

丛书主编 李醒民 肖显静



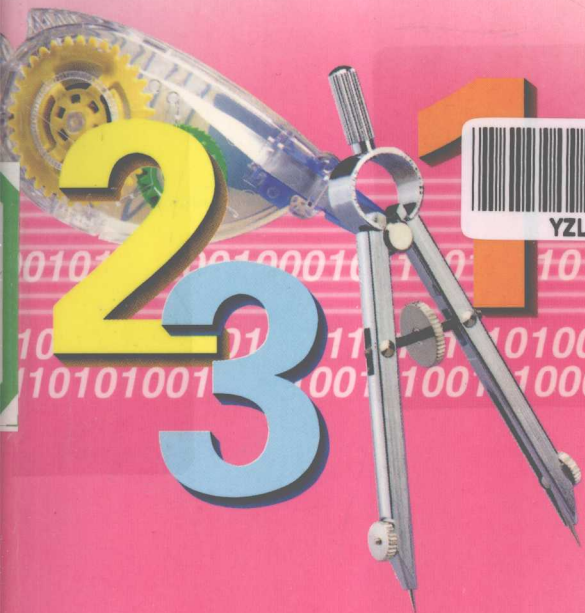
中学生科学素养丛书

- 数学发展的历史轨迹
- 数学文化的丰富内涵
- 数学从科学实验中走来
- 数学在生活中无处不在

# 数学

KEXUE YU WENHUA DE DIANTANG

# 科学与文化的 殿堂



YZL10890144298

傅海伦 编著  
陕西科学技术出版社

丛书主编 李醒民 肖显静



中学生科学素养丛书

# 数学

## 科学与文化的殿堂

KEXUE YU WENHUA DE DIANTANG

傅海伦 编著



YZLI0890144298

23

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学·科学与文化的殿堂/傅海伦编著. —西安: 陕西科学技术出版社, 2003. 11  
(中学生科学素养丛书)  
ISBN 7-5369-3702-4

I. 科... II. 傅... III. 数学课—中学—课外读物  
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 089247 号

---

出版者 陕西科学技术出版社  
西安北大街 131 号 邮编 710003  
电话(029)87211894 传真(029)87218236  
<http://www.snstp.com>

发行者 陕西科学技术出版社  
电话(029)87212206 87260001

印刷 陕西友盛印务有限责任公司

规格 787 mm × 1092 mm 16 开本

印张 13

字数 208 千字

印数 1 - 5000

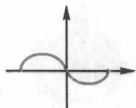
版次 2004 年 1 月第 1 版  
2004 年 1 月第 1 次印刷

定价 20.00 元

---

版权所有 翻印必究

(如有印装质量问题,请与我社发行部联系调换)



# 敞开您的心扉：聆听科学！

## ——《中学生科学素养丛书》总序

李醒民

亲爱的青少年朋友，您手中的这套丛书，是我们特意为您编写的。

跨入中学的大门，您在课堂上或迟或早要学习各种各样的科学知识，要理解抽象的科学概念，要记忆繁杂的数学公式。可是，您知道那些知识是怎样被创造出来的吗？您清楚那些概念和公式是如何被发明或被发现的吗？

我们猜想，您恐怕不会了解得太多。

至于科学家在与他的问题苦斗时的心路历程和精神状态，以及在“山重水复疑无路”的困惑之后，瞥见“柳暗花明又一村”美景时的惊奇和狂喜，您大概就更加不甚了了。

因此，急需一套丛书弥补这一缺憾——《中学生科学素养丛书》于是应运而生。

在这套丛书中，我们拟通过一个个小故事，力图历史地勾勒出科学家的所思所想、亦苦亦乐，并穿插少许认识论和方法论的议论，借以收到虚实相间、情理交融的效果。

我们热诚地祈望，青少年朋友从中不仅能学到一些科学知识，更重要的是能把握科学方法，领悟科学精神。您要明白，科学方法是科学的本质，科学精神是科学的灵魂。手握科学方法，遇到问题往往事半功倍；心怀科学精神，人生也会变得富有意义和情趣。

青少年朋友，您可能十分崇敬大科学家和大思想家爱因斯坦。爱因斯坦曾借他人之口，给教育下了一个极其精妙的定义：“如果一个人忘掉了他在学校里所学到的每一样东西，那么留下来的就是教育。”

这样的“教育”无疑是人们常说的“素质教育”，《中学生素质教育丛书》的立



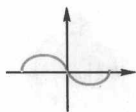
意和旨趣恰恰就在这里。

我们相信，只要您打开书页，静静地读下去，您肯定会情不自禁地徜徉其间，或流连忘返，或低回默思。

青少年朋友，敞开您的心扉吧，请聆听科学的真谛！

像春日轻柔的雨丝，  
无声地沁透您的心脾。  
像夏夜徐徐的清风，  
刹那间凉彻您的肌肤。  
燃起您的热情的，  
是漫山遍野醉人的红叶。  
涤荡您的魂灵的，  
是一望无垠的皑皑白雪。  
智慧的科学  
——有崇实尚理的精神，  
有从善如流的情怀——  
似春雨、夏风，又似秋叶和冬雪。

2003年1月16日于中国科学院研究生院



## 自序

数学是研究空间形式和数量关系的科学，是刻画自然规律和社会规律的科学语言和有效工具。数学科学是自然科学、技术科学等科学的基础，并在经济学、社会科学、人文科学的发展中发挥着越来越大的作用。数学教育既是科学素养的教育，同时也是一种文化素质的教育，在数学人才的培养中具有重要作用，不可等闲视之。将作为文化素质的数学教育与作为科学素质的数学教育结合起来，构成完整的数学科学文化素质教育，是当今数学教育改革与发展的必由之路。

一方面，当今社会，随着现代科学技术迅猛发展，信息已经成为重要的经济资源，全球经济一体化进程急剧加快，国际间综合国力的竞争日趋激烈，这一切都与作为科学技术基础的数学休戚相关，数学的科学价值发挥着日益强大的作用，因此在数学教育中培养学生的科学素质一直得到强调和重视。另一方面，21世纪的公民面临着更多的机遇和挑战，数学素质成为公民文化素养的重要组成部分。数学是一种文化，数学作为人类精神产品之一，独立地成为人类所创造的文化的组成部分。特别是在全面推进和贯彻落实素质教育的当今，我国的教学观念已发生重要的变革。人文教育，由于其对人的积极性、能动性和创造性的注重，已成为素质教育中的一个重要组成部分。数学作为人类改造客观世界的实践过程中形成并发展起来的自然科学，在当今世界，不仅是一种谋生的手段，更是一个现代人必备的基本素质。数学在产生和发展的过程中，对人们的思维方式、价值取向、行为方式和情感、意志品质等方面所产生的影响，也反映了数学的文化价值。齐民友教授在《数学与文化》一书中，自始至终地提出并论证了一个命题：“一个没有现代数学的文化是注定要衰落的”，说明数学对于人类文化的影响不仅显示在现代科技方面，更重要的是它表明了一种理性主义的探索精神对人类文化发展所发挥的巨大作用。王梓坤院士总结了数学四个方面的巨大价值，其中一条就是数学的人文价值，即“对全体人民的科学思维与文化素质的哺育”。他进一步指出：“数学文化具有比数学知识体系更为丰富和深邃的

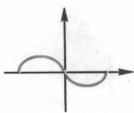


文化内涵,数学文化是对数学知识、技能、能力和素质等概念的高度概括”。我们学习数学不仅是为了获取知识,更要通过数学学习接受数学精神、数学思想和数学方法的熏陶,提高思维能力,锻炼意志品质,并把它们迁移到学习、工作和生活各个领域中去。因此,是否重视数学教学在人格塑造中的作用,是否发挥数学教学中的人文教育因素,已成为数学教师的教育观点正确与否的标志之一。

当前,我国正在进行新一轮基础教育课程改革。随着数学课程与教学的改革不断深入,数学的人文价值更明显地凸现出来,已普遍受到重视。在2001年国家教育部制订的《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》中明确提出了未来10年内我国数学教育的基本目标和实施建议,在其基本理念中,强调指出:“数学是一种文化,它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分。”这为新一轮我国数学教育和教学的改革指明了方向。最近,国家《高中数学课程标准》制订组制订的《高中数学课程标准》中,将“体现数学的人文价值”作为十大基本理念之一。并特别强调指出:“数学是人类文化的重要组成部分。《标准》确定的课程应介绍数学发展的历史、应用和趋势,注意体现数学的社会需要、数学家的创新精神、数学科学的思想体系、数学的美学价值,以帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用,逐步形成正确的数学观,并使之成为正确世界观的组成部分。”《高中数学课程标准》中还设立了数学建模、数学探究、数学文化等专题,做出了内容的规定,并在选修课程系列3中设置了“数学史选讲”“三等分角与数域扩充”、“欧拉公式与闭曲面分类”等体现数学文化的内容。

基于以上理念,《数学——科学与文化的殿堂》一书作为《中学生科学素质培养》丛书的数学分册,以高中新课程教材的知识体系为顺序,力图构建“作为科学素质的数学教育与作为文化素质的数学教育结合起来,构成完整的数学科学文化素质教育”的结构内容体系,为高中数学教师和学生如何在如何增进和培养学生的数学科学素质与文化素质方面搭建一个平台,同时为广大师生提供教科书以外的,又配合数学新课程教学的教学参考书和中学生课外读物。

本书遵循“在普及科学知识的同时,更要突出传播科学思想、倡导科学方法、弘扬科学精神”的宗旨,结合现行高中数学新教材,寻求数学知识和思想方法在整个数学发展史上的线索和脉络,探索数学发展的历史轨迹,揭示数学文化的本质和科学的丰富内涵。本书将尽可能展现数学每一部分知识的产生背景以及数学概念的形成、发展过程和数学定理的提出过程,引导人们了解数学科学与人类社会之间的相互作用,开阔视野,体会数学的科学价值、应用价值和人文价值,提高学生的科学素养和文化素养。本书还通过追寻数学家成长的



足迹,激励人们勇攀科学高峰,并养成尊重科学发展的规律以及求实、说理、批判、质疑等理性思维的习惯和锲而不舍地追求真理的科学精神。

本书的内容共分三大篇。

第一篇:揭开数学历史与文化的画卷。主要按照现行高中数学新教材的知识体系和结构安排,从数学史和数学文化发展的角度,力图给读者客观、具体的知识背景材料,内容涉及《高中数学课程标准》规定的必修课程中的集合、函数概念与基本初等函数(指数函数、对数函数、三角函数)、解析几何初步、算法、统计与概率、数列、平面上的向量等,也涉及《高中数学课程标准》中的部分选修课程中的模块,如导数及其应用、数系的扩充与复数的引入、推理与证明、常用逻辑用语等内容。通过揭示数学概念、数学知识的形成和发展过程,以利于读者全面理解现行教材中的科学知识和理论,提高学习兴趣,开阔视野。

本书的第二篇:数学从科学实验中走来。主要立足于高中数学现行教材,介绍数学作为科学的实验活动,提高人们的科学素养和动手实验操作能力和创新精神。本书选取了数学史上的著名实验和数学问题,通过追溯数学家的思考方法和对问题的设计,体现数学知识和数学结论的探求过程,体会数学创造的艰辛和成功的喜悦,激发创造欲望。本书中还选取了现行教材的部分内容,作为实验研究的材料,引导广大读者通过动手实验的手段去发现和探究,既有利于深刻理解知识的内容,又增加了参与数学活动的乐趣。

本书的第三篇:生活处处有数学。主要立足于高中现行数学教材中的知识与当今社会、生产和生活的联系,也选取了近年来的部分高考题作为素材,通过介绍数学知识和数学思想方法的现代应用,使人们感受到数学的应用价值,体会到“生活处处有数学”,以增进对数学的理解和认识。同时本部分还选取了诸如“医学中的数学”、“数学与物理”、“生物中的数学”、“经济数学”等数学与其他自然科学、交叉科学相联系的有关实例,以问题解决的形式,重在突出今日科学的科学应用价值和工具价值,培养人们的科学观念。

本书在写作过程中力求做到科学性、趣味性、知识性、实践性的统一。三大篇的编排顺序既反映高中知识体系的脉络,又反映了数学自身的发展,体现逻辑与历史的统一。特别希望本书能为广大师生提供中学数学教与学的帮助。但愿通过阅读这本书,能引导同学们步入科学与文化的殿堂,使同学们既能学习到丰富的科学知识和思想方法,增进科学观和科学意识,培养科学态度,又能使同学们受到数学文化的熏陶,增强对数学的感受和数学价值观的认识,提高对数学的兴趣,从而全面提高自身的素质,完善人格。当然,由于作者学识肤浅,对



此方面的探讨还是初步的。不当的观点,敬请各位读者批评指正。期望本书能起到抛砖引玉的作用,以推动此项工作的进一步研究。

本书从确定体例到内容要求上,都得到了肖显静博士的指导和帮助,初稿完成后,肖博士又提出了一些修改意见,在此表示衷心感谢。在我对第二、第三部分内容写作的过程中,我的四个研究生聂力、郑光明、李文婧、陈秋华帮助我查阅并整理了部分有价值的资料,她们还帮我校对了书稿,因此,在一定程度上本书又是我们师生共同劳动的结果。在对本书的编写过程中,我参阅了大量科学史、哲学与文化学、数学史以及数学教育教学等方面的文献资料,也吸收了一些学者在数学史、科学技术哲学研究中的最新研究成果,在此一并表示衷心的感谢。

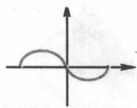


## 第一篇 揭开数学历史与文化的画卷

- |    |                                 |    |
|----|---------------------------------|----|
| 1  | 20 世纪最伟大的数学成就之一<br>——集合论        | 1  |
| 2  | 对无穷与绝对的追求<br>——康托尔              | 3  |
| 3  | 数学大厦的基础是稳固的吗？<br>——罗素悖论与第三次数学危机 | 5  |
| 4  | 数学是研究无穷的科学<br>——公理化集合论及其哲学意义    | 8  |
| 5  | 科学与逻辑<br>——中学数理逻辑简史             | 11 |
| 6  | 科学概念、科学推理、科学证明<br>——中学逻辑思维的基本规律 | 15 |
| 7  | 二百余年的概念科学性之争<br>——函数概念的演进       | 27 |
| 8  | 计算方法的革命<br>——指数、对数函数发展简史        | 30 |
| 9  | 简单的级数原理<br>——数学史上早期的等差数列与等比数列   | 35 |
| 10 | 数学的趣味性<br>——从斐波那契数列谈起           | 42 |



- |    |                                |    |
|----|--------------------------------|----|
| 11 | 科学方法论<br>——完全归纳法与不完全归纳法        | 47 |
| 12 | 向天文学进发<br>——三角学及三角函数的创立与发展     | 50 |
| 13 | 有向线段及其度量<br>——平面向量方法           | 58 |
| 14 | 运动观点上的几何学<br>——平面解析几何的创立       | 64 |
| 15 | “业余数学家之王”<br>——17世纪的一代数学天才费马   | 66 |
| 16 | “现代哲学之父”<br>——笛卡儿              | 68 |
| 17 | 几何与代数方法的有机结合<br>——中学坐标思想与方法论   | 71 |
| 18 | 数学与美学<br>——二项式定理的美学价值与教学       | 76 |
| 19 | 可能性与必然性的统一<br>——概率论的创立与发展      | 80 |
| 20 | 科学估计与科学推断<br>——数理统计的兴起与应用      | 84 |
| 21 | 科学的巨人<br>——牛顿                  | 87 |
| 22 | 百科全书式的杰出科学家<br>——莱布尼兹          | 91 |
| 23 | 科学史上优先权之争<br>——莱布尼兹与牛顿微积分的工作比较 | 94 |
| 24 | “虚数”不虚                         |    |



——复数的产生与发展

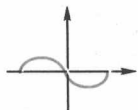
96

## 第二篇 数学从科学实验中走来

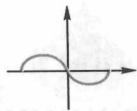
- 1 (0,1)内的有理数与自然数一样多吗?  
——无穷多元素集合的奇妙性质 100
- 2 科学类比实验  
——从平面到空间 104
- 3 寻找费尔马点  
——用向量方法设计最短路程 110
- 4 概率取决于实验吗?  
——几种常见的概率模型 113
- 5 蒲丰投针实验  
——用概率论的方法求  $\pi$  的近似值 118
- 6 图形的制作与画法  
——椭圆、双曲线、抛物线的生成实验 121
- 7 “垛积”、“比类”、“招差”试验  
——中国古代高阶等差级数求和的算法研究 126
- 8 科学史上的“牟合方盖”设计  
——球体积的研究 131
- 9 形象错位惹的祸  
——圆锥的最大截面积的计算 133
- 10 开放的价值  
——一个立体几何题的实验设计 135
- 11 能分装 1000 个苹果吗?  
——关于等比数列问题的设计方案 138
- 12 图形剪拼



- 从 2002 年一道高考题谈起 **139**
- 13** 七巧板上的数学  
——三角函数公式的推导 **142**
- 14** 小设计  
——由一个最优决策的问题谈起 **144**
- 第三篇 生活处处有数学**
- 1** 汽车与环境保护  
——从一道高考题谈数列极限思想的应用 **147**
- 2** 最简单的编码与解码  
——排列组合方法的应用 **150**
- 3** 从“切蛋糕问题”谈起  
——欧拉定理在中学数学教育中的应用 **153**
- 4** 人口数量预测  
——统计知识的应用 **158**
- 5** 银行利率与分期付款  
——等比数列与复利计算 **161**
- 6** 经济数学的基础学科  
——线性规划 **164**
- 7** 饮料公司罐装的学问  
——不等式中的最优化思想 **166**
- 8** 医学中的数学  
——拟定给药方案 **168**
- 9** 数学与物理(1)  
——用向量思想解释双曲线的光学特性 **170**
- 10** 数学与物理(2)



	——物理学原理在中学数学中的应用	172
11	生物中的数学 ——从“蜂房问题”谈起	179
12	到底谁在说谎 ——生活中的简易逻辑问题	181
13	揭示电脑算命的秘密 ——抽屉原理的应用	183
14	彩票中的数学 ——排列组合与中奖概率	183
15	求职申请与资源配置 ——数学期望在优化问题中的应用	187
	参考文献	192



# 第一篇

## 揭开数学历史与文化的画卷

本篇将向您揭开数学历史与文化的画卷,带您探寻数学知识背后的故事。

本篇内容依照现行高中数学新教材的知识体系和结构安排,从数学史和数学文化发展的角度,力图给您提供客观、具体的数学知识背景材料,涉及《高中数学课程标准》规定的必修课程中的集合、函数概念与基本初等函数(指数函数、对数函数、三角函数)、解析几何初步、算法、统计与概率、数列、平面上的向量等内容,也涉及《高中数学课程标准》中的部分选修系列课程中的模块,如导数及其应用、数系的扩充与复数的引入、坐标与参数方程、推理与证明、常用逻辑用语等内容。

通过本篇的学习,将给您带来新的感受,使您了解与教材内容密切相关的知识和背后的故事,理解数学知识的来龙去脉,以利于您全面理解现行教材中的科学知识和理论,开阔视野,提高学习数学的兴趣,增进您的数学文化素质。

本篇还要介绍一些著名数学家:20世纪集合论的创立者康托尔;解析几何的创立者费马、笛卡儿以及微积分的创立者牛顿、莱布尼兹等,追寻他们从事数学研究的历程,体验他们成功背后所付出的艰辛……

### 1 20世纪最伟大的数学成就之一 ——集合论

集合论是现代数学的理论基础,映射是集合论中用来建立现代数学概念和理论的基本工具和手段。不仅如此,集合和映射作为现代数学的一种重要思想方法,一种简单而明确的数学语言,有效地适用于数学的各个分支。自然,集合



和映射,也是整个中学数学的理论基础。

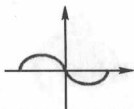
19世纪初,法国著名数学家柯西(Cauchy, 1789—1857)创造性地用极限理论对微积分中的定理进行了严格化和系统的证明,使得牛顿和莱布尼兹创立的微积分学有了坚实的理论基础。但柯西在极限理论中对一条基本定理:“若数列 $X_n$ 单调上升并有上界 $M$ ,则 $X_n$ 必有极限”的证明却借助了几何的直觉,这是不能令人满意的。后来,戴德金(Dedekind, 1831—1916)又进行了深入研究,发现这是涉及实数的性质问题,从而建立起严格的实数理论。直到19世纪70年代德国的大数学家康托尔(G. Cantor, 1845—1918),把研究的对象加以扩大,抽象而成为集合论。

集合,是一个不加定义的基本概念。我们说给定了一个集合 $A$ ,就是给定了一个明确的标准,根据它可以确定哪些是 $A$ 的元素,哪些不是 $A$ 的元素。如康托尔所说,“集合”是指人们直观上或思想中完全确定的、不同事物 $x$ 合成的一个整体 $A$ ,这些事物 $x$ 称为 $A$ 的元素,或者说 $x$ 属于 $A$ ,记作 $x \in A$ 。但康托尔的话并不能作为集合概念的定义,因为“整体”一词并不比“集合”更浅显明白,还有人试图作如下定义:“集合就是具有某种共同属性的事物的全体”。这也不妥。例如,集合 $\{(1,2), H\}$ 中的两个元素——数对 $(1,2)$ 和氢原子 $H$ ,很难说它们有什么共同的属性。而4与1,2,3都是自然数,但4却不是集合 $\{1,2,3\}$ 的元素。

在一般的教科书中,通常用描述性的“定义”来说明集合这个概念:集合是具有一定性质的事物的全体。如人民教育出版社《数学》(2000年第2版)对“集合”的描述是:“一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称为集。”事实上,集合作为一个抽象概念,它概括的内容非常广泛,很难给它下一个定义使之适合每一种具体情况,而且在演绎数学体系中,为避免循环定义,总要选定一些不加定义的基本概念作为理论的出发点,如在几何中以“点”、“线”、“面”、“体”作为基本概念那样。鉴于此,方便的做法是,把“集合”作为整个数学的一个基本概念而不加定义。

对于基本概念,我们虽然不加定义,但可以用与它邻近的概念或形象的比喻来描述它,说明它。如把集合说成是一些东西的“汇集”、“总汇”、“整体”,就是对集合这一概念的描述。通过描述,可以帮助我们加深对这一概念的理解。

集合论中最主要的和最原始的概念是“属于”。在应用集合概念和理论的时候,我们要求集合有所谓的“一义性”:即对于任何一个事物 $x$ 和任何一个集合 $M$ ,“ $x$ 是集合 $M$ 中的一个元素”与“ $x$ 不是集合 $M$ 中的一个元素”,有且只有一个断言是正确的。集合的“一义性”要用数学符号表示就是:



$x \in M$ , 或  $x \notin M$  中, 当且仅当一个表达式成立。

集合论中有两个公理:

外延公理: 若两个集合  $A, B$  具有相同的元素, 则称这两个集合相等, 记为  $A = B$ 。

规定公理: 对任一集合  $A$  及规定  $A$  中元素  $x$  具有某些性质的每一个条件  $S(x)$ , 总存在集合  $B$ ,

$$B = \{x | x \in A, S(x)\}$$

康托尔创立的集合论, 是用说明的方式建立的, 未被严格理论化, 因此被后人称为“朴素”的集合论, 尽管如此, 在我们中学数学教科书或一般高等数学(非基础学科)书中所讲、所用的集合论知识, 正是这种朴素的集合论。

集合论在 20 世纪初已逐渐渗透到各数学分支, 成为分析理论、测度论、拓扑学及数理科学中必不可少的工具, 它已被作为构筑整个数学大厦的基础。它的基本概念和方法不仅渗透到现代数学的各个部门(如分析、代数和拓扑等), 而且也渗透到一些自然科学(如物理学和质点力学等)领域, 为这些学科的奠基提供了基础, 改变了这些学科的面貌。几乎可以说, 如果没有集合论的观点, 很难对现代数学获得一个深刻的理解。以集合论为基础是现代数学区别于以往数学的重要特征之一, 所以, 它的创立和发展, 不仅对数学基础的研究有重要意义, 而且对现代数学和某些自然科学的发展也有深远的影响。

集合和映射, 现已列入中学数学教材, 使学生一开始就接触到现代数学的语言和概念, 并在以后的学习中逐渐理解这些概念的重要位置, 这是实现中学数学教材现代化的必要条件之一。

## 2

## 对无穷与绝对的追求

——康托尔

康托尔是集合论的创始人, 他是对无穷与绝对的追求者、成功者。

康托尔, 1845 年 3 月 3 日生于俄国圣彼得堡, 1918 年 1 月 6 日病逝于哈雷。其父是迁居俄国的丹麦商人, 康托尔 11 岁时移居德国, 在德国上中学, 1862 年入瑞士苏黎世大学, 翌年转入柏林大学主修数学, 从师于库默尔(Kummer)、魏尔斯特拉斯(Weirstrass)和克罗内克(kronechen)。特别是受到魏尔斯特拉斯的影响而转入纯粹数学, 可是最初他父亲希望他学工。当康托尔立志准备献身于