴之距。

如弯曲变形很小，则其受压部分各点的应力变化 $\Delta \sigma$ 可近似地按式

$$\Delta \sigma = E_c \Delta s$$

计算，而卸载区的应力改变量为：

$$\Delta \sigma = E \cdot \Delta s$$

杆横截面上的应力分布规律如图 (12-4) 所示。

由于压杆丧失稳定时，压力 P 不变，故对于应力的改变部分，满足方程

$$\int \Delta \sigma d f = 0,$$

把前述二式代入，得

$$-\int_{F_1} E_1 \cdot \frac{s}{\rho} \cdot dF + \int_{F_2} E_2 \cdot \frac{s}{\rho} \cdot dF = 0,$$

简化后得

$$E_1 S_1 = E_2 S_2 \quad (12-4)$$

式中 S_1, S_2 是面积和 F_1 对 F_2 中性轴 $n-n$ 之静矩。上式可用以求取中性轴的位置。

现再计算应力改变部分对中性轴之矩

$$\begin{aligned} M &= \int_F \Delta \sigma \cdot z \cdot dF = \int_{F_1} E_1 \cdot \frac{z^2}{\rho} dF + \\ &+ \int_{F_2} E_2 \cdot \frac{z^2}{\rho} dF \\ &= \frac{1}{\rho} (E_1 J_1 + E_2 J_2). \end{aligned}$$

J_1, J_2 是面积 F_1, F_2 对中性轴之矩，把上式写成

$$E = E_1 \cdot J_1 + E_2 \cdot J_2 \approx E \cdot J,$$

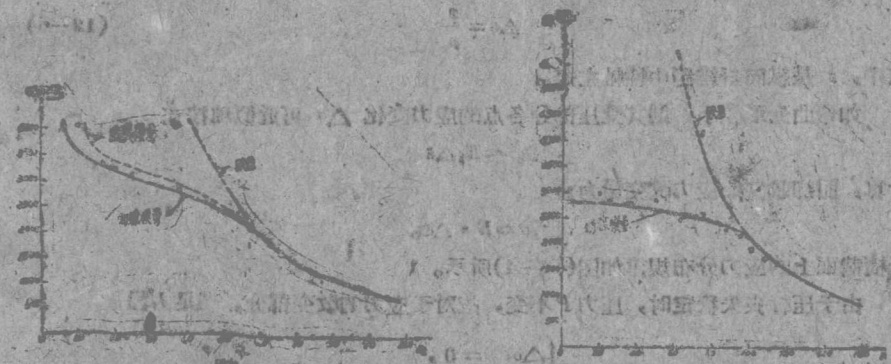
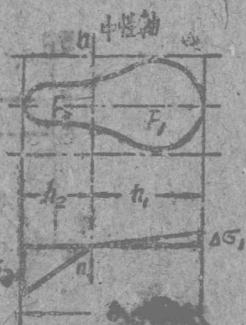
其中， $E = \frac{E_1 J_1 + E_2 J_2}{J}$ 即为截模量， J 是 F 对截面中心轴的惯性矩，其值与截面形状和材料性质有关。

因为 $M = -Py$ ，故最后可得微分方程式

$$E_r J y'' + Py = 0 \quad (12-7)$$

解此方程，便得卡门公式 (12-3)。

卡曼公式提出后，就被认为是正确的，但近年来的实验结果表明，临界力的实验数据，比较接近于切线模量理论，而低于卡曼公式的计算结果，如图 (12-5) 所示。



a) 图

图 12-5

b) 图

这一事实引起了人们的注意，并作了进一步的研究，现在已经有了新的阐明，即认为：当应力超过比例极限时，压杆稳定性的丧失，是由于载荷增加至某一数值后杆件发生弯曲而引起的。在这一过程中，杆件始终处于加载状态，截面上的卸载区域并不存在，这样，应用切线模量理论，便可以求出在上述含义下的临界力之值。

如果材料是有屈服极限的，则对于一些较短杆件的压缩，破坏是由于材料的屈服而引起的，因此当 λ 较小时（短杆），危险应力 σ^0 就等于 σ_{Te} 。对于不同柔度下的 $\sigma_K - \lambda$ 的关系，如图(12-6)所示。



图 12-6

§12-8 根据经验公式和工程规范的稳定计算：

对于超过比例极限时的临界力计算，不论是根据卡曼公式，或是切线模量理论，都需要先绘制材料的压缩图，并作出精密的计算。这对设计计算工作带来很大的不便，并且在工程计算上，也没有这样精确的比要，故实用上，在 $\sigma_K = \sigma_K$ 和 $\sigma_K = \sigma_K$ 区间的临界应力计算，一般是在实验的基础上，采用经验公式以代替精确的计算。

在这些公式中，以雅兴基所提出的直线公式

$$\sigma_K = a - b\lambda$$

应用最为广泛，式中 a 和 b 是两个常数，依材料而異，表(12-1)中所列，为部分工程材料的 a 、 b 之值。

(表12-1)

材 料	a	b
3号钢	3100	11.4
5号钢	4640	36.17
铬 钢	5890	58.17
木 材	1293	1.94

对于铸铁，可改用抛物线公式

$$\sigma_K = 7760 - 120\lambda + 0.53\lambda^2$$

习惯上,常将 $\lambda < \lambda_{\text{E}}$ 的杆称为大柔度杆,对于临界应力超过比例极限 σ_{p} 但低于屈服极限 σ_{T} 的杆称为中柔度杆,而从屈服极限作为危险应力的杆,叫作小柔度杆。中柔度杆是在建筑设计中最常见的杆。显然,对于柔度不同的杆应采用不同的计算公式。对大柔度杆

$$\sigma_{\text{K}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

中柔度杆

$$\sigma_{\text{K}} = a - b\lambda,$$

小柔度杆

$$\sigma^0 = \sigma_{\text{T}0}.$$

引入稳定时的安全系数 n_y , 便得许用应力

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{\text{K}}}{n_y}, \quad (12-9)$$

我们可以据此以进行压杆的稳定计算。

苏联在建筑设计方面的现行规范中, 常应用公式:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \varphi \quad (12-9a)$$

或

$$\sigma_2 = \frac{N}{\varphi F} \leq [\sigma] \quad (12-9b)$$

进行稳定计算。式中, $[\sigma]$ 是压缩时的基本许用应力, φ 称为基本许用应力的折减系数, σ_2 称为计算应力, 根据式(12-8)和(12-9), 求出

$$\varphi = \frac{\sigma_{\text{K}}(\lambda)}{[\sigma] n_y},$$

由上式显然可见, φ 与柔度 λ 有关, 对于不同 λ 所取的折减系数 φ , 与所选的设计规范有关, 但各规范之间, 很相接近。今选取其一列于附表(12-1)中。

应用公式(12-9)作压杆的稳定计算时, 面积 F 可以不考虑由于铆接等所引起的局部削弱影响。为了保证强度, 对于断面有削弱部分的杆件, 还须按公式

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{净}}} \leq [\sigma] \quad (12-10)$$

进行强度计算, 式中 $F_{\text{净}}$ 表示考虑削弱影响时的净面积。

计算举例: