2000

高中数学

点测

名师视点

柏均和 著

点清重点

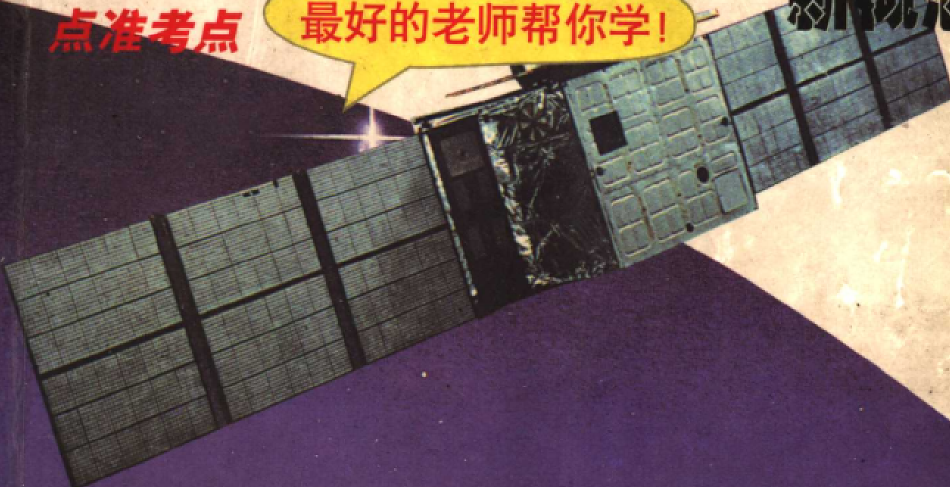
点拨难点

点明热点

点准考点

最好的老师帮你学！

新概念



學苑出版社

2000

高中数学

点 测

名师视点

新概念

柏均和 天津一中特级数学教师，天津市模范教师，民盟天津市副主委兼中等教育委员会主任，天津市教育局特约督导，《数学教育学报》编委，全国政协第九界委员。在中央级刊物发表论文40余篇，出版数学参考书多部。

执行编委：李宝忱
责任编辑：郭　强
封面设计：阿　坤

ISBN 7-5077-0720-2

9 787507 707205 >

定价：19.80元

名师视点丛书

高 中 数 学

柏 均 和

学 苑 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

名师视点丛书:高中数学/柏均和著. - 北京: 学苑出版社,
1999.12

ISBN 7-5077-0720-2

Ⅰ.名… Ⅱ.柏… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(99)第 20114 号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街 11 号 100036
高碑店市印刷厂印刷 新华书店经销
850×1168 32 开本 19.25 印张 517 千字
2000 年 1 月北京第 1 版 2000 年 1 月北京第 1 次印刷
印数:10000 册 定价:19.80 元

序

“科教兴国，尊师重教”是我国的国策。**提高人口素质，多出人才**是人民教师的职责。为此，我们特约北京、天津和江浙在第一线教学多年，富有声望和教学经验的特级、高级教师，编写一套旨在全面贯彻教育方针，实施素质教育，培养跨世纪人才的**《名师视点丛书》**。名师写书和名师从教一样，是为适应**“面向现代化，面向世界，面向未来”**的需要，培养新世纪的学生，掌握扎实的现代化科学知识，引导他们善于学习。因为未来的文盲，不是没有知识，而是没有学会怎样学习的人。

出版**《名师视点丛书》**，主要是供初、高中学生在阶段复习和总复习中使用。每一分册都是以激发学习兴趣，提高自学能力，开拓创造能力为主旋律，从而帮助学生大面积、大幅度地提高文化素质，使其成为21世纪的优秀人才。每一学科都是遵照教学新大纲，依据人教社新教材，中考、高考最新说明，向学生系统介绍行之有效，事半功倍的学法要点，即：**点清重点，点拨难点，点明热点，点准考点**。

本套丛书的最大特色:不仅每位作者把自己多年教学心血结晶、独特教学风采汇集成册,而且诸家联袂携手,共同推出珠联璧合的力作。不管您与名师相距远近,只要静坐书屋,精心潜读,同样可以获取丰厚教益。全国政协常委、九三学社中央常务副主席、中国科学院院士徐采栋教授欣任主编,鼓励本套丛书的出版为“科教兴国,尊师重教”尽一份力量。愿我们出版的这套**《名师视点丛书》**,在当今**改革开放,科教兴国**的大好形势下,对广大学生的学习、应考助一臂之力,愿读者从中获得向上的力量。

名师视点丛书编委会

《名师视点》丛书编委会

主编　徐采栋（九三学社中央副主席，贵州大学校长，中国科学院院士）

编委　（以姓氏笔划为序）

王天谡　王维翰　宁潜济
李宝忱　陈中复　孟国凯
张　厚　赵大鹏　郭立昌
柏均和　黄儒兰

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一　要点梳理(4 个问题) …………………………………… (1)

1　集合 …………………………………………………… (1)

2　映射与函数 …………………………………………… (3)

3　幂函数 ………………………………………………… (7)

4　指数函数与对数函数 ………………………………… (10)

二　考点剖析(4 个问题) …………………………………… (13)

1　深刻地认识集合的知识以及映射与函数的概念…… (13)

2　函数的基本性质及其应用规律……………………… (26)

3　二次函数的知识规律与典型应用…………………… (34)

4　指数方程、对数方程的解法及参数讨论问题 ……… (44)

三　学法指导 ………………………………………………… (56)

第二章　三角

一　要点梳理(3 个问题) …………………………………… (65)

1　三角函数………………………………………………… (65)

2　两角和与差的三角函数,解斜三角形 ……………… (68)
——两角和与差的三角函数

2　两角和与差的三角函数,解斜三角形 ……………… (73)
——解斜三角形

3　反三角函数和简单三角方程………………………… (76)

二　考点剖析(5 个问题) …………………………………… (78)

1　三角函数的性质图象和典型应用例析……………… (78)

2　三角式的化简、证明、求值问题及其变形规律……… (88)

3　解斜三角形的知识规律与典型应用例析 ………… (119)

4　深刻地认识反三角函数概念 ……………………… (132)

5　简单三角方程的解法规律 …………………………… (143)
三　学法指导………………………………………………… (155)
第三章　不等式
一　要点梳理(2 个问题) ……………………………… (167)
1　不等式的概念、性质和证明………………………… (167)
2　不等式的解法 ……………………………………… (169)
二　考点剖析(3 个问题) ……………………………… (170)
1　深刻地认识不等式的概念与性质 ………………… (170)
2　证明不等式的基本方法 …………………………… (176)
3　不等式的解法的分类研究及有关规律 …………… (191)
三　学法指导………………………………………………… (214)
第四章　数列、极限、数学归纳法
一　要点梳理(3 个问题) ……………………………… (230)
1　数列 ………………………………………………… (230)
2　极限 ………………………………………………… (232)
3　数学归纳法 ………………………………………… (235)
二　考点剖析(5 个问题) ……………………………… (237)
1　关于等差数列与等比数列基本公式的应用例析
与注意事项 ………………………………………… (237)
2　复利问题 …………………………………………… (250)
3　数列求和的基本方法 ……………………………… (259)
4　深刻地认识数列极限的概念及运算的有关规律 … (268)
5　数学归纳法的分类研究及有关规律 ……………… (281)
三　学法指导………………………………………………… (293)
第五章　复数
一　要点梳理(2 个问题) ……………………………… (305)
1　复数的概念 ………………………………………… (305)
2　复数的运算 ………………………………………… (308)
二　考点剖析(3 个问题) ……………………………… (311)
1　深刻地认识复数的概念 …………………………… (311)

2 复数运算的基本方法,运算技巧与注意事项……… (322)
3 在复数域内因式分解与解方程 ………………… (333)
三 学法指导……………………………………… (341)
第六章 排列、组合、二项式定理
一 要点梳理(2 个问题) ……………………… (361)
1 排列与组合 …………………………………… (361)
2 二项式定理 …………………………………… (365)
二 考点剖析(2 个问题) ……………………… (368)
1 排列组合问题的分类研究与典型例析 ……… (368)
2 二项式定理的应用规律、解题技巧与注意事项…… (388)
三 学法指导……………………………………… (407)
第七章 立体几何
一 要点梳理(2 个问题) ……………………… (413)
1 直线和平面 …………………………………… (413)
2 多面体和旋转体 ……………………………… (419)
二 考点剖析(5 个问题) ……………………… (423)
1 两个基本关系与两个基本概念的应用例析
及有关规律 …………………………………… (423)
2 多面体和旋转体的运算及转化的分析方法 ……… (437)
3 多面体的截面 ………………………………… (445)
4 反证法与同一法 ……………………………… (453)
5 综合问题的例析 ……………………………… (456)
三 学法指导……………………………………… (462)
第八章 解析几何
一 要点梳理(2 个问题) ……………………… (481)
1 直线 …………………………………………… (481)
2 圆锥曲线及其它曲线 ………………………… (484)
二 考点剖析(7 个问题) ……………………… (490)
1 轨迹问题 ……………………………………… (490)
2 极值问题 ……………………………………… (507)

3　参数和参数方程问题 …………………………………（522）
4　极坐标问题 ……………………………………………（538）
5　曲线间关系与方程组问题 ……………………………（550）
6　解析法证明几何题 ……………………………………（563）
7　几何变换问题 …………………………………………（567）
三　学法指导……………………………………………………（584）

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一　要点梳理

1　集合

〈1〉集合

是数学中最原始的概念之一，不能以其它更基本的概念给它下定义，是不定义概念．其每一组对象的全体形成一个集合（或简称集），各个对象叫这集合的元素．

〈2〉分类

(1)有限集：含有限个元素的集合，

(2)无限集：含无限个元素的集合，

(3)空集：不含任何元素的集合．

〈3〉特征

(1)确定性：一给定集合 A，x 为某一具体对象，则 x 或为 A 的元素或不是，二者必居其一．

(2)互异性：一集合中的元素分别代表不同的对象，相同对象归入一集合时，只能算作这集合中的一个元素．

(3)无序性：一给定集合 A 中的元素，不论其顺序如何排列，只能算一个确定的集合，不能视为不同的集合．

(4)广泛性：即集合中的元素所代表的对象允许有意义上的广泛性．

〈4〉表示法

(1)列举法：把集合中的元素逐一列出，写在大括号内．

(2)描述法:把集合中元素的公共属性描述出来写在大括号内.

(3)习惯表示:

①集合:大写拉丁字母表示,

②元素:小写拉丁字母表示,

③a 是集合 A 中的元素:记为 $a\in A$,

④b 不是集合 A 中的元素:记为 $b\notin A$ 或 $b\overline{\in}A$,

⑤自然数集:N,

⑥整数集:Z,

⑦有理数集:Q,

正有理数集:Q^+,

负有理数集:Q^-,

⑧实数集:R,

正实数集:R^+,

负实数集:R^-.

〈5〉关系

(1)子集:两个集合 A 与 B,如 A 的任一元素都是 B 的元素,则 A 叫 B 的子集,记为 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$),

①任一集合是它本身的子集,记为 $A\subseteq A$,

②空集是任何集合的子集,记为 $\phi\subseteq A$,(注意 ϕ 与 $\{\phi\}$ 不同),

③真子集:如 A 是 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不属于 A,则 A 是 B 的真子集,记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$),

④空集是任何非空集的真子集.

(2)集合相等:两个集合 A 与 B,如 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

(3)交集:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫 A 与 B 的交集,记为 $A\cap B$.

(4)并集:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫 A 与 B 的并集,记为 $A\cup B$.

(5)全集;在研究集合间关系时,有时一些集合是某一给定集合的子集,该给定集合的全集,记为 I.

(6)补集:如 $A\subseteq I$,由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合,

叫 A 在 I 中的补集,记为 $\overline{A}$.

2　映射与函数

〈1〉**映射**

设 A、B 是两个集合,如按某种对应法则 f,对 A 中任一元素,在 B 中都有唯一元素和它对应,这样的对应(包括 A、B 以及 f),叫从 A 到 B 的映射,记为 $f:A\to B$.

简而言之,映射的特征是:

一对一
多对一　,均可,但不能一对多,即

A 无余　　　A 中每一元素有象,
B 可余　,或　B 中元素不一定有原象.

〈2〉**一一映射**

设 A、B 是两个集合,$f:A\to B$ 是从 A 到 B 的映射,在这映射的作用下,对 A 的不同元素如能在 B 中有不同的象,而 B 中每一元素都有原象,则这映射叫 A 到 B 上的一一映射.

简而言之,一一映射的特征是:

单射——对一,

射满—A 无余,

满射—B 无余.

〈3〉**逆映射**

设 A、B 是两个集合,并且 $f:A\to B$ 是 A 到 B 上的一一映射,如对 B 中每一元素 b,使 b 在 A 中原象 a 与之对应,这样所得映射叫映射 $f:A\to B$ 的逆映射,记为 $f^{-1}:B\to A$.

注意,在一一映射的基础上才能谈到逆映射.

〈4〉**函数**

(1)定义

①传统定义:如在某变化过程中有两个变量 x、y,并对 x 在某一范围内的每一确定的值,按照某个对应法则,y 都有唯一确定

的值和它对应，那 y 就是 x 的函数.

x—自变量，

x 取值范围—函数的定义域，

和 x 值对应的 y 值—函数值，

函数 y 值的集合—函数的值域.

②近代定义：设 A、B 都是非空数的集合，f 是 A 到 B 的一个对应法则，那 A 到 B 的映射 $f:A\to B$，叫 A 到 B 的函数，记为 $y=f(x)$

$x\in A$，$y\in B$，

原象集合 A—函数 $y=f(x)$ 的定义域，

象集合 C—函数 $y=f(x)$ 的值域，$C\subseteq B$.

比较：

相同点：

ⅰ　实质一致，

ⅱ　定义域、值域意义一致，

ⅲ　对应法则一致.

不同点：

ⅰ　传统定义从运动变化观点出发，描述生动、直观.

ⅱ　近代定义从集合、映射观点出发，其描述更具广泛性.

这里有以下问题应当注意：

ⅰ　函数是具备以下特点的特殊映射：

A、B 是非空数的集合，

$f:A\to B$ 是 A 到 B 的映射.

ⅱ　函数的核心—对应法则 f，其 f 对 $y=f(x)$，是 x 拉着 y 的纽带与法则，

f 简单时，可用解析式表示，

f 复杂时，可用其它方式表示.

ⅲ　函数的重要部分：

定义域：如函数的解析式相同，但定义域不同，视为不同的函数.

值域:单值函数.

符号:$y=f(x)$,仅表 y 是 x 的函数,当 $y=f(x)$是一解析式,也可视为一方程.

(2)性质

①单调性:如果函数 $y=f(x)$在某个区间上是增函数(或减函数),就说 $f(x)$在这一区间上具有(严格的)单调性,这一区间叫做 $f(x)$的单调区间.

这里有以下问题应当注意:

i 有些函数在整个定义域内都是增函数或减函数;
有些函数在某些区间上是增函数,而在另一些区间上是减函数;
有的函数定义域不是区间,则无单调区间;
有的函数,如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,区间$(0,+\infty)$上是减函数,在$(-\infty,0)$上也是减函数,但不可说在区间$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

ii 正确理解单调含义,即在单调区间内,只增不减或只减不增,不能又增又减,显然不单调.

iii 正确理解两个区间的公共端点处,函数的单调性是对某个区间而言的,对单独的一点,其函数值是唯一确定的值,无增减变化,也就不存在单调性问题.

iv 现主要研究连续函数或分段连续函数,对闭区间上的连续函数,只要开区间单调,则闭区间也单调,包不包括端点均可.

②奇偶性

奇函数:

i 定义:对于函数 $f(x)$,如对其定义域内任一 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,那函数 $f(x)$就叫奇函数.

ii 几何特征:图象关于原点成中心对称图形,由此画其图象可先画一半,另半由对称性描出.

ⅲ　如函数 $f(x)$是奇函数,又在$(0,+\infty)$上是增函数,则 $f(x)$在$(-\infty,0)$也是增函数.

偶函数

ⅰ　定义:对于函数 $f(x)$,如对其定义域内任一 x,都有 $f(-x)=f(x)$,那函数 $f(x)$就叫偶函数.

ⅱ　几何特征:图象关于 y 轴成轴对称图形,由此画其图象也可先画一半,另半由对称性画出.

ⅲ　如函数 $f(x)$是偶函数,又在$(0,+\infty)$上是增函数,则 $f(x)$在$(-\infty,0)$是减函数.

注意:定义域不对称,一定不具备奇偶性,但定义域对称时,也不一定就具有奇偶性.

〈5〉反函数

(1)定义:

式子 $y=f(x)$,

表示自变量为 x,y 是x 的函数,

设定义域为 A,值域为 C,

从式子 $y=f(x)$中解出 x,得式子 $x=\phi(y)$,当原函数的映射为一一映射时,即在 C 中对y 的任何一个值,由 $x=\phi(y)$,必能在 A 中有唯一确定的x 值和它对应,

这时 $x=\phi(y)$就可视为 y 是自变量,x 是y 的函数,

这样的函数 $x=\phi(y)$叫函数 $y=f(x)$的反函数.

记为 $x=f^{-1}(y)$,可惯记为 $y=f^{-1}(x)$.

(2)求法:

第一步将 $y=f(x)$视为方程,解出 $x=f^{-1}(y)$,

第二步将 x、y 互换,得 $y=f^{-1}(x)$.

互为反函数的两函数如有解析式,一般不同,但少数例外,如 $y=x$ 的反函数为$y=x$,又如 $y=\frac{1-x}{1+x}$的反函数为$y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3)互为以函数的函数图象间关系:关于直线 $y=x$ 对称.

注意:应用本结论画图时,x 轴与 y 轴的长度单位应一致,另本结论可应用于规律作图,即先画出原函数图象,再利用对称性画出其反函数的图象.

3　幂函数

〈1〉定义

(1)函数 $y=x^n$ 叫做幂函数,x 是自变量,n 是常数,现阶段只研究 $n\in Q$ 的情况.

(2)定义域

因为与此同时阶段只研究 n 为有理数的情况,有理数的分类表为:

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

其定义域分以下情况叙述

①当 $n=0$ 时.

$x^n=x^0=1(x\neq0)$,

得 $y=1$,

定义域为 $\{x|x\in R$ 　且 $x\neq0\}$,

②当 $n=1$ 时,

得 $y=x$,

定义域为 $\{x|x\in R\}$.

③当 $n\in N$ 但 $n\neq1$ 时

得 $y=x\cdot x\cdots\cdots x$(共 n 个 x 相乘)

显然定义域为 $\{x|x\in R\}$.

④当 n 是正分数(设此正分数是既约分数 $\frac{p}{q}$)时,