

復興高中

三角學指導書

陳嶽山編



復興高中 三角學指導書

第一編 教材提要

第一章 角之量法

本章所授各項如下：

(1) 量角的單位有三種：

(一) 六十分制 以度為單位，每度等於圓周三百六十分之一的弧所張的圓心角。一度等於60分，一分等於60秒。

(二) 百分制 以級為單位，每級等於直角的百分之一。一級等於100分，一分等於100秒。

(三) 徑制 以徑為單位，每徑等於與半徑同長的弧所張的圓心角。

(2) 各單位的關係，可用下列三公式表示：

(一) $1 \text{ 徑} = 57.2957^\circ$ 。

(二) $1 \text{ 度} = 0.01745329 \text{ 徑}$ 。

$$(三) \frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi}.$$

在第三式中, D = 度數, G = 級數, R = 徑數.

(3) 各特別角用徑數表示, 有下列數種:

$$360^\circ = 2\pi \text{ 徑};$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ 徑};$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ 徑};$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ 徑};$$

$$180^\circ = \pi \text{ 徑};$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ 徑};$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ 徑};$$

$$15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ 徑}.$$

(4) 弧長可用下面的公式計算:

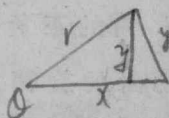
$$s = r\phi.$$

式中 r = 半徑長, ϕ 等於圓心角徑數, s = 弧長.

(5) 觀察天體時, 二視線與天體相切, 且與天體中心在同平面內, 則此二視線所夾的角, 稱為視直徑, 其二分之一即為視半徑.

第二章 三角函數及其基本性質

本章所授各項如下：



(1) 銳角三角函數的定義.

$$\sin \theta = \frac{y}{r};$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r};$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x};$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y};$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x};$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y};$$

$$\text{vers } \theta = 1 - \cos \theta;$$

$$\text{covers } \theta = 1 - \sin \theta.$$

以上各式中, θ 爲直角三角形的一銳角, r 爲斜邊長, x 爲 θ 角的鄰邊長, y 爲 θ 角的對邊長.

(2) 任意角的三角函數定義.

$$\sin \theta = \frac{y}{r};$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r};$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x};$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y};$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x};$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y}.$$

$$\text{vers } \theta = 1 - \cos \theta; \quad \text{covers } \theta = 1 - \sin \theta.$$

以上各式中, θ 爲終線與始線所成之角, r 爲終線上 P 點到原點的距離, x 爲 P 點的橫坐標, y 爲其縱坐標。

(3) 角的正負 動線旋轉, 由始線到終線, 方向與時鐘兩針的旋轉方向相反, 所成的角是正角; 若旋轉方向與時鐘兩針相同, 則所成的角是負角。

(4) 負角的函數 若以 θ 表示正角, $-\theta$ 表示負角, 則負角函數的公式如下:

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta; \quad \cos(-\theta) = \cos \theta;$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta; \quad \cot(-\theta) = -\cot \theta;$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta; \quad \csc(-\theta) = -\csc \theta.$$

$$\text{vers}(-\theta) = 1 - \cos \theta; \quad \text{covers}(-\theta) = 1 + \sin \theta.$$

(5) 角與象限 若 θ 爲正角, 則

(一) $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 時, θ 在第一象限內。

(二) $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ 時, θ 在第二象限內。

(三) $\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ 時, θ 在第三象限內。

(四) $\frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$ 時, θ 在第四象限內。



(6) 三角函數的正負 各象限內各角的三角函數, 其正負號如下表所示:

象限 \ 函數	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

$\text{vers } \theta$ 與 $\text{covers } \theta$ 常為正數。

(7) 三角函數的變化 三角函數隨角的大小而變, 其情形如下表所示:

θ 的變化 函數的變化	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi \rightarrow 2\pi$
$\sin \theta$	$0 \rightarrow +1$	$+1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
$\cos \theta$	$+1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +1$
$\tan \theta$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow \infty$	$-\infty \rightarrow 0$
$\cot \theta$	$\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -\infty$	$\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -\infty$
$\sec \theta$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow -\infty$	$\infty \rightarrow +1$
$\csc \theta$	$\infty \rightarrow +1$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow -\infty$

(8) 三角函數絕對值的限制。

(一) 正弦與餘弦的絕對值常為小於1的實數。

(二) 正切與餘切的絕對值可為任何實數。

(三) 正割與餘割的絕對值為大於1的實數。

(9) 三角函數的逆數關係。

(一) $\sin \theta \csc \theta = 1.$

(二) $\cos \theta \sec \theta = 1.$

(三) $\tan \theta \cot \theta = 1.$

(10) 特別角的三角函數 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 諸角的函數, 如下表所示:

函數 \ 角	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
sec	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

(11) 各象限函數的關係 若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 則各象限的函數, 有下列關係:

(一) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta;$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta; \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta;$

$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc \theta; \quad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec \theta.$

$$(二) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta;$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta; \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta.$$

$$(三) \quad \sin(\pi - \theta) = \sin \theta; \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta;$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta; \quad \cot(\pi - \theta) = -\cot \theta.$$

$$(四) \quad \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta; \quad \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta;$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta; \quad \cot(\pi + \theta) = \cot \theta.$$

$$(五) \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta;$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta; \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta.$$

$$(六) \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta;$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta; \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta.$$

$$(七) \quad \sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta; \quad \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta;$$

$$\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta; \quad \cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta.$$

$$(八) \quad \sin(2\pi + \theta) = \sin \theta; \quad \cos(2\pi + \theta) = \cos \theta;$$

$$\tan(2\pi + \theta) = \tan \theta; \quad \cot(2\pi + \theta) = \cot \theta.$$

以上八組公式，又可歸納為下列三定則：

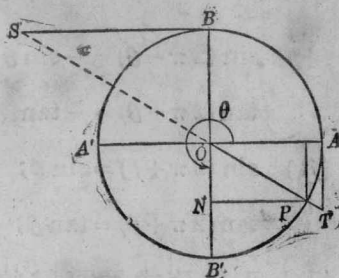
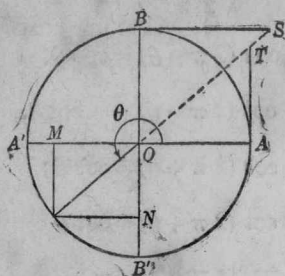
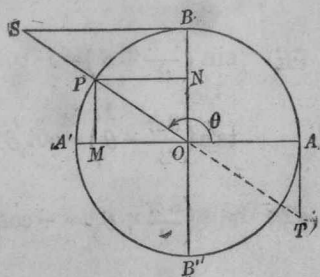
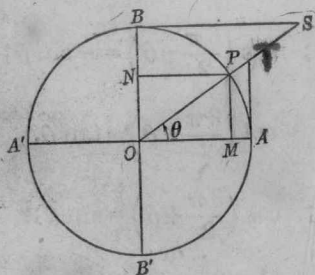
(I) 若角為 $\pi \pm \theta$ ，或 $2\pi \pm \theta$ ，則其函數的絕對值等於同函數。

(II) 若角爲 $\frac{\pi}{2} \pm \theta$, 或 $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$, 則其函數之絕對值等於餘函數.

於餘函數.

(III) 所得結果函數的符號, 視原角所在象限而定. 若將 θ 改爲任意角, 以上各公式仍成立.

(12) 三角函數與八線 下列四圖中, 若以半徑爲單位, 則三角函數可用八線表示之.



$$\sin \theta = MP;$$

$$\tan \theta = AT;$$

$$\cos \theta = OM;$$

$$\cot \theta = BS;$$

$$\sec \theta = OT;$$

$$\csc \theta = OS.$$

$$\text{vers } \theta = MA;$$

$$\text{covers } \theta = NB.$$

三角函數因可從單位圓導出，故又稱圓函數

(13) 同角函數的關係 同角的函數，有基本關係

如下：

$$(一) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

$$(二) \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

$$(三) \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

$$(四) \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta.$$

$$(五) \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta.$$

$$(六) \quad \sin \theta \csc \theta = \cos \theta \sec \theta = \tan \theta \cot \theta = 1.$$

以上六式中， θ 可為任意角。

(14) 三角恆等式的證明法 利用基本關係，可以

證明一部分的三角恆等式。最普通的方法，是逐步代入。

第三章 直角三角形之解法 對數

本章所授各項如下：

(1) 對數定義 設 $a^x = N$, 則 $x = \log_a N$. x 稱爲以 a 爲底, N 的對數; N 稱爲相當於對數 x 的真數.

(2) 對數的種類 對數有兩種: 用 10 爲底者, 稱爲常用對數; 用 e 爲底者, 稱爲自然對數. 本章所應用的, 概爲常用對數.

(3) e 的數值 e 的數值, 是超越數, 位數無窮盡; 其前六位是 2.71828.

(4) 對數定律 利用對數計數, 根據下列三定律:

$$(一) \log (N \times M) = \log N + \log M.$$

$$(二) \log \left(\frac{N}{M} \right) = \log N - \log M.$$

$$(三) \log (M)^p = p \log M.$$

第三式中的 p , 可爲正負整分數.

(5) 對數的首尾 對數分兩部: 首數與尾數. 尾數可在表中查得, 首數可從小數點的地位決定. 首數可

正可負,尾數常爲正數.

(6) 對數的首數決定法 決定對數的首數,可按下面的規則:

(一) 第一位有效數字,在小數點左,對數首數爲正,其絕對值等於距離小數點的位數減一.

(二) 第一位有效數字,在小數點右,對數函數爲負,其絕對值等於距離小數點的位數.

(7) 對數表與三角函數表 用本書所附之表,可求四位真數的對數,及任何角的三角函數或其對數;又可求相當於四位對數的真數四位,及相當於某函數或其對數的角.本書所載的三角函數,角均以度爲單位,須按附表第6頁,化成分秒.若已知角中有分秒,亦須先按該頁之表,化成度數.

(8) 直角三角形的解法 任何直角三角形,已知一邊與一角,或已知二邊,即可求得其餘的邊角.所根據的公式,有下列數式:

(一) $y = r \sin \theta.$

(二) $x = r \cos \theta.$

(三) $\frac{y}{x} = \tan \theta.$

$$(四) \quad \frac{x}{y} = \cot \theta.$$

$$(五) \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

$$(六) \quad \theta + \phi = 90^\circ.$$

各式中 y 與 x 爲直角旁兩邊, r 爲斜邊, θ 與 ϕ 爲二銳角.

(9) 直角三角形的對數解法 應用對數以解直角三角形, 可分四種如下:

(一) 已知斜邊 r 及一銳角 θ .

$$(i) \quad \phi = 90^\circ - \theta.$$

$$(ii) \quad \log y = \log r + \log \sin \theta.$$

$$(iii) \quad \log x = \log r + \log \cos \theta.$$

(二) 已知斜邊 r 及其餘一邊 y .

$$(i) \quad \log \sin \theta = \log y - \log r.$$

$$(ii) \quad \phi = 90^\circ - \theta.$$

$$(iii) \quad \log x = \log r + \log \cos \theta.$$

(三) 已知一邊 y 及一銳角 θ .

$$(i) \quad \phi = 90^\circ - \theta.$$

$$(ii) \quad \log r = \log y - \log \sin \theta.$$

$$(iii) \quad \log x = \log y - \log \tan \theta.$$

(四) 已知二邊 x 與 y .

$$(i) \log \tan \theta = \log y - \log x.$$

$$(ii) \phi = 90^\circ - \theta.$$

$$(iii) \log r = \log y - \log \sin \theta,$$

或 $\log r = \log x - \log \cos \theta.$

(10) 仰角與俯角 向上仰望, 視線與目之水平線所成的角稱為仰角.

向下俯視, 視線與目之水平線所成的角稱為俯角.

Handwritten notes and symbols, including the letter 'y' and several 'x' marks, are visible in the lower right quadrant of the page.

第四章 三角分析

本章所授各項如下：

(1) 和角函數 兩角之和的函數，有公式如下：

$$(一) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$(二) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$(三) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$(四) \quad \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}.$$

(2) 差角函數 兩角之差的函數，有公式如下：

$$(一) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$(二) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$(三) \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$(四) \quad \cot(\alpha - \beta) = \frac{-\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha - \cot \beta}.$$

(3) 倍角函數 一角兩倍的函數，有公式如下：

$$(一) \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$(二) \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

$$(三) \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

$$(四) \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}.$$

(4) 半角函數 關於半角的函數, 有兩組公式如

下:

$$(一) \quad i. \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

$$ii. \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$= 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1.$$

$$iii. \quad \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}.$$

$$iv. \quad \cot x = \frac{\cot^2 \frac{x}{2} - 1}{2 \cot \frac{x}{2}}.$$

$$(二) \quad i. \quad \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

$$ii. \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

$$iii. \quad \tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

$$\text{iv. } \cot \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}.$$

(5) 函數的和與差 關於二角函數的和與差, 有四公式如下:

$$(一) \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$(二) \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

$$(三) \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$(四) \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

(6) 三倍角函數.

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}.$$