東北行政委員會教育部規定

初中臨時教材

三 角

周元瑞
周元谷 編著

東北書店印行
1949

審定執照中教字第一號

中華民國三十五年六月渝初版
中華民國三十六年四月審定本滬四五版

新中國教科書 高中三角學

全一册 定價國幣一元六角五分
（外埠酌加運費匯費）

編著者 余介石
校訂者 何魯
發行人 吳秉常
印刷所 正中書局
發行所 正中書局

(1919)

本(本)(圖) 10/6

前　言

本書係臨時教本，各校可根據具體情況，靈活運用，如嫌份量太重，或有不合適者，可以酌量删減，如嫌尚有某些問題講的不够，可以酌量增加。教師教學不要爲課本所拘束，而應因地制宜，隨機應變，善於活用課本。

(五) Granville 原書，亦不無缺點:

(1)未論造表法與表的準確度，不合我國部頒標準.

(2)三角形解法，分眞數對數二種計算，過耗教學時間.又不甚用餘對數，且解任意三角形的對數計算格式嫌散亂，均感不甚便利.

(3)論三角恆等式證法，有易滋初學誤解的弊病.且部頒標準，於教法要點內，指明須注意三角恆等式，而原書對這部分，說理不甚透徹.取材稍嫌簡略，未足以應需要.

(4)反三角恆等式，爲初學最感困難的部分，原書對此，未能闡明其要義，且小有錯誤.

(5)說明每有過詳而流於繁冗處.

(6)論三角方程式部分過略，又未論消元法，失去與代數上的聯絡.

(7)正切律和由邊求半角正切公式，係各以化和爲積與半角函數公式證明，故不能移到二角和差公式前教授，以致斜三角形解法的應用題等具體教材，不能在理論教材前教學，不甚合學生心理順序.

(8)此外尙有不經意的錯誤若干處.

以上各點，改編時均已一一訂正.故本書對於我國情形，自信較原書尤爲切合實用.

(六)本書對於重要關鍵，每特爲提出.對於初學易忽略處，

則多列註與注意，以作說明．又書中前後關聯的地方，亦時時揭示．如此頗可增進初學的理解力，而爲進修較高深數學的幫助．這些地方，似覺也較 Granville 原書爲勝．

（七）本書極富彈性，以便教學時伸縮活用，如教師欲先授和差函數與恆等式，再及三角形解法（卽照 Granville 原書次序），則可將論三角形邊角關係式的 § 77，移入三角形解法一章內適當地位，而第四章內的正切律，和已知三邊情形二節（§§ 59, 63），可改用 § 75 例二，和 § 77 例三與注意所述證法．

（八）本書除以 Granville 原書爲藍本外，並參考下列各書：

(1) Hobson: Plane Trigonometry,

(2) Hall and Knight: Elementary Trigonometry,

(3) Chauvenent: Plane Trigonometry,

(4) Wentworth: Plane Trigonometry,

(5) 長澤龜之助：三角法辭典（薛德烱譯），

(6) 余介石：新課程標準適用高中三角學（中華），

(7) 何籽欽譯：龍氏高級三角學，

(8) 倪德基：數學辭典

諸書，並合附誌．以明所本．

（九）本書附有四位函數表，對數表，函數對數表及他種表，以便學生檢查．又附有全書公式撮要（附錄 ），編制方法，以理解爲經，性質爲緯，以期既便檢查，更易記憶．

(一〇)本書所用數學名詞,皆依據教育部所訂定的數學名詞;人名地名譯音,則照商務印書館出版的標準漢譯外國人名地名表一書.

(一一)本書雖係據流行的優良教本,參照我國部頒標準,及實際情形,並蒙師友的指示,改訂而成;但疵謬終恐不免.甚望海內教師,多加指正,俾得隨時修改,不勝感幸.

(一二)本書蒙重慶大學理學院長何師奎垣惠予校訂,多所指正.又蒙章春木,胡術五,胡濬蓀,李緒文,范際平,張伯康諸先生,及鄒秉彝女士,就試用經驗,以意見多條相示,謹此附誌,以表謝忱.正中書局編審部同人,對整理稿件,頗多贊助,亦所深感.

民國三十三年五月識於成都金陵女子文理學院

目 次

第一章

銳角三角函數；直角三角形解法

第二章

對數的理論和應用

第三章

任意角三角函數

第四章

任意三角形解法及其應用

第五章

三角恆等式

第六章

反三角函數；三角方程式

第七章

三角函數極限

造表法略論

附 錄 一

附 錄 二

附 表

第一章

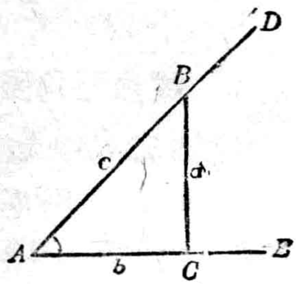
銳角三角函數;直角三角形解法

1. 平面三角學的定義　平面三角學,是討論三角函數*性質和平面三角形解法的科學.在初中數值三角學,我們已經學習過銳角三角函數的意義,同不用對數*解直角三角形的方法.本章將初中已授教材,仍提示要義;從銳角三角函數入手,並應用這種函數,去解直角三角形.第二章述對數要義,和採用對數解直角三角形法,以求計算上的簡便;且與初中所學習的算法,作一比較.以後各章,則推廣三角函數的意義到任意角,並研究如何去解任意三角形.關於含三角函數的等式,也和代數中情形一樣,有恆等式和方程式二種,本書將分別論其證法和解法.又三角形解法,必須用表,本書即略論造表法,以殿全書.

1. 銳角的三角函數　幾何中有三角形內角和等於180°的理,表示諸角間的關係;又有畢氏定理*和其推廣,論三角形各邊間的關係;但無有涉及角與邊間的關係者.三角函數的功用即在此,茲先述銳角的情形.

三角函數 trigonometric function. 對數 logarithm. 畢氏定理 Pythagoras' theorem.

設 $\angle EAD$ 爲一銳角,自一邊上任一點 B, 作 BC 垂直於他邊,成一直角三角形 ABC. 命大寫字母 A, B, C 表角,而依次以小寫字母 a, b, c 表各角相對邊的長度. 由幾何的理, 易知 $\angle BAC$ 爲固定時不論點 B 如何去取,各邊長 a,b,c 所成的比,總是一定.但如另取一大小與前不同的角,則所得直角三角形各邊的諸比,將不復與以前相同,換句話說,這些比值,隨著 $\angle BAC$ 一同變化,所以是這角的一種函數,就叫做銳角的三角函數.



(第 1 圖)

a,b,c 三長度,可成六種比,即得銳角 A 的六個三角函數,其名稱和符號如下:

$\sin A$, 爲"A 的正弦*";

$\cos A$, 爲"A 的餘弦*";

$\tan A$, 爲"A 的正切*";

$\csc A$, 爲"A 的餘割*";

$\sec A$, 爲"A 的正割*";

$\cot A$, 爲"A 的餘切*";

正弦 sine. 餘弦 cosine. 正切 tangent. 餘割 cosecant. 正割 secant 餘切 cotangent.

這六個三角函數(即比值)的定義如次: 在第1圖中,

(1) $\sin A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\left(=\dfrac{a}{c}\right)$; (4) $\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}\left(=\dfrac{c}{a}\right)$;

(2) $\cos A=\dfrac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}\left(=\dfrac{b}{c}\right)$; (5) $\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}\left(=\dfrac{c}{b}\right)$;

(3) $\tan A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{底邊}}\left(=\dfrac{a}{b}\right)$; (6) $\cot A=\dfrac{\text{底邊}}{\text{對邊}}\left(=\dfrac{b}{a}\right)$.

餘弦,餘切,餘割三個函數,叫做餘函數.*

註 各函數的符號,他書間有不同. tan 或作 tg, csc 或作 cosec, cot 或作 ctn.

注意 函數符號須與角相連,方有意義。譬如 $\sin A$, 並非 sin 與 A 相乘的意思, 因為 sin 只是一函數記法, 而非數量也. 明乎此,就不致弄出 $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$ 一類的笑話了(參看第五章§68).

3. 諸函數間的幾個基本關係 上列各函數的定義, 為三角學的基本觀念,務要徹底了解並熟記,方能進修三角學. 今舉諸函數間的二種基本關係如下:

一)倒數關係 由定義即知:

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\csc A};\quad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A};$$

餘函數 co-function

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sec A};\quad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\cot A};\quad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}.$$

(二)餘角函數關係　將§2中各定義,施於銳角 B 則得

$$\sin B=\frac{b}{c};\qquad \csc B=\frac{c}{b};$$

$$\cos B=\frac{a}{c};\qquad \sec B=\frac{c}{a};$$

$$\tan B=\frac{b}{a};\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

試與角 A 的函數去比較,便易見有:

$$\sin A=\cos B;\qquad \csc A=\sec B;$$

$$\cos A=\sin B;\qquad \sec A=\csc B;$$

$$\tan A=\cot B;\qquad \cot A=\tan B.$$

因 A 與 B 互爲餘角 卽 $A+B=90°$,故得一定理如次:

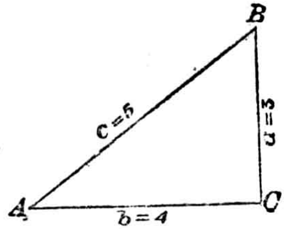
定理　銳角任一函數等於其餘角的餘函數.

證　餘弦,餘切,餘割的命名,卽本於這定理.

例一　已知直角三角形的二邊 $a=3$, $b=4$,試求角 A 的各函數.

解 $c=\sqrt{a^3+b^2}=\sqrt{9+16}$

$=\sqrt{25}=5$，如第 2 圖.



（第 2 圖）

按 § 2（1）至（6）各定義，卽有：

$$\sin A=\frac{3}{5};\qquad \csc A=\frac{5}{3};$$

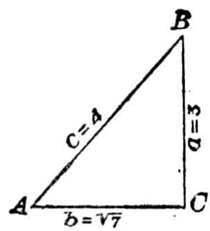
$$\cos A=\frac{4}{5};\qquad \sec A=\frac{5}{4};$$

$$\tan A=\frac{3}{4};\qquad \cot A=\frac{4}{3}.$$

試再求角 B 的各函數，並與上面各結果比較.

例二 已知直角三角形二邊 $a=3$，$c=4$，試求角 B 的各函數.

解 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.



（第 3 圖）

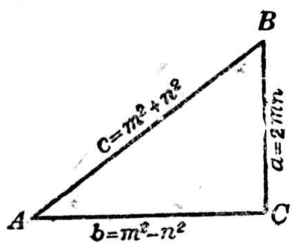
$$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4};\qquad \csc B=\frac{4}{\sqrt{7}};$$

$$\cos B=\frac{3}{4};\qquad \sec B=\frac{4}{3};$$

$$\tan B=\frac{\sqrt{7}}{3};\qquad \cot B=\frac{3}{\sqrt{7}}.$$

試再求角 A 的各函數，並和上面各結果比較.

例三 已知直角三角形二邊 $a=2mn$，$b=m^2-n^3$，試求角 A 的各函數.



（第 4 圖）

解　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4}$

$$=\sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4}=m^2+n^2.$$

$$\sin A=\frac{2mn}{m^2+n^2};\qquad \csc A=\frac{m^2+n^2}{2mn};$$

$$\cos A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2};\qquad \sec A=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$$

$$\tan A=\frac{2mn}{m^2-n^2};\qquad \cot A=\frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

例四　已知一直角三角形內，$\sin A=\frac{4}{5}$，$a=80$，求 c.

解　按§2公式(1) $\sin A=\frac{a}{c}$，將 $\sin A$ 和 a 的値代入，得

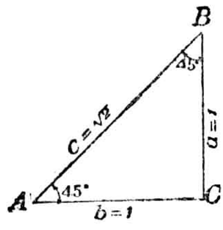
$\frac{4}{5}=\frac{80}{c}$；所以 $c=100$.

4. 特別角的三角函數　　$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 的各函數，爲問題中所常遇的. 這些結果頗重要，宜熟記.

(一)求 45° 的各函數.

作一等腰直角三角形 ABC，如第**5**圖，則 $\angle A=\angle B=45^\circ$.

三角函數旣爲各邊所成的比，故只須知各邊相關長度. 今選定等腰的長度爲一單位，即 $a=1, b=1$，則 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$.



(第5圖)

$$\therefore \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad \csc 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad \sec 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ = 1; \qquad \cot 45^\circ = 1.$$

(二)求 30° 和 60° 的各函數.

作一等邊三角形 ABD，自 B 作 $BC \perp AD$，則在 $\triangle ABC$ 內，$\angle A = 60^\circ$，$\angle ABC = 30^\circ$，如第 6 圖.

在直角三角形 ABC 內，取最短一邊爲單位長，即 $b=1$. 如此便得:

$$c = AB = AD = 2AC = 2b = 2,$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

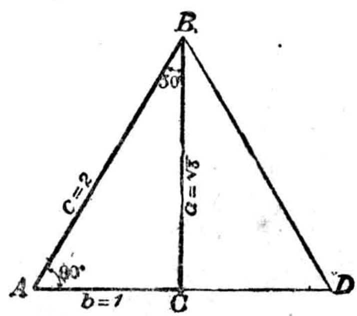
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\sec 60^\circ = 2;$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



(第 6 圖)