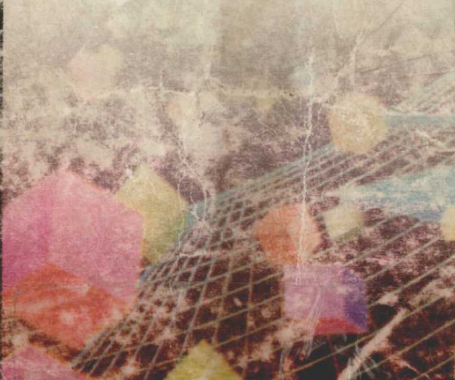
初中数学
解题方法与技巧

于永昌　主编



辽宁大学出版社

初中数学解题方法与技巧

主编　于永昌

辽宁大学出版社

1997年·沈阳

图书在版编目(CIP)数据

初中数学解题方法与技巧/于永昌主编.-沈阳:辽宁大学出版社,1997.1
初中用
ISBN 7-5610-3314-1

Ⅰ.初… Ⅱ.于… Ⅲ.数学课-解题-初中 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 22243 号

初中数学解题方法与技巧
于永昌 主编

辽宁大学出版社出版发行 (沈阳市崇山中路 66 号)
辽宁工程技术大学印刷厂印刷

开本:787×1092 1/32 印张:11.875 字数:240 千
1997 年 1 月第 1 版 1997 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—10000

责任编辑:安宝新 封面设计:刘桂湘
刘 葵 责任校对:于 齐
马 静

ISBN 7-5610-3314-1
G·1135 定价:11.00 元

前　言

初中阶段在一个人成长的过程中起着巨大的作用，是打基础的重要阶段。在打基础的过程中，培养学生的学习习惯，良好的学习方法是重中之重，良好的学习方法是需要指导和训练的。学习方法是广大教育工作者长期热心探索的课题，也是学生和家长所关注的热点。爱因斯坦指出：成功=艰苦的劳动+正确的方法+少说空话。因此用正确的方法引导学生遵循客观规律去学习数学知识，掌握方法，提高技能，是目前应试教育向素质教育转变的一个重要组成部分。

本书想通过初中数学学习的学习方法的指导，提供一条思路，我们组织了教学第一线有多年教学实践经验的教师和教研员，结合他们教学、教研的体会，编写了本书。我们力图以培养能力，发展智力为目标，同时注意学习方法的指导和良好学习习惯的培养。本书前一部分，针对目前学生中存在学习不得法，复习不得要领的现状，重点指导学生掌握学习方法，摆脱死记硬背和题海战术的束缚，后一部分精选了一部分典型例题，并对其解题思路、解题技巧以及容易产生的错误给予了具体辅导，从而进一步提高分析问题和解决问题的能力。

本书可供数学教师，在校学生教学使用，也可供参加高中、中专、技校升学考试的学生复习使用。由于我们水平有限，难免疏漏，恳切希望老师和同学们在使用中注意研究和总结，及时提出宝贵意见。

编者

目　　录

第一章　代数初步知识

本章的主要内容包括用字母表示数，列代数式，求代数式的值，公式与简易方程等．这些内容是以小学数学中的代数知识为基础，为学好初中代数所介绍的预备知识，为进一步学好初中代数奠定良好的基础．

本章的重点是列代数式，运用代数的方法解决问题，一个十分重要的前提就是把问题中的数量关系用代数式表示出来．本章的难点也是列代数式，列代数式要结合分析具体问题中的各种数量关系，还要选取适当的字母去表示相应的量，无论从灵活性还是从复杂性上说，都更进了一步，因此，列代数式的能力是非常重要的基本功之一．

一、解题方法例题

例 1. 用代数式表示：

（1）a 的 b 倍与 c 的 $\frac{1}{5}$ 的和．

（2）a 与 3 的和除以比 b 小 4 的数的商．

（3）被 2 除商 n 余 1 的数．

（4）x、y 两数的立方和除这两数的和的立方．

解：（1）$ab+\frac{1}{5}c$　　（2）$\frac{a+3}{b-4}$

（3）$2n+1$　　（4）$\frac{(x+y)^3}{x^3+y^3}$

列代数式时应注意：（1）要正确理解数量关系．关键明确问题中的和、差、积、商与大、小、多、少、倍、几分之几，百分之几，倒数等词的意义和它们的关系．（2）要弄

清运算顺序，如立方和与和的立方是完全不同的．另外注意除和除以的区别．(3) 注意书写格式，数与字母相乘时，可省略乘号，且要把数字写在字母的前面，如遇带分数与字母相乘时，一定要把带分数化成假分数．但数与数相乘时，千万不可省略乘号．所列代数式如含有除的关系时，一般要写成分数的形式．

例 2. 水池有甲、乙两个进水管，单独开甲管 a 小时，可注满水池，单独开乙管 b 小时可注满水池，用代数式表示：(1) 两管同时开放每小时可注入水池的几分之几？(2) 两管同时开放，多少小时可以注满水池？

分析：解本题的关键是分清工作量，工作时间和工作效率之间的数量关系．

$$工作时间=\frac{工作量}{工作效率}$$

解：(1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　　　(2) $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$小时

例 3. 一个打字员要打 a 张蜡纸，原计划每天打 b 张，分别代入代数式表示：(1) 按原计划需多少天才能完成？(2) 如果每天比原计划多打 c 张，可提前多少天完成？(3) 如果按原计划工作了 d 天，还有一些蜡纸没有打完，余下的有多少张？

分析：本题的数量关系是总数 = 每份数 × 份数．

解：(1) $\frac{a}{b}$天．(2) $\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}\right)$天，(3) $(a-bd)$ 张

注意：如果所列代数式是乘除关系，单位名称在式子的后面．如果所列代数式是加减关系，必须把式子用括号括起来后，再写单位名称．

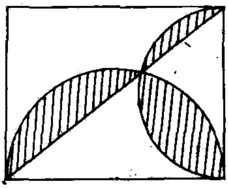
例 4. 已知$\frac{a-b}{a+b}=2$. 求$\frac{2(a-b)}{a+b}-\frac{a+b}{3(a-b)}$的值 .

解：$\because \frac{a-b}{a+b}=2$ $\quad \therefore \frac{a+b}{a-b}=\frac{1}{2}$，

$\therefore$原式$=2\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=4-\frac{1}{6}=3\frac{5}{6}$

说明：直接求出 a、b 的值代入是不可能的．巧用$\frac{a+b}{a-b}$与$\frac{a-b}{a+b}$之间的倒数关系，整体代入，则问题便迎刃而解了．

例 5. 如图，分别以长方形的长和宽为直径作半圆，其交点在长方形的一对角线上，若长方形的长 $a=40$mm，宽 b = 30mm，试求阴影部分的面积．



分析：图中的阴影部分的面积，可以看成是两个半圆在图中覆盖的面积去掉一个直角三角形的面积后而得到的．

解：$S_{阴}=\frac{1}{2}\pi\cdot(\frac{a}{2})^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{2}\times3.14\times\left(\frac{40}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times3.14\times\left(\frac{30}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times40\times30.$

$=628+353.25-600$

$=381.25(\text{mm}^2)$

例 6. 解下列方程：

(1) $0.6x+1.2=4$ $\qquad$ (2) $\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}=1\frac{1}{2}$

分析：解简易方程时，准确、迅速地寻求方程两边都加上（或减去）以及方程两边都乘以（或除以）同一个适当的

数，这是重要环节，遇到方程中出现分数或小数的时候，最好先把它们化成整数，可以使计算过程较为简便．

(1) 解：方程两边都乘以10，得 $6x+12=40$

方程两边都减去12，得 $6x=28$

方程两边都除以6，得 $x=4\frac{2}{3}$

(2) 解：方程两边都乘以12，得 $8x-9=18$

方程两边都加上9，得 $8x=27.$

方程两边都除以8，得 $x=3\frac{3}{8}$

说明：以上各题按照新方法解方程，一般采用下面两个步骤：

(1) 方程两边都加上（或减去）同一个适当的数；

(2) 方程两边都乘以（或除以）同一个适当的数．

解简易方程的步骤是：

(1) 使方程的一边只含有带有未知数的那个数；

(2) 是使方程一边只剩下 x，也就是求出结果了．

例7. 我国古代趣题：李白无事街上走，提壶去买酒，遇店加一倍，见花喝一斗（斗为古代盛酒器皿），三遇店和花，喝完壶中酒，试问壶中原有多少酒？（题意说明："三遇店和花"是指先遇店，后见花，并重复三次）．

分析：算术解法．李白先遇店后遇花，第三次见花前，壶内只有一斗酒，而遇店前壶内应有$\frac{1}{2}$斗酒，依此类推，第二次见花前壶内有酒$\left(\frac{1}{2}+1\right)$斗．第三次遇店前壶内有酒$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$斗．所以第一次遇店前壶内原有酒：$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)+1\right]=\frac{7}{8}$（斗），即原壶内有酒$\frac{7}{8}$斗．

代数解法：设壶中原有酒 x 斗，根据题意得 $2[2(2x-1)-1]-1=0$.

解这个方程，得 $x=\frac{7}{8}$

答：壶中原有酒$\frac{7}{8}$斗.

比较这两种解法，显然代数解法简便，代数解法的特点是设未知数 x 后，可直接将条件"翻译"成代数式，代替了算术解法里曲折的分析思考过程.

二、解题技巧习题

（一）填空题

(1) 公共汽车上有 a 名乘客，中途上车 b 名，又下车 c 名，公共汽车里还有________名乘客.

(2) 某工厂去年生产肥料 m 吨，今年比去年增产 60%，今年的产量用代数式表示为________.

(3) 一个两位数，十位数字是 a，个位数字是 b，这个两位数用代数式表示为________.

(4) 甲、乙两车分别以每小时 m 千米和 n 千米的速度从相距 S 千米的 A、B 两地出发，相向而行. 如果①两车同时出发，那么________小时相遇；②甲车先行两小时，那么在甲车开出________小时后，两车相遇.

（二）选择题

(1) a 个学生按 6 人一组分成若干组，其中一组还少 1 人，则一共可分为（　　）组.

(A) $\frac{a-1}{6}$　　(B) $\frac{a}{6}-1$

(C) $\frac{a+1}{6}$　　(D) $\frac{a}{6}+1$

(2) 代数式$\frac{1}{x^2+1}$的值（　　）

(A) 一定小于 1　　(B) 不可能小于 1

(C) 可能大于 1　　(D) 可能等于 1

(三) 计算

某种家用电器，原价每件 a 元，现降价 $b\%$ 酬宾，购买 c 件共需 m 元，m 等于多少？计算当 $a=750$，$b=20$，$c=10$，m 的值．

(四) 解下列方程：

(1) $\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}-0.5.$

(2) $\frac{5}{12}x-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

(五) 列方程解应用题

(1) 一本书小明第一次看了全书的$\frac{1}{4}$，第二次看了 25 页，还剩 65 页没有看，这本书共有多少页？

(2) 加工一批零件需 10 分钟，加工到总数的一半时，引进了加工新设备，4 分钟就能加工一个，结果提前 2 小时 12 分钟完成任务，这批零件共有多少个？

第二章 有理数

本章的主要内容是有理数的有关概念及其运算，它是初等数学的重要基础，在初中数学以及其他各门学科的学习中，都是离不开的．有理数的运算是全章的重点，为了正确迅速地进行有理数的运算，必须深刻理解有理数的运算法则，其关键在于理解负数和绝对值的意义．本章的难点是对有理数运算法则的理解以及有理数减法的运算．进行有理数的运算关键是搞清符号问题，特别是减法的符号确定相对难一些．检查本章学习效果如何，主要是做有理数混合运算习题的熟练程度及准确率，为了提高运算能力，应注意（1）要熟练掌握各种运算法则．（2）正确掌握运算顺序．（3）养成良好的解题习惯．计算前，认真审题，确定运算顺序（包括选用简便算法）．计算过程中，一丝不苟，防止出错．

一、解题方法例题

例1．如果 $b<0$，$a>0$，$a+b>0$，则下列各式成立的是（　　）．

（A）$b<-a<-b<a$（B）$b<-b<-a<a$

（C）$-a<-b<b<a$（D）$-a<b<-b<a$

分析：$b<0$，$a>0$ 表明 a，b 两数异号，再根据 $a+b>0$，易知 a 的绝对值大于 b 的绝对值即 $|a|=a>|b|=-b$．由 $b<0$，易知 $-b>0$，可得 $-b>b$，由 $a+b>0$，可得 $b>-a$，即：$-a<b<-b<a$ 综上所述，应选择（D）．

从"数形结合"的数学思想出发，本题还可以由 $a>0$，$b<0$，$a+b>0$ 的条件，得到 a、b 异号，且 a 的绝对值大

于 b 的绝对值的结论后，先在数轴上表示 a、b 所对应的点，再根据相反数的几何意义，在数轴上表示出 $-a$、$-b$ 所对应的点，然后利用数轴，轻而易举地就能找到正确答案．另外，此题也可利用特殊值法比较大小．

例 2. 比较 $-\frac{32}{29}$，$-\frac{12}{11}$，$-\frac{96}{89}$，$-\frac{16}{15}$的大小．

分析：本题的最小公分母是 $29\times11\times89\times15=425865$，因数字太大，通分母有困难，而采取通分子的方法，可减少计算量，使问题迎刃而解．

解：$-\frac{32}{29}=-\frac{96}{87}$，$-\frac{12}{11}=-\frac{96}{88}$，

$-\frac{16}{15}=-\frac{96}{90}$. 而 $-\frac{96}{90}>-\frac{96}{89}>-\frac{96}{88}>-\frac{96}{87}$，

$\therefore -\frac{16}{15}>-\frac{96}{89}>-\frac{12}{11}>-\frac{32}{29}$.

例 3. 当 $a>0$，$b<0$ 时，

化简 $|6-b|+|b-2a|+\left|2+\frac{1}{2}a\right|$.

分析：化简这类题的关键是根据所给的条件，做出正确的判断．即 $6-b$，$b-2a$，$2+\frac{1}{2}a$ 是正数，负数，还是零，然后根据绝对值的意义去掉绝对值符号．

因为 $b<0$，$\therefore -b>0.6-b=6+(-b)>0$，因为 $a>0$，所以 $-2a<0$，

又因为 $b<0$，$b-2a=b+(-2a)<0$.

解：$|6-b|+|b-2a|+\left|2+\frac{1}{2}a\right|$

$=6-b+[-(b-2a)]+2+\frac{1}{2}a$

$=6-b-b+2a+2+\frac{1}{2}a$

$=8-2b+\frac{5}{2}a$

例 4. 计算 $\left|\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right|+\left|\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right|+\left|\frac{1}{102}-\frac{1}{103}\right|+\left|\frac{1}{103}-\frac{1}{104}\right|$

分析：如果先计算每一个绝对值符号内的数，显然计算量很大，由于各个绝对值符号内之间有相同的数，所以想到先去掉绝对值符号再计算，这样会简便些．

解：原式 $=\frac{1}{100}-\frac{1}{101}+\frac{1}{101}-\frac{1}{102}+\frac{1}{102}-\frac{1}{103}+\frac{1}{103}-\frac{1}{104}$

$=\frac{1}{100}-\frac{1}{104}$

$=\frac{4}{100\times104}$

$=\frac{1}{2600}$

例 5. 计算 $(-3.39)+(-2.57)+\left(+3\frac{5}{6}\right)+\left(-5\frac{1}{7}\right)+\left(-3\frac{1}{6}\right)+(-6.61)+\left(-24\frac{6}{7}\right)+(+2.57)$

分析：本题中的几个加数有正数，有负数，有小数，有分数，为使运算简便，可把互为相反数的数结合在一起，把能凑成整数的小数结合在一起，把分母相同或易于通分的分数结合在一起．

解：原式 $=[(-3.39)+(-6.61)]+[(-2.57)+(+2.57)]+\left[\left(+3\frac{5}{6}\right)+\left(-3\frac{1}{6}\right)\right]+\left[\left(-5\frac{1}{7}\right)+\left(-24\frac{6}{7}\right)\right]$

$=(-10)+0+\frac{2}{3}+(-30)$

$=-40+\frac{2}{3}$

$$= -39\frac{1}{3}$$

例 6. 计算 $-0.125+3\frac{1}{4}+2.75-5\frac{7}{8}$

分析：几个既有小数又有分数的有理数相加，最好要灵活考虑把小数化成分数或把分数化成小数后再进行运算．

解：原式 $= -\frac{1}{8}+3.25+2.75-5\frac{7}{8}$

$$= \left(-\frac{1}{8}-5\frac{7}{8}\right)+(3.25+2.75)$$

$$= -6+6$$

$$= 0$$

例 7. 计算 $125\times\left(-5\frac{1}{2}\right)\times(-32)\times\frac{2}{11}\times(-25)$

分析：把互为倒数的两个数结合在一起，把参加运算的某个数拆成两个或四个以上的数再与其他的数"凑整"，不失为一种解题技巧．

解：原式 $= -\left(\frac{11}{2}\times\frac{2}{11}\right)\times125\times8\times4\times25$

$$= -1\times1000\times100$$

$$= -100000$$

例 8. 计算 $\left(-1\frac{3}{4}\right)\times\frac{12}{7}\times\left(\frac{1}{7}-1\frac{1}{3}\right)-2\frac{1}{7}\times(-3)$

分析：根据本题的数字特点，逆用分配律 $ab+ac=a(b+c)$，是解本题的捷径．

解：原式 $=(-3)\times\left(\frac{1}{7}-1\frac{1}{3}\right)-2\frac{1}{7}\times(-3)$

$$=(-3)\times\left(\frac{1}{7}-\frac{4}{3}-\frac{15}{7}\right)$$

$$=(-3)\times\left(-3\frac{1}{3}\right)$$

$$=10$$

例 9. 计算 $240\frac{24}{39}\div(-48)$

分析：本题若直接应用有理数的除法法则比较麻烦．若将 $240\frac{24}{39}$ 适当变形，应用运算律，可巧妙求解．

解：原式 $=\left(240+\frac{24}{39}\right)\div(-48)$

$$=240\div(-48)+\frac{24}{39}\div(-48)$$

$$=-5-\frac{1}{78}$$

$$=-5\frac{1}{78}$$

例 10. 计算：$(-2)^{1996}+(-2)^{1997}$

分析：$(-2)^{1997}=(-2)^{1996}\cdot(-2)$，然后逆用分配律可使运算简便．

解：原式 $=(-2)^{1996}+(-2)^{1996}\cdot(-2)$

$$=(-2)^{1996}[1+(-2)]$$

$$=2^{1996}\times(-1)$$

$$=-2^{1996}$$

例 11. 下列由四舍五入得到的近似数，各精确到哪一位，各有几个有效数字？

(1) 32.6 亿　　　　(2) 0.05003

(3) 4.50×10^3　　　　(4) 75000

解：(1) 32.6 亿精确到千万分位，有三个有效数字 3、2、6；

(2) 0.05003 精确到十万分位，有四个有效数字 5、0、0、3；