

高等学校试用教材

# 数学分析

下册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 编  
朱学炎 欧阳光中

人民教育出版社

高等学校试用教材

# 数 学 分 析

下 册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 编  
朱学炎 欧阳光中

人 民 教 育 出 版 社

本书是在复旦大学数学系陈传璋等五同志1962年所编《数学分析》的基础上,根据理科数学教材会议精神改写的。本书为下册,内容有 1. 多变量微分学:包括偏导数、全微分、极值理论、隐函数存在定理和函数相关的概念等; 2. 多变量积分学:包括含参变量的积分、重积分、曲线积分、曲面积分、场论初步等; 3. 级数论:包括数项级数与广义积分、函数项级数和含参变量的广义积分、富里埃级数等。

本书可作为综合大学和师范院校数学系的试用教材。

高等学校试用教材

## 数 学 分 析

下 册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 编  
朱学炎 欧阳光中

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行  
武汉市江汉印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张11 14/16 字数 286,000

1979年5月第1版 1979年12月湖北第1次印刷

印数 1—26,000

书号13012·0362 定价0.86元

# 目 录

## 第三篇 多变量微积分学

### 第一部分 多变量微分学

第十章 偏导数与全微分	1
§ 1. 偏导数和全微分的概念	1
一、偏导数的定义	1
二、全微分的定义	4
三、高阶偏导数与高阶全微分	7
习题	10
§ 2. 求复合函数偏导数的链式法则	11
习题	17
§ 3. 由方程(组)所确定的函数的求导法	18
一、一个方程 $F(x, y, z)=0$ 的情形	18
二、方程组的情形	20
习题	24
§ 4. 空间曲线的切线与法平面	26
习题	30
§ 5. 曲面的切平面与法线	30
习题	33
§ 6. 方向导数和梯度	34
一、方向导数	34
二、梯度	36
习题	40
§ 7. 泰勒公式	41
习题	42
§ 8. 向量值函数的导数	43

一、向量值函数的概念	43
二、向量值函数的导数	45
习题	51
<b>第十一章 极值与条件极值</b>	<b>52</b>
§ 1. 极值与最小二乘法	52
一、极值	52
二、最小二乘法	58
习题	61
§ 2. 条件极值	62
习题	69
<b>第十二章 隐函数存在定理、函数相关</b>	<b>71</b>
§ 1. 隐函数存在定理	71
一、 $F(x, y) = 0$ 情形	71
二、多变量及方程组情形	76
习题	80
§ 2. 函数行列式的性质、函数相关	82
一、函数行列式的性质	82
*二、函数相关	84
习题	90

## 第二部分 多变量积分学

<b>第十三章 含参变量的积分</b>	<b>91</b>
习题	97
<b>第十四章 积分(二重、三重积分, 第一类曲线、曲面积分)的定义和性质</b>	<b>99</b>
§ 1. 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念	99
§ 2. 积分的性质	104
习题	106

第十五章 积分的计算及应用	107
§ 1. 二重积分的计算	107
一、化二重积分为二次积分	107
二、用极坐标计算二重积分	114
三、二重积分的一般变量替换	117
习题	126
§ 2. 三重积分的计算	128
一、化三重积分为三次积分	128
二、三重积分的变量替换	132
习题	138
§ 3. 第一类曲线积分的计算	139
习题	142
§ 4. 第一类曲面积分的计算	142
一、曲面的面积	142
二、化第一类曲面积为二重积分	147
习题	150
§ 5. 积分在物理上的应用	150
一、质心	150
二、矩	158
三、引力	155
习题	157
§ 6. 第二类曲线积分	158
一、变力作功与第二类曲线积分的定义	158
二、第二类曲线积分的计算	162
三、两类曲线积分的联系	167
习题	170
§ 7. 第二类曲面积分	171
一、曲面的侧的概念	171
二、第二类曲面积分的定义	173
三、两类曲面积分的联系及第二类曲面积分的计算	175
习题	182

<b>第十六章 各种积分间的联系和场论初步</b> .....	183
§ 1. 各种积分间的联系.....	183
一、格林 (Green) 公式.....	183
二、高斯 (Gauss) 公式.....	186
三、斯托克司 (Stokes) 公式.....	190
习题.....	194
§ 2. 曲线积分和路径的无关性.....	197
习题.....	203
§ 3. 场论初步.....	204
一、场的概念.....	204
二、向量场的散度与旋度.....	206
*三、保守场与管量场.....	216
*四、算子 $\nabla$ .....	219
习题.....	221

## 第四篇 级数论

### 第一部分 数项级数和广义积分

<b>第十七章 数项级数</b> .....	223
§ 1. 预备知识: 上极限和下极限.....	223
习题.....	226
§ 2. 级数的收敛性及其基本性质.....	227
习题.....	233
§ 3. 正项级数.....	233
习题.....	240
§ 4. 任意项级数.....	241
一、绝对收敛级数.....	241
二、交错级数.....	243
三、阿贝尔 (Abel) 判别法和狄立克莱判别法.....	245
习题.....	250
§ 5. 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质.....	251

习题	258
*§ 6. 无穷乘积	258
习题	264
<b>第十八章 广义积分</b>	<b>265</b>
§ 1. 无穷的广义积分	265
一、无穷限广义积分的概念	265
二、无穷限广义积分和数项级数的关系	269
三、无穷限广义积分的收敛性判别法	270
*四、阿贝尔判别法和狄立克莱判别法	272
习题	276
§ 2. 无界函数的广义积分	277
一、无界函数广义积分的概念, 柯西判别法	277
*二、阿贝尔判别法和狄立克莱判别法	280
习题	281
§ 3. 广义重积分	282
习题	286

## 第二部分 函数项级数和含参变量广义积分

<b>第十九章 函数项级数、幂级数</b>	<b>288</b>
§ 1. 函数项级数的一致收敛	288
一、函数项级数的概念	288
二、一致收敛的定义	289
三、一致收敛级数的性质	295
四、一致收敛级数的判别法	297
习题	301
§ 2. 幂级数	303
一、收敛半径	303
二、幂级数的性质	307
三、函数的幂级数展开	308
习题	315
§ 3. 逼近定理	317

习题	320
<b>第二十章 含参变量的广义积分</b>	<b>321</b>
一、一致收敛的定义	321
二、一致收敛积分的判别法	322
三、一致收敛积分的性质	323
四、欧拉 (Euler) 积分	327
*五、阿贝尔判别法、狄立克莱判别法	328
习题	332
<b>第二十一章 富里埃级数和富里埃变换</b>	<b>334</b>
§ 1. 富里埃级数	334
一、富里埃级数的引进	334
二、三角函数系的正交性	335
三、富里埃系数	336
四、狄立克莱积分	338
五、黎曼引理	340
六、狄尼 (Dini) 判别法及其推论	344
*七、狄立克莱-约当判别法	346
八、富里埃级数的一致收敛性	348
九、函数的富里埃级数展开	348
十、周期为 $T$ 的函数的展开	352
十一、富里埃级数的复数形式	354
*十二、富里埃级数的逐项求积和逐项求导	358
习题	361
§ 2. 富里埃变换	364
一、富里埃变换的概念	364
二、富里埃变换的一些性质	368
习题	369
<b>索 引</b>	<b>370</b>

# 第三篇 多变量微积分学

## 第一部分 多变量微分学

### 第十章 偏导数与全微分

#### § 1. 偏导数和全微分的概念

##### 一、偏导数的定义

对一元函数  $f(x)$ , 我们讨论了它关于  $x$  的导数, 也就是  $f(x)$  关于  $x$  的变化率, 或者说是  $f(x)$  沿  $x$  方向的变化率, 同时我们也看到了函数变化率的重要性. 对于多元函数, 同样需要讨论它的变化率, 但由于自变量的增多, 情况较一元函数复杂, 常常要考虑各个方向的变化率, 对此我们可以先考虑函数关于其中一个自变量的变化率, 以二元函数  $u=f(x, y)$  为例, 我们可以把  $y$  看作不变, 这时它就是  $x$  的一元函数, 对  $x$  求导, 所得导数就称为二元函数  $f(x, y)$  关于  $x$  的偏导数. 于是, 利用极限概念, 我们就可给出偏导数的定义:

**定义** 对函数  $u=f(x, y)$ , 如给  $x$  以增量  $\Delta x$ , 于是函数相应地得一改变量

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

若极限 
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

存在, 则此极限值就称为函数  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处关于  $x$  的偏导数, 记为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial x}$$

也可记为

$$f_x(x, y)$$

类似地, 如果极限

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

存在, 此极限值就称为  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处关于  $y$  的偏导数, 记为:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial y}$$

也可记为:

$$f_y(x, y)$$

同样, 对于二元以上的多元函数, 例如  $u = u(x, y, z)$ , 当只有自变量  $x$  变化而  $y, z$  固定时, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x}$$

是  $u$  关于  $x$  的偏导数.

由以上定义可见, 求  $f_x(x, y)$  只不过是求  $f(x, y)$  中把  $y$  看作常数, 而关于  $x$  求导数, 这时用的就是一元函数的求导公式和运算法则.

**例 1** 气体的状态方程为  $p = \frac{RT}{V}$ , 讨论  $p$  关于  $V$  和  $T$  的偏导数.

**解** 在温度  $T$  不变的等温过程中, 压力  $p$  关于体积  $V$  的瞬时变化率为  $p_V = \left(\frac{RT}{V}\right)_V = -\frac{RT}{V^2}$ ; 同样, 在体积  $V$  不变的等容过程中, 压力  $p$  关于温度  $T$  的瞬时变化率为  $p_T = \left(\frac{RT}{V}\right)_T = \frac{R}{V}$ .

**例 2** 设  $f(x, y) = xy + x^2 + y^3$ , 求  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , 并求  $f_x(0, 1)$ ,

$f_x(1, 0), f_y(0, 2), f_y(2, 0)$ .

解 求  $\frac{\partial f}{\partial x}$  时, 把  $y$  看成常量, 所以  $\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x, f_x(0, 1) = 1, f_x(1, 0) = 2$ ; 求  $\frac{\partial f}{\partial y}$  时, 把  $x$  看成常量, 所以  $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2, f_y(0, 2) = 12, f_y(2, 0) = 2$ .

例 3 设  $u = \ln(x + y^2 + z^3)$ , 求  $u_x, u_y, u_z$ .

解 三元函数的偏导数, 是只有一个自变量变化而其余自变量看作常量时函数的变化率, 因此,

$$u_x = \frac{1}{x + y^2 + z^3}, \quad u_y = \frac{2y}{x + y^2 + z^3}, \quad u_z = \frac{3z^2}{x + y^2 + z^3}$$

由一元函数可导必定连续的结论可知, 若  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  关于  $x$  (或  $y$ ) 可导, 则  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  关于  $x$  (或  $y$ ) 连续. 不过要注意, 此时并不能推出  $f(x, y)$  关于两个变量是连续的. 例如考虑下列函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

由偏导数的定义知道

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

同理可求得  $f_y(0, 0) = 0$ , 但在第四章中已经指出此函数当  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  时二重极限不存在, 因而它在  $(0, 0)$  点是不连续的.

我们知道, 如果一元函数在一点有导数, 那么这导数就是函数所表示的曲线在对应点的切线的斜率. 由此可以推出, 二元函数  $u = f(x, y)$  在一点  $(x_0, y_0)$  的偏导数有下面的几何意义 (图 10-1).

$u = f(x, y)$  的图形是空间中的曲面,  $M_0(x_0, y_0, u_0) = M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  是面上的点. 当  $y = y_0$  时,  $u_0 = f(x, y_0)$  表示曲面上过  $M_0$  点的一条曲线, 它是曲面  $u = f(x, y)$  和平面  $y = y_0$  的交线. 把它看作平面曲线, 其自变量是  $x$ , 因变量是  $u$ ,  $u$  关于

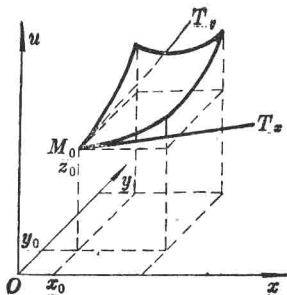


图 10-1

$x$  的导数  $f_x(x_0, y_0)$  正好是曲线在  $M_0$  点的斜率, 这样便得到曲线在  $M_0$  点的一个切向量  $T_x$ , 它在  $x$  轴和  $u$  轴上的坐标分别是 1 和  $f_x(x_0, y_0)$ , 并且它在平面  $y=y_0$  上, 即

$$x=x, y=y_0, u=f(x, y_0)$$

曲线在  $M_0$  点的切向量  $T_x$  为  $(1, 0, f_x(x_0, y_0))$ .

同样, 曲面和平面  $x=x_0$  的交线  $x=x_0, y=y, u=f(x_0, y)$  的切向量  $T_y$  为  $(0, 1, f_y(x_0, y_0))$ .

## 二、全微分的定义

对一元函数  $y=f(x)$ , 我们曾研究过  $y$  关于  $x$  的微分, 它具有两个特性, 即: (i) 它与自变量的改变量成比例, (ii) 当自变量的改变量趋于零时, 它与函数的改变量  $\Delta y$  之差是较自变量的改变量更高阶的无穷小.

现在我们讨论多元函数情形, 例如, 对二元函数  $u=f(x, y)$ , 我们也从同样的思想出发, 引进如下定义.

**定义** 若函数  $u=f(x, y)$  的全改变量  $\Delta u$  可表示为  $\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ , 且其中  $A, B$  与  $\Delta x, \Delta y$  无关而仅与  $x, y$  有关, 则称函数  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微, 并称  $A\Delta x+B\Delta y$  为  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的全微分, 记为  $du$  或  $df(x, y)$ , 即

$$du \equiv df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y$$

若  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微, 则有

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + o(\sqrt{\Delta x^2})}{\Delta x} = A \end{aligned}$$

这就是说在点  $(x, y)$  可微, 则  $f_x$  存在且等于  $A$ , 完全一样地可以证明此时  $f_y$  也存在且等于  $B$ , 故有

$$du = f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

前已指出自变量的改变量等于自变量的微分, 因之上式可写为

$$du = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

在这里,  $dx, dy$  表示任意的量, 并不依赖于  $x$  和  $y$ , 因此  $du$  实质上是依赖于  $x, y, dx$  和  $dy$  这四个变量的.

对  $n$  元函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  来说, 相应的公式是

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

以上说明若函数在一点可微, 则在该点也一定存在偏导数, 对一元函数而言, 我们知道反过来也是正确的, 但对二元函数就不尽然, 例如, 若

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

前已求出  $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$ .

此时

$$\begin{aligned} \Delta u - du &= [f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)] \\ &\quad - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y] = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{aligned}$$

但  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  不存在, 故函数  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  点不可微. 由此

可见, 对一元函数而言, 可微与可导是同一回事; 而对多元函数来说, 偏导数存在不一定可微, 但是在一定条件下, 偏导数与可微性之间有密切联系, 这就是下面的定理所指出的.

**定理** 若  $f_x(x, y)$  及  $f_y(x, y)$  在点  $(x, y)$  及其某一邻域内存在, 且在这一点它们都连续, 则函数  $u=f(x, y)$  在该点可微.

**证明** 我们把  $\Delta u$  写成如下形式,

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] \\ &\quad + [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] \end{aligned}$$

由于假设  $f_x$  及  $f_y$  均存在, 所以当  $\Delta x, \Delta y$  充分小时, 可以把中值定理分别应用于每一个差, 就有

$$\begin{aligned} \Delta u &= f_y(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) \Delta y + f_x(x + \theta_2 \Delta x, y) \Delta x \\ &\quad \left( 0 < \theta_1 < 1 \right) \\ &\quad \left( 0 < \theta_2 < 1 \right) \end{aligned}$$

又由假设  $f_x$  及  $f_y$  均在点  $(x, y)$  连续, 因而有

$$\begin{aligned} f_y(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) &= f_y(x, y) + \alpha \\ f_x(x + \theta_2 \Delta x, y) &= f_x(x, y) + \beta \end{aligned}$$

且  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$  时,  $\alpha, \beta$  都趋于零. 于是

$$\Delta u = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \beta \Delta x + \alpha \Delta y,$$

而  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$  时,

$$\frac{\beta \Delta x + \alpha \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0$$

由定义可知, 这就证明了  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微.

这个定理说明, 我们如果求得一个函数的偏导数, 且它们连续 (对于一般初等函数, 这是较易知道的), 从而也就可知此函数可微, 并且即可写出其微分.

**例 4** 设  $u = x^2y + xy^2$  则有

$$du = 2xydx + x^2dy + y^2dx + 2xydy = (2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy$$

**例 5** 写出  $f(x, y, z) = e^{x+z} \sin(x+y)$  的全微分.

这时,  $f_x = e^{x+z} [\sin(x+y) + \cos(x+y)]$

$$f_y = e^{x+z} \cos(x+y), f_z = e^{x+z} \sin(x+y)$$

于是  $df = e^{x+z} [\sin(x+y) + \cos(x+y)] dx$   
 $+ e^{x+z} \cos(x+y) dy + e^{x+z} \sin(x+y) dz$

### 三、高阶偏导数与高阶全微分

类似于一元函数,可以定义高阶偏导数.就二元函数  $u = f(x, y)$  来说,  $f_x(x, y)$  及  $f_y(x, y)$  仍是  $x, y$  的二元函数, 还可以讨论它们关于  $x$  或  $y$  的偏导数, 这些就称为函数  $f(x, y)$  的二阶偏导数.

例如,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  关于  $x$  再求偏导数, 即  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  就称为  $f(x, y)$  关于  $x$  的二阶偏导数, 记为  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  或  $f_{xx}$ , 也可记为  $f_{x^2}$ . 相仿地, 还有:

$$f_{xy} = \frac{\partial(f_x)}{\partial y}, \text{ 或记为 } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial(f_y)}{\partial x}, \text{ 或记为 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial(f_y)}{\partial y}, \text{ 或记为 } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ 也可记为 } f_{y^2}.$$

同样, 还可以定义更高阶的偏导数, 如

$$f_{x^3} = \frac{\partial(f_{x^2})}{\partial x}, \text{ 或记为 } \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$f_{yx^2} = \frac{\partial(f_{yx})}{\partial x}, \text{ 或记为 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y}$$

等等.

**例 6** 设 (1)  $u(x, y) = xy$ , (2)  $u(x, y) = xe^x \sin y$ , 求二阶偏导数.

**解** (1)  $u_x = y, u_{xx} = 0, u_{xy} = 1$

$$\begin{aligned}
 u_y &= x, \quad u_{yx} = 1, \quad u_{yy} = 0 \\
 (2) \quad u_x &= e^x \sin y + x e^x \sin y = (x+1)e^x \sin y \\
 u_{xx} &= (x+1+1)e^x \sin y = (x+2)e^x \sin y \\
 u_{xy} &= (x+1)e^x \cos y \\
 u_y &= x e^x \cos y \\
 u_{yx} &= (x+1)e^x \cos y \\
 u_{yy} &= -x e^x \sin y
 \end{aligned}$$

值得注意的是, 这些函数关于  $x, y$  的两个二阶混合偏导数都相等, 即  $u_{xy} = u_{yx}$ ; 也就是说, 这些函数的混合偏导数和先对  $x$  还是先对  $y$  求导的顺序无关. 但是, 这个结论并不是对任意的函数都成立, 例如, 考虑下面的函数:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

此时

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} y, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} \\
 f_y(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} x, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

再从定义出发, 可以求得

$$f_{xy}(0, 0) = -1, \quad \text{而} \quad f_{yx}(0, 0) = 1$$

两者并不相等.

但可以证明, 如果  $f_{xy}$  及  $f_{yx}$  在点  $(x, y)$  都是连续的, 则两者必相等. 这就是下面的定理.

**定理** 若  $f_{xy}$  及  $f_{yx}$  在点  $(x, y)$  都连续, 则

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$