21世纪现代数学指南丛书

# 离散动态规划与Bellman代数

秦裕瑗 著

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪现代数学指南丛书

# 离散动态规划与 Bellman 代数

秦裕瑗 著

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书建立了一个与最优化原理足够贴近的代数系统，叫做 Bellman 半环，从而建立了离散动态规划的基本公理系统，证明了 Bellman 代数(包括极大代数和极小代数)是最优化原理成立的一个充分条件.

全书分三个部分共 8 章，以原理为基础，以 Bellman 代数为工具，讨论离散动态规划的基础理论、算法和应用. 基本公理系统能够推广为一般公理系统，用以讨论 $k$ 阶优化解问题、多目标非劣解问题，并建立匹配优化原理，得到了关于路和匹配的多种优化问题的求解公式. 本书表明，离散动态规划是一门既具有公理化基础又具有代数工具的、专门讨论决策优化学问的应用数学分支.

本书可作为应用数学、管理科学等专业研究生学习教材和专业人员的参考书籍.

**图书在版编目(CIP)数据**

离散动态规划与 Bellman 代数 / 秦裕瑗著. —北京：科学出版社，2009
(21 世纪现代数学指南丛书)
ISBN 978-7-03-023734-7

I. 离… II. 秦… III. 离散－动态规划 IV. O158 O221.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 200857 号

责任编辑：高 嵘 房 阳 / 责任校对：张 琪
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉中科兴业印务有限公司 印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 1 月第 一 版 开本：B5 (720×1000)
2009 年 1 月第一次印刷 印张：18 3/4
印数：1—2 200 字数：349 000

**定价：36.80 元**

如有印装质量问题，我社负责调换

凡服从于科学思维的一切知识，只要准备发展成一门理论，就必然要受公理方法的支配，受数学的支配.

D.希尔伯特

# 前言

1957 年，美国数学家 R. Bellman(1920~1984)提出最优化原理和递推公式，创立了动态规划. 由于深入研究和众多的应用，它已成为一门广为人们关注的应用数学分支.

如何处理好动态规划的基础部分，如何让相关命题的论证、数字例的计算过程代数化，如何扩充求解题目的范围等，时常成为人们思考的事情.

近几年来，作者陆续发现了以下一些事实：

(1) 可以建立一个与最优化原理足够贴近的代数系统，叫做 Bellman 半环，从而能够建立离散动态规划的基本公理系统.

(2) Bellman 代数，包括人们逐渐熟悉的极大代数和极小代数，是最优化原理成立的一个充分条件.

(3) Bellman 代数的摹矩阵是离散动态规划各种问题的主要推理和演算的工具.

(4) 把基本公理系统推广为一般公理系统，它包含了 3 个有用的代数系统，从而解决了 3 个有意义的推广.

(5) 上述结果还为匹配优化问题提供了一个匹配优化原理和求解工具.

本书是以这些发现为基调并结合先前所做的工作组成的著作.

离散动态规划将成为一门具有公理化系统和代数工具而展开讨论学问的应用数学分支.

作者在这一应用数学分支的学习、教学和工作过程中，得到许多学者的关心和帮助. 首先，吴学谋教授是三十多年前使作者关注动态规划的引路人. 20 世纪 80 年代，他主编《科学探索》学术期刊，发表了我在这方面的论文近十篇，为本书的算法部分打下了良好的基础. 其次，30 年来，作者一直受到林诒勋教授的关怀和支持，他是作者从开始学习动态规划至今的见证人. 他几乎每年都有一两次口头或用书信与我谈论相关学术问题，见解十分高明. 本书定稿时，他又提了许多宝贵意见，使本书得到不少提高. 例如，书中不少基本概念的界定问题、5.2~5.4 节中所讨论的关于凝结图的路改进算法及其在摄动问题的应用，都是林教授直接指点的习作结果. 还有唐国春教授. 20 年来，他一直帮助作者，使作者有了一个宝贵的学术活动空间，并在学术上给予了许多帮助.

2006 年夏，武汉科技大学新任校长孔建益教授，副校长陈奎生教授到任后，

立即关注到作者编写本书以及而后的学术工作计划. 在此感谢组织上给予令人感奋的支持和管理学院院长潘开灵教授指派张鹏博士的具体合作工作, 以及所做的良好的物质安排.

第 8 章是和我校轧钢、化工、机械自动控制、信息工程等多门工程学科以及管理科学的多位学者们逐个反复长谈的部分结果. 他们使作者懂得从事应用数学工作的人员应该如何把一种理论方法应用到工程技术中, 得益甚多.

想要完成一件大一点的工作, 亲人的支持, 怎么强调也不为过. 妻子傅赛珍几十年如一日地支持作者的这份工作. 她总是有兴趣地倾听着作者在学术上的向往, 同情和鼓励作者克服在研究过程中的周折与困难. 长女明建处理了许多相关事项, 幼女明复从大洋彼岸不时通过电话、电子信件讨论有关学术问题, 特别是编制程序的问题. 她们少享受了许多天伦之乐, 理解作者对学术的心情, 使作者能够全神贯注地完成这本书稿.

所有这些, 作者深深地感激他们.

作者真诚地懂得, 能够完成这样一本书稿是与国家改革开放三十年所营造的整个社会大环境分不开的. 同时也是组织、同行学者以及亲人好友支持的结果. 当然, 也得益于自己有健康的身体.

在交出这本定稿之际, 上述的主、客观条件都没有变. 有理由相信, 再经过一两年的努力, 将能把另一个文件夹中的资料整理成一本专著《组合最优化论》.

期盼读者们对本书的批评和指正.

秦裕瑗

2008 年 5 月于武汉科技大学

# 摘　要

本书由基础理论、理论推广和应用问题三个部分共 8 章组成.

第一部分为基础理论，包含本书的前 4 章. 第 1 章在分析 Bellman 提出的最优化原理的基础上，建立了 Bellman 半环，记作

$$(\text{Bellman}, \oplus, \otimes)\text{或者 Bellman}.$$

它满足下面 5 条公理(条件):

(i) 优选律. $a \oplus b = a$ 或 $b$.

(ii) (Bellman, $\oplus$)是交换单型半群，零元素记作 $z$.

(iii) (Bellman\\{$z$}, $\otimes$)是交换单型半群，单位元素记作 $e$.

(iv) 对于 Bellman 中任何一个元素 $a$, $a \otimes z = z$.

(v) Bellman 公理. 如果 $c \otimes a \prec c \otimes b$，则 $c \neq z$ 且 $a \prec b$.

以此建立了离散动态规划的基本公理系统和求解公式.

1.4 节和 1.5 节讨论了与 Bellman 半环相关的强优选准域和 Bellman 代数等诸多代数系统，其中，证明了 Bellman 代数是最优化原理成立的一个充分条件(定理 1.7).

把其值最优的策略叫做第一类最优策略，满足最优化原理的策略叫做第二类最优策略，还可以定义第三、第四类最优策略. 定理 1.8 证明了在基本公理系统中，四类最优策略是等价的.

最后，1.7 节按照策略的(1)决策数确定、(2)决策数不确定但状态不重复和(3)决策数不确定且允许状态重复的情形，把离散动态规划分成 3 个基本问题，依次成为第 2，第 3，第 4 章讨论的中心内容.

第 2 章和第 3 章分别讨论问题 I 和问题 II.

在求解公式的基础上，建立问题 I 的(摹)矩阵模型和图论模型，证明了：在同一个 Bellman 半环中，问题 I(问题 II)与赋值多阶段有向图(赋值无回路有向图)中的最优路问题是等价的.

推导递推公式，得到摹矩阵的乘积公式和表上作业格式，成为计算相关题目的基本代数工具.

用科学计算软件 Mathematica 的代码，给出了赋值多阶段有向图和赋值上三角有向图中求解所有最优路及其长度的程序.

用摹矩阵法和摹多项式法，讨论了资源分配问题、多阶段库存问题、设备更

新问题和工程计划的统筹问题，还讨论了矩阵连乘式最优结合方式的算法.

第 4 章讨论问题 III. 主要讨论问题 III-1，即一端(初态或终态)指定，另一端任意的最优策略题目；问题 III-2，即两端均任意的最优策略题目.

4.1 节和 4.2 节讨论了它们的图论模型，网络的基本代数性质.

4.3 节开始引入了同解网络、改进子、全幺方阵的覆盖组、正则网络以及行型、列型算法(4.5 节)、算法的一轮完成性等概念，使得对问题III-1和问题 III-2 能够分别建立第一、二代数结构定理和各自的一般算法(4.4 节和 4.7 节).

著名的 Ford 算法、Yen 算法、Dijkstra 算法、Gauss-Seidal 算法、Hasse 算法、Floyd 算法、Dantzig 算法以及 Hu 算法等全都纳入上述系统之中，代数地逐一得到证明. 还强调那些属于行型算法的有效性.

最后讨论了如何模仿实数域上数值算法设计和初等变换等的思路，寻求最优路算法的意义和有效性(4.13 节和 4.14 节).

第二部分由第 5 章与第 6 章组成，讨论离散动态规划的推广问题.

第 5 章讨论动态规划基本公理系统的第一类推广途径，有 3 种：

(1) 把 Bellman 半环上的最优化原理推广到嘉量原理(5.1 节).引入凝点、凝边及其赋嘉量凝结图概念，得到在凝结图上求解问题 III-2 的路改进算法及其应用(5.2 节和 5.3 节).还初步讨论网络的摄动优化问题(5.4 节).

(2) 在优选半环上讨论峰、谷值优化问题以及峰谷值差均衡型问题. 统作为问题 IV.

(3) 5.7 节讨论强优选准域的代数扩充.

第 6 章作为第二类推广，把 Bellman 半环的优选律推广为广义优选律 $a \oplus a = a$；把 Bellman 公理推广为强优选公理($c \neq z$ 且 $a \prec b$ 当且仅当 $c \otimes a \prec c \otimes b$)，得到广义 Bellman 半环；在广义 Bellman 半环上, Bellman 所提出的最优化原理成立.

6.3 节把基本公理系统推广为一般公理系统. 在这系统上建立了 3 个广义 Bellman 半环，找到相应的应用，得到 3 个问题，它们是问题 V、问题 VI 和问题 VII，依次是讨论吴学谋 $N$ 阶优化原理, 建立求解首 $N$ 阶优化策略问题的算法(6.4 节~6.6 节)；讨论吴沧浦有效化原理，建立求解策略多($l$ 维)目标的有效解算法(6.7 节和 6.8 节)；就多目标问题的一个特殊情形, $l = 2$,讨论实质摹多项式和旅行费用-时间选优问题中的一个应用，得到相应问题的求解算法(6.9 节).

第三部分由第 7 章与第 8 章组成. 讨论本书作者感兴趣的离散动态规划的几个应用问题.

第 7 章讨论在组合优化中的一个应用——匹配优化问题.

本书前几章所讨论的最优路具有局部最优性，即最优路的任何一节是最优的. 模仿这一性质, 7.2.1 小节讨论子路的赋型最优匹配概念.

设 $M$ 是赋值路上的一个匹配. 如果路的左端是 $M$ 饱和的, 把它记作 $\lambda=0$, 否则记作 $\lambda=1$. 如果右端是 $M$ 饱和的, 把它记作 $\nu=0$, 否则记作 $\nu=1$, 并说匹配 $M$ 在这路上赋有 $(\lambda,\nu)$ 型式, 则有定理 7.2: 在赋值路上的最优匹配具有这样的性质, 无论是哪个子路上的子匹配是 $(\lambda,\nu)$ 型的, 则它必须是这个子路上所有赋有这个型式的匹配中最优的.

利用 Bellman 代数, 特别是极大代数的摹矩阵, 由定理 7.2 得到求解公式 (7.2.6)~(7.2.9).

从 7.4 节起, 推广上述工作到所谓的 $Q$ 类图中, 建立了匹配最优化原理, 得到相应的计算公式和结果, 代数地解决了不少匹配优化问题. 除了基本匹配优化问题、基数极大匹配问题, 还解决了首 $N$ 阶优化匹配问题、首 $N$ 阶极大匹配计数问题等.

由于有了这些原理、公式和方法, 所有能够转化为匹配优化问题的题目都有可能从中得益. 7.10 节所讨论的排序问题就是一例.

第 8 章讨论在数学物理方法中的一些应用.

为了让赋值多阶段有向图和 Bellman 代数进入数学物理方法, 8.1 节先讲述了一种求近似解的方法, 叫做五点近似法. 它能帮助人们处理数据工作.

8.2 节和 8.3 节. 讨论了变分法和自动控制的近似方法.

8.4 节和 8.5 节, 讨论了金属压力加工的节能优化求近似解的方法.

作为本书第三部分的小结, 8.6 节专门论述了技术转移(理论联系实际)问题.

书末附录介绍了组合图论与抽象代数的基本知识, 便于读者阅读正文时查看.

这是一本专著, 也可以作为应用数学和管理科学等专业本科生的选修课或者研究生教材.

# Abstract

After reviewing the Bellman principle of optimality and the recurrence formula with detailed discussion of the theory, its algorithms and applications, the author establishes an axiomatic system and a kind of algebra for discrete dynamic programming built on his latest research results which include:

(1) By defining an algebraic system, Bellman semi-ring, which closely follows the Bellman principle of optimality, a basic axiomatic system for discrete dynamic programming can be established.

(2) Bellman algebra, including the well-known max-plus algebra and min-plus algebra, is a sufficient condition for the Bellman principle of optimality.

(3) The modi-matrix, i.e., matrix in Bellman algebra, plays a central role in the theoretical demonstration and numerical computation of many application problems of discrete dynamic programming.

(4) A generalized axiomatic system from the basic one is obtained which includes three concrete algebraic systems that solve the first $N$-th optimum path problem, Pareto multi-objective problem and travel-time-cost problem.

(5) A principle of optimality for the matching problem is established which is very similar to the principle for the path problem and can be used to solve many matching problem of weighted graph of type $Q$.

The book is divided into three parts, the basic theory, the general theory and their applications.

Part I consists of Chapter 1 to Chapter 4.

Chapter 1 elaborates on the Bellman principle of optimality, and then defines the Bellman semi-ring, (Bellman, ⊕, ⊗), which is the foundation of the basic axiomatic system of discrete dynamic programming (Section 1.3.2). Bellman semi-ring should satisfy following five axioms:

(1) Law of optimality. $a \oplus b = a$ or $b$.

(2) (Bellman, ⊕) is a commutative monoid, zero element denoted by $z$.

(3) (Bellman$\backslash\{z\}$, ⊗) is a commutative monoid, unity denoted by $e$.

(4) For $a \in$ Bellman, we have $a \otimes z = z$.

(5) The Bellman axiom. if $c \otimes a \prec c \otimes b$, then $c \neq z$ and $a \prec b$.

Sections 1.4 and 1.5 discuss Bellman semi-ring related strongly optimizing quasi-field, Bellman algebra and etc. It proves that strongly optimizing quasi-field is a sufficient condition of the Bellman principle of optimality (Theorem 1.4).

In section 1.7, discrete dynamic programming is divided into three basic problems of policies:

(1) Those whose number of decisions is definite.

(2) Those whose number of decisions is not definite but have non-repeatable states.

(3) The general case, those whose number of decisions is not certain and might have repeatable states.

These three basic problems of policies are the center of the discussion of chapters 2 to 4.

Chapters 2 and 3 focus on Problems I and II. It proves that over the strongly optimizing quasi-field, Problem I is equivalent to the optimum path problem of weighted multistage digraph, and Problem II is equivalent to the optimum path problem of weighted acyclic digraph. These two optimum path problems are their graph models.

Deriving from the Bellman recurrence formula, two modi-matrix models are established. The modi-product formulas of modi-matrices and their tableau forms are also obtained.

Then they algebraically solve the resource distribution problem, the multistage inventory problem, the equipment replacement problem and the critical path method of project scheduling problem. It also provides a solution for the minimum cost order of operation problem needed for evaluating the product of a string of $n$ matrices.

Chapter 4 proves two algebraic structure theorems and derives two general algorithms for the two cases of Problem III, Problem III-1 for optimum path problems from one vertex to all other vertices and Problem III-2 for problems from all vertices to all others. These algorithms deduce the Ford algorithm, the Yen algorithms, the Dijkstra algorithm, the Gauss-Seidel algorithm, the Hasse algorithm, the Floyd-Warshall algorithm, the Dantzig algorithm, the Hu algorithm, and others. Inspired by the algorithm designs of numerical mathematics and elementary transformation in conventional linear algebra, the author suggests a unified method to establish most of well-known algorithms for solving Problem III (Sections 4.13 and 4.14).

Chapters 5 and 6 of Part II focus on two kinds of generalizations in the discrete dynamic programming.

Chapter 5 discusses the first kind generalization of the basic axiomatic system:

(1) The principle of optimality over the Bellman semi-ring is generalized to the jar-metric principle over semi-ring (Section 5.1).After introducing the concepts of the reduced vertex, the reduced edge, and the reduced networks with jar-metrices, it establishes the path-improving method for solving Problem III-2 on reduced networks and finds their applications (Sections 5.2 and 5.3). It also discusses primarily the pertubance problem on reduced networks (Section 5.4).

(2) The bottleneck (peak/valley value) problem over a weighted multistage digraph is discussed as Problem IV.

(3) The algebraic extension of strongly optimizing quasi-field (Section 5.7) is also discussed.

Chapter 6 generalizes the law of optimization of Bellman semi-ring to the law of generalized optimization $a \oplus a = a$ and the Bellman axiom to the axiom of strong optimization, i. e., $c \neq z$, $a \prec b$ if and only if $c \otimes a \prec c \otimes b$, as the second kind of generalization to obtain the generalized Bellman semi-ring. Over the generalized Bellman semi-ring, the Bellman principle of optimality also holds.

Three concrete general Bellman semi-rings are established, each finding their own applications, and resulting three problems, Problem V, Problem VI and Problem VII.

An algorithm for solving Problem V is presented in Sections 6.4 to 6.6, based on the research of Wu X.M. who generalized the Bellman principle of optimality to the principle of optimality of the first $N$ orders (1981). Another algorithm for solving Problem VI (Sections 6.7 and 6.8) is presented based on the research of Wu C.P. who established the principle of Pareto-optimality for multi-objective problem (1976). As a special case for 2-objective problem, a modi-polynomial method is suggested for Problem VII (Section 6.9). Traveling time-cost problem is an example of it.

Chapters 7 and 8 of Part III explore some application problems the author is interested in.

Chapter 7 concerns the matching optimum problems.

Let $M$ be a matching on a weighted path. If the left end is $M$-saturated, we denote it by $\lambda = 0$, otherwise, by $\lambda = 1$. If the right end is $M$-saturated, we denote it by $\nu = 0$, otherwise, by $\nu = 1$. We refer the matching $M$ to be of type $(\lambda, \nu)$. The following theorem is proved.

An optimum matching on a weighted path has the property that on whichever sub-path, if the sub-matching is of type $(\lambda,\nu)$, it must be optimum among all matchings of the type on the sub-path.

Generalizing the theorem, the chapter establishes the principle of optimality for matching problem on weighted graph of type $Q$ (Section 7.4.1). Then it derives its computation formulas and results. Based on which, many optimal matching problems are solved algebraically.

Chapter 8 puts the applications into mathematics physics. Section 8.1 suggests an approximation method, the so-called five-vertex method. Another approximation method for calculus of variation method and automation control is also introduced in Sections 8.2 and 8.3. Sections 8.4 and 8.5 discuss the optimization of the energy saving process during rolling schedule of metal plastic processing.

As a summary of Part III, Section 8.6 discusses the applications of theories in real world practices.

The appendix serving as a convenient reference for the readers reviews the fundamentals of combinatorial graph theory and abstract algebra.

The intended audience of the book is first-year graduate students of Applied Mathematics. The book may also interest operations researchers, management engineers with quantitative backgrounds, and econometricians who have the basic understanding of conventional linear algebra and operations research.

# 目　　录

## 第一部分　基 础 理 论

## 第二部分　理论推广