

東北行政委員會教育部規定

初中臨時教材

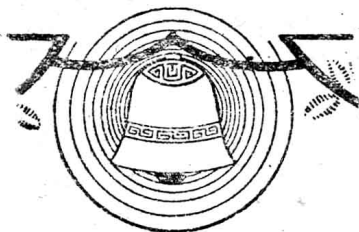
三 角

周元瑞 編 著
周元谷

東北書店印行

1949

審定執照中教字第一號



版權所有
翻印必究

中華民國三十五年六月渝初版
中華民國三十六年四月審定本滬四五版

新中國
教科書 高中三角學

全一册 定價國幣一元六角五分
(外埠酌加運費匯費)

編	著	者	余	介	石
校	訂	者	何		魯
發	行	人	吳	乘	常
印	刷	所	正	中	書
發	行	所	正	中	書

(1949)

前 言

本書係臨時教本，各校可根據具體情況，靈活運用，如嫌份量太重，或有不合適者，可以酌量刪減，如嫌尚有某些問題講的不够，可以酌量增加。教師教學不要為課本所拘束，而應因地制宜，隨機應變，善於活用課本。

(五) Granville 原書，亦不無缺點：

(1) 未論造表法與表的準確度，不合我國部頒標準。

(2) 三角形解法，分真數對數二種計算，過耗教學時間，又不甚用餘對數，且解任意三角形的對數計算格式嫌散亂，均感不甚便利。

(3) 論三角恆等式證法，有易滋初學誤解的弊病。且部頒標準，於教法要點內，指明須注意三角恆等式，而原書對這部分，說理不甚透徹，取材稍嫌簡略，未足以應需要。

(4) 反三角恆等式，為初學最感困難的部分，原書對此，未能闡明其要義，且小有錯誤。

(5) 說明每有過詳而流於繁冗處。

(6) 論三角方程式部分過略，又未論消元法，失去與代數上的聯絡。

(7) 正切律和由邊求半角正切公式，係各以化和為積與半角函數公式證明，故不能移到二角和差公式前教授，以致斜三角形解法的應用題等具體教材，不能在理論教材前教學，不甚合學生心理順序。

(8) 此外尚有不經意的錯誤若干處。

以上各點，改編時均已一一訂正。故本書對於我國情形，自信較原書尤為切合實用。

(六) 本書對於重要關鍵，每特為提出，對於初學易忽略處，

則多列註與注意，以作說明。又書中前後關聯的地方，亦時時揭示。如此頗可增進初學的理解力，而為進修較高深數學的幫助。這些地方，似覺也較 Granville 原書為勝。

(七)本書極富彈性，以便教學時伸縮活用，如教師欲先授和差函數與恆等式，再及三角形解法(即照 Granville 原書次序)，則可將論三角形邊角關係式的 § 77，移入三角形解法一章內適當地位，而第四章內的正切律，和已知三邊情形二節 (§§ 59, 63)，可改用 § 75 例二，和 § 77 例三與注意所述證法。

(八)本書除以 Granville 原書為藍本外，並參考下列各書：

- (1) Hobson: Plane Trigonometry,
- (2) Hall and Knight: Elementary Trigonometry,
- (3) Chauvenet: Plane Trigonometry,
- (4) Wentworth: Plane Trigonometry,
- (5) 長澤龜之助: 三角法辭典(薛德炯譯)，
- (6) 余介石: 新課程標準適用高中三角學(中華)，
- (7) 何紆歆譯: 龍氏高級三角學，
- (8) 倪德基: 數學辭典

諸書，並合附誌，以明所本。

(九)本書附有四位函數表，對數表，函數對數表及他種表，以便學生檢查。又附有全書公式撮要(附錄二)，編制方法，以理解為經，性質為緯，以期既便檢查，更易記憶。

(一〇)本書所用數學名詞，皆依據教育部所訂定的數學名詞；人名地名譯音，則照商務印書館出版的標準漢譯外國人名地名表一書。

(一一)本書雖係據流行的優良教本，參照我國部頒標準，及實際情形，並蒙師友的指示，改訂而成；但疵謬終恐不免。甚望海內教師，多加指正，俾得隨時修改，不勝感幸。

(一二)本書蒙重慶大學理學院長何師奎垣。惠予校訂，多所指正。又蒙章春木，胡術五，胡漢蓀，李緒文，范際平，張伯康諸先生，及鄒秉彝女士，就試用經驗，以意見多條相示，謹此附誌，以表謝忱。正中書局編審部同人，對整理稿件，頗多贊助，亦所深感。

民國三十三年五月識於成都金陵女子文理學院

目次

第一章

銳角三角函數

直角三角形解法

1. 平面三角學的定義1
2. 銳角的三角函數1
3. 諸函數間的幾個基本關係3
4. 特別角的三角函數 6
習題一
5. 三角函數表檢查法10
6. 內插法13
7. 測量和計算的準確程度17
習題二
8. 直角三角形解法20
9. 二等邊三角形解法23
10. 正多角形的解法24
習題三
11. 應用問題中各種術語27
12. 應用問題 29
習題四

第二章

對數的理論和應用

13. 本章目的37

14. 對數定義37
15. 對數特性39
習題五
16. 常用對數41
17. 對數首數求法46
18. 對數尾數性質43
19. 對數的四基法, 餘對數47
習題六
20. 對數表50
21. 已知一數求其對數法51
22. 內插法的應用53
習題七
23. 由已知對數求真數法57
24. 對數在計算上的應用59
25. 對數底的變換62
習題八
26. 三角函數對數表65
27. 求已知角各函數的對數67
28. 由已知函數對數求其相當銳角
.....70
29. 直角三角形的對數解法72
習題九

第三章

任意角三角函數

30. 角的推廣.....73
31. 正負角.....74
32. 任何量的角.....74
33. 象限.....75
34. 平面上一點的直角坐標.....75
習題十
35. 任意角三角函數的定義.....78
36. 任意角三角函數值的正負.....80
37. 任意角三角函數間二種基本關係.....80
38. 已知一函數求其餘五函數法.....81
習題十一
39. 三角函數的線值定義.....81
40. 三角函數的變值.....87
習題十二
41. 量角法.....92
42. 角度與弧的換算.....93
43. 弧長和扇形面積.....94
習題十三
44. 三角函數的變跡.....97
45. 三角函數的週期性.....100
46. 化任意角三角函數爲銳角函數法.....101
47. 化第二象限內角的函數法.....101
習題十四

48. 化第三象限內角的函數法.....108
49. 化第四象限內角的函數法.....109
50. 負角的三角函數化法.....111
51. 普通法則.....112
習題十五

第四章

任意三角形

解法及其應用

52. 任意三角形解法分類.....119
53. 正弦律.....120
54. 已知二角和一邊的對數解法.....120
習題十六
55. 已知兩邊與一相對角的情形一歧別.....123
56. 歧例的對數解法.....125
習題十七
57. 餘弦律.....131
58. 已知二邊和夾角或三邊的解法
習題十八
59. 正切律.....134
60. 已知兩邊和夾角的對數解法.....136
61. 三角形面積.....137
習題十九
62. 三角形內切圓半徑.....142

3. 已知三邊的對數解法 143
 64. 航海方面的應用問題 145

習題二十

第 五 章

三 角 函 數 等 式

65. 含三角函數的兩種等式 150
 66. 同角函數的基本關係 150
 67. 只含一未知角的三角恆等式

證法 152

習題二十一

68. 多角函數的基本關係式 154
 69. 二角和的正弦與餘弦 155
 70. 和角公式意義的推廣 158

習題二十二

71. 二角差的正弦與餘弦 161
 72. 二角和或差的正切角餘切 .. 162

習題二十三

73. 倍角的三角函數 166
 74. 半角的函數 168
 75. 和差化積法 171

習題二十四

76. 一角三角恆等式的證法 175
 習題二十五

77. 三角形中邊角關係式 180

習題二十六

第 六 章

反 三 角 函 數;

三 角 方 程 式

78. 反三角函數定義 185
 79. 具有同正弦或同餘割諸角的
 通值 186

80. 具有同餘弦同或正割諸角的
 通值 188

81. 具有同正切或同餘切諸角的
 通值 190

習題二十七

82. 反三角函數的符號 193

83. 反三角函數的主值 .. 194

84. 反三角函數恆等式 195

85. 反三角函數方程式 198
 習題二十八

86. 三角方程式的分類 202

87. 三角方程式解法 202
 習題二十九

88. 聯立三角方程式解法 206

89. 消元法大意 208
 習題三十

第 七 章

三 角 函 數 極 限

造 表 法 略 論

90. 三角函數極限的基本定理 .. 211

- 4
91. 與 0° 或 90° 相鄰諸正銳角
的函數 213
習題三十一
92. 由已知鄰近 0° 或 90° 角的
函數值求角法 216
93. 求鄰近 0° 或 90° 諸角函數
對數法 217
習題三十二
94. 求 $1'$ 的正弦和餘弦 220
95. 造表法略論 221
96. 各表精密度略論 221
習題三十三
- 附 錄 一
- 三角形解法的應用問題 224

附 錄 二

平面三角公式撮要 2

附 表

表 I. 四位對數表

鄰近 0° 或 90° 諸角三角函
數的對數公式

表 II. 三角函數的四位對數表
(角以度與分表出)

化分和秒爲度的小數或爲彈表
化度的小數爲分和秒表

表 III. 三角函數本值表

第一章

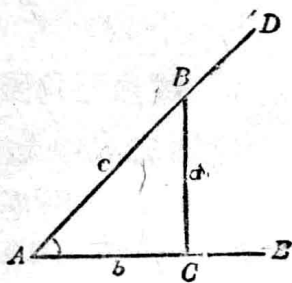
銳角三角函數；直角三角形解法

1. 平面三角學的定義 平面三角學，是討論三角函數*性質和平面三角形解法的科學。在初中數值三角學，我們已經學習過銳角三角函數的意義，同不用對數*解直角三角形的方法。本章將初中已授教材，仍提示要義；從銳角三角函數入手，並應用這種函數，去解直角三角形。第二章述對數要義，和採用對數解直角三角形法，以求計算上的簡便；且與初中所學習的算法，作一比較。以後各章，則推廣三角函數的意義到任意角，並研究如何去解任意三角形。關於含三角函數的等式，也和代數中情形一樣，有恆等式和方程式二種，本書將分別論其證法和解法。又三角形解法，必須用表，本書即略論造表法，以殿全書。

1. 銳角的三角函數 幾何中有三角形內角和等於 180° 的理，表示諸角間的關係；又有畢氏定理*和其推廣，論三角形各邊間的關係；但無有涉及角與邊間的關係者。三角函數的功用即在此，茲先述銳角的情形。

三角函數 trigonometric function. 對數 logarithm. 畢氏定理 Pythagoras' theorem.

設 $\angle EAD$ 爲一銳角，自一邊上任一點 B ，作 BC 垂直於他邊，成一直角三角形 ABC 。命大寫字母 A, B, C 表角，而依次以小寫字母 a, b, c 表各角相對邊的長度。由幾何的理，易知 $\angle BAC$ 爲固定時不論點 B 如何去取，各邊長 a, b, c 所成的比，總是一定。但如另取一大小與前不同的角，則所得直角三角形各邊的諸比，將不復與以前相同，換句話說，這些比值，隨著 $\angle BAC$ 一同變化，所以是這角的一種函數，就叫做銳角的三角函數。



(第 1 圖)

a, b, c 三長度，可成六種比，即得銳角 A 的六個三角函數，其名稱和符號如下：

$\sin A$ ，爲“A 的正弦”；

$\cos A$ ，爲“A 的餘弦”；

$\tan A$ ，爲“A 的正切”；

$\csc A$ ，爲“A 的餘割”；

$\sec A$ ，爲“A 的正割”；

$\cot A$ ，爲“A 的餘切”；

正弦 sine. 餘弦 cosine. 正切 tangent. 餘割 cosecant. 正割 secant 餘切 cotangent.

這六個三角函數(即比值)的定義如次: 在第1圖中,

$$(1) \sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{a}{c} \right); \quad (4) \csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} \left(= \frac{c}{a} \right);$$

$$(2) \cos A = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{b}{c} \right); \quad (5) \sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}} \left(= \frac{c}{b} \right);$$

$$(3) \tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{底邊}} \left(= \frac{a}{b} \right); \quad (6) \cot A = \frac{\text{底邊}}{\text{對邊}} \left(= \frac{b}{a} \right).$$

餘弦, 餘切, 餘割三個函數, 叫做餘函數.*

註 各函數的符號, 他書間有不同. \tan 或作 tg , \csc 或作 cosec , \cot 或作 ctn .

注意 函數符號須與角相連, 方有意義. 譬如 $\sin A$, 並非 \sin 與 A 相乘的意思, 因為 \sin 只是一函數記法, 而非數量也. 明乎此, 就不致弄出 $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ 一類的笑話了 (參看第五章 § 68).

3. 諸函數間的幾個基本關係 上列各函數的定義, 為三角學的基本觀念, 務要徹底了解並熟記, 方能進修三角學. 今舉諸函數間的二種基本關係如下:

一) 倒數關係 由定義即知:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc A}; \quad \csc A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec A}; \quad \sec A = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cot A}; \quad \cot A = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan A}.$$

(二)餘角函數關係 將 § 2 中各定義, 施於銳角 B 則得

$$\sin B = \frac{b}{c}; \quad \csc B = \frac{c}{b};$$

$$\cos B = \frac{a}{c}; \quad \sec B = \frac{c}{a};$$

$$\tan B = \frac{b}{a}; \quad \cot B = \frac{a}{b}.$$

試與角 A 的函數去比較, 便易見有:

$$\sin A = \cos B; \quad \csc A = \sec B;$$

$$\cos A = \sin B; \quad \sec A = \csc B;$$

$$\tan A = \cot B; \quad \cot A = \tan B.$$

因 A 與 B 互為餘角 即 $A+B=90^\circ$, 故得一定理如次:

定理 銳角任一函數等於其餘角的餘函數。

註 餘弦, 餘切, 餘割的命名, 即本於這定理。

例一 已知直角三角形的二邊 $a=3$, $b=4$, 試求角 A 的函數。

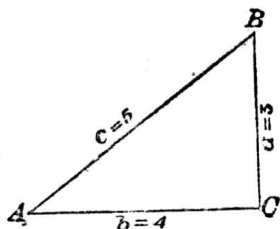
$$\begin{aligned} \text{解 } c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} = 5, \text{ 如第 2 圖.} \end{aligned}$$

按 § 2(1) 至 (6) 各定義, 即有:

$$\sin A = \frac{3}{5}; \quad \csc A = \frac{5}{3};$$

$$\cos A = \frac{4}{5}; \quad \sec A = \frac{5}{4};$$

$$\tan A = \frac{3}{4}; \quad \cot A = \frac{4}{3}.$$



(第 2 圖)

試再求角 B 的各函數, 並與上面各結果比較.

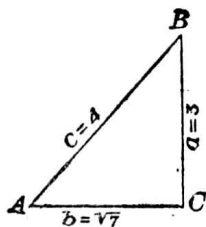
例二 已知直角三角形二邊 $a=3$, $c=4$, 試求角 B 的各函數.

$$\text{解 } b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}; \quad \csc B = \frac{4}{\sqrt{7}};$$

$$\cos B = \frac{3}{4}; \quad \sec B = \frac{4}{3};$$

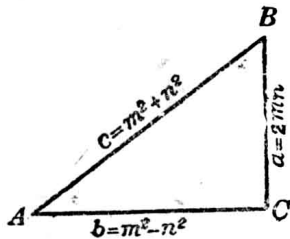
$$\tan B = \frac{\sqrt{7}}{3}; \quad \cot B = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$



(第 3 圖)

試再求角 A 的各函數, 並和上面各結果比較.

例三 已知直角三角形二邊 $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, 試求角 A 的各函數.



(第 4 圖)

$$\begin{aligned} \text{解 } c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4} \\ &= \sqrt{m^4 + 2m^2n^2 + n^4} = m^2 + n^2. \end{aligned}$$

$$\sin A = \frac{2mn}{m^2 + n^2}; \quad \csc A = \frac{m^2 + n^2}{2mn};$$

$$\cos A = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}; \quad \sec A = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2};$$

$$\tan A = \frac{2mn}{m^2 - n^2}; \quad \cot A = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$

例四 已知一直角三角形內， $\sin A = \frac{4}{5}$ ， $a = 80$ ，求 c 。

解 按 § 2 公式(1) $\sin A = \frac{a}{c}$ ，將 $\sin A$ 和 a 的值代入，得

$$\frac{4}{5} = \frac{80}{c}; \text{ 所以 } c = 100.$$

4. 特別角的三角函數 30° ， 45° ， 60° 的各函數，為問題中所常遇的。這些結果頗重要，宜熟記。

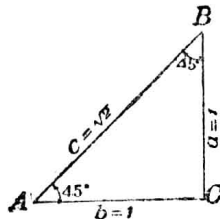
(一) 求 45° 的各函數。

作一等腰直角三角形 ABC ，如第 5 圖。

則 $\angle A = \angle B = 45^\circ$ 。

三角函數既為各邊所成的比，故只須知各邊相關長度。今選定等腰的長度為一

單位，即 $a = 1$ ， $b = 1$ ，則 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ 。



(第 5 圖)

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \csc 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ = 1; \quad \cot 45^\circ = 1.$$

(二)求 30° 和 60° 的各函數.

作一等邊三角形 ABD , 自 B 作 $BC \perp AD$, 則在 $\triangle ABC$ 內, $\angle A = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, 如第 6 圖.

在直角三角形 ABC 內, 取最短一邊為單位長, 即 $b = 1$. 如此便得:

$$c = AB = AD = 2AC = 2b = 2,$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

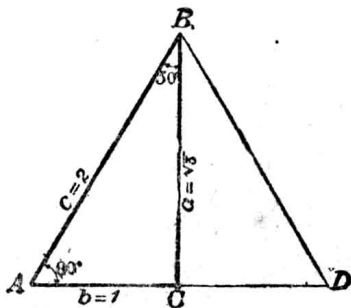
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\sec 60^\circ = 2;$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



(第 6 圖)