普通高等教育"十五"国家级规划教材

实变函数论与泛函分析

（第二版）

（下册）

曹广福 严从荃 编

Lusin

Fubini

Egoroff

Riemann

Bernstein

Lebesgue

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

第一章 距离空间

正如在实变函数中讨论的那样，有些集合不同于 n 维欧氏空间，但与欧氏空间有着许多类似的性质，例如闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数构成的集合 $C([a,b])$ 及 $[a,b]$ 上所有 p 次方 Lebesgue 可积的函数全体所构成的集合 $L^p([a,b])$。数学中的许多领域常常要处理作用在这些函数集合上的变换。例如，微分算子

$$L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q(x)$$

作用在一类函数 $y(x)$ 上，将其变为另外的函数。为了解微分方程，需要寻找特殊的 $y(x)$，使得 $Ly(x)=0$，并且这个函数通常还要满足初值条件或边界条件。

解微分方程的一个常用方法是迭代算法。给定初始值，有限次的迭代所得到的近似值往往具有很好的性质，但经过无限次迭代后，所得到的近似解序列是否收敛？按何种方式收敛？其极限具有什么性质？它是否为原方程的精确解？这些都是必须考虑的问题。它促使人们将函数集合作为一个整体看待，在其上引入线性运算、距离等概念，从而得到抽象的距离空间，这正是本章所要研究的主题。

§1 线性距离空间

1.1 线性空间

回忆有限维线性空间的定义，不难启发我们该如何定义一般线性空间。

定义 **1** 设 X 是非空集合，K 是数域（实数或复数域），若于 X 上定义了一种加法运算，使得对任意 $x,y\in X$ 都对应 X 中一个元素 z，用 $z=x+y$ 表示；又定义了数乘运算，使得对任意 $\alpha\in K$ 及任意 $x\in X$ 都对应 X 中一个元素 y，用 $y=\alpha x$ 表示；假如 X 上的加法与数乘运算还满足下列条件：

（1）$x+y=y+x\quad(\forall x,y\in X)$，符号 $\forall$ 表示“任意”；

（2）$x+(y+z)=(x+y)+z\quad(\forall x,y,z\in X)$；

（3）存在唯一元素 $\theta\in X$，使得对任意 $x\in X$，$x+\theta=x$，称 θ 为 X 中的零元素，有时也简记为 0；

（4）对任意 $x\in X$，存在唯一的元素 $-x\in X$，使得 $x+(-x)=0$；

（5）$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y\quad(\forall x,y\in X,\alpha\in K)$；

（6）$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x\quad(\forall x\in X,\alpha,\beta\in K)$；

(7) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \quad (\forall x\in X,\alpha,\beta\in K)$;

(8) $1\ x=x$.

则称 X 按上述加法与数乘成为数域 K 上的线性空间,若 K 是实数域,则简称 X 为实线性空间,若 K 是复数域,则称 X 为复线性空间. 线性空间也称作向量空间,空间中的元素称作向量或点.

一般情况下,我们所说"线性空间"均指复线性空间,实际上复线性空间必然也是实线性空间,所以如无特别声明,我们考虑的都是复线性空间. 但所有的结论关于实线性空间情形也是正确的.

不难验证,在线性空间 X 中,对任意向量 x 和数 α 都有

(9) $0x=0$;

(10) $(-1)x=-x$;

(11) $\alpha 0=0$.

为方便计,以后总将 $x+(-y)$ 记作 $x-y$. 显然在线性空间 X 中,消去律也成立,即有

(12) $x+y=x+z \Rightarrow y=z$;

(13) $\alpha x=\alpha y$ 且 $\alpha\neq 0$,则 $x=y$;

(14) $\alpha x=\beta x$ 且 $x\neq 0$,则 $\alpha=\beta$.

定义 2 设 X 是线性空间,M 是 X 的子集,若对任意 $x,y\in M$ 及数 α,都有 $x+y\in M,\alpha x\in M$,则称 M 为 X 的(线性)子空间.

显然 0 与 X 本身都是 X 的线性子空间,通常称它们是平凡的子空间. 若 X 的子空间 M 既不为空集,也不等于 X,则称 M 为 X 的真子空间.

在后面要定义的线性距离空间 X 中,若 X 的子空间 M 是 X 的闭子集,则称 M 为 X 的闭子空间.

在有限维欧氏空间中,研究空间结构及几何的一个基本方法是建立坐标系(可以是直角坐标,也可以是斜坐标),用线性代数的语言来叙述,即寻找最大线性无关组. 在抽象的线性空间中,线性无关概念也是十分重要且常用的,其定义与有限维情形类似.

定义 3 设 $x_1,\cdots,x_n\in X,\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是 n 个数,形如 $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$ 的元素称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合.

设 $S\subset X$ 是 X 的非空子集,S 本身对于线性运算未必封闭,但我们可以将 S 中所有元素的有限线性组合放在一起构成新的集合 M_S,显然 M_S 是 X 的子空间,通常称为由 S 张成的子空间,简记作 $M_S=V\{S\}$. 易知 M_S 具有下面的性质:

M_S 是 X 中所有含 S 的子空间之交.

这说明 M_S 是 X 中含 S 的最小子空间,即若 N 是含 S 的子空间,则必有 $N\supset M_S$.

定义 4 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 X 中的 n 个元素,若存在不全为 0 的数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0,$$

则称 $x_1,\cdots,x_n$ 是线性相关的,否则称为线性无关. 如果 S 中任意有限个向量均线性无关,则称 X 的一个子集 S 为线性无关的,否则称 S 为线性相关的.

定义 5 设 X 是线性空间,$x_1,\cdots,x_n$ 是 X 中的 n 个向量,若它们满足:

(1) $x_1,\cdots,x_n$ 线性无关;

(2) 对任意 $x\in X,x,x_1,\cdots,x_n$ 都是线性相关的. 则称 $x_1,\cdots,x_n$ 为 X 的基,X 称为 n 维线性空间,n 称为 X 的维数,记作 $n=\dim X$.

只含 0 元素的空间称为零空间. 如果 X 不是有限维的,则称为无限维线性空间.

与代数学不同的是,分析学中所研究的空间不仅具有代数结构,更重要的一点是:点和点之间具有"远近"的概念! 也就是所谓的距离,有了距离,才能定义"极限"与"连续性",这正是我们下面要讨论的问题.

1.2 距离空间

如果将 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的距离"抽象"出来,仅采用其性质,则不难得到一般空间中的距离概念.

定义 6 设 X 是一集合,ρ 是 $X\times X$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射,满足:

(1) (非负性) 对任意 $x,y\in X$,有 $\rho(x,y)\geqslant 0$,且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) (对称性) 对任意 $x,y\in X,\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) (三角不等式) 对任意 $x,y,z\in X$,有 $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

则称 X 为距离空间(或度量空间),记作 (X,ρ),$\rho(x,y)$ 称为 x 与 y 的距离.

在线性空间中定义距离,自然应该考虑到它与线性运算的相容性,具体说来即下面的

定义 7 设 (X,ρ) 是距离空间,且 X 还是线性空间,若 ρ 满足:

(1) 如果 $\rho(x_n,x)\to 0,\rho(y_n,y)\to 0$,则 $\rho(x_n+y_n,x+y)\to 0$;

(2) 若 $\rho(x_n,x)\to 0$,则 $\rho(\alpha x_n,\alpha x)\to 0\ (\forall\alpha\in K)$;

(3) 若 $\alpha_n\to\alpha,x\in X$,则 $\rho(\alpha_n x,\alpha x)\to 0$.

则称 (X,ρ) 为线性距离空间.

有了距离,便可以定义"收敛"概念了,这就是下面的

定义 8 设 (X,ρ) 是距离空间,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的点列,若

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0,$$

则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$按距离ρ收敛到x,记作$x_n \xrightarrow{\rho} x$. 在不致引起混淆的情况下,也记$x_n \to x$.

应该看到,从n维欧氏空间到抽象距离空间绝不是一种简单的推广,它使得我们可以将相当广泛的一类集合用统一的方法来处理. 事实证明,泛函分析的思想和方法已成为现代科学技术研究中一种普适的框架,从而渗透到科学的各个领域. 我们不妨熟悉一下几类重要的距离空间,由此初步领略一番泛函分析的"抽象"风光!

例1 记$l^{\infty}=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in K, n=1,2,\cdots, \sup_n|x_n|<\infty\}$在$l^{\infty}$中定义线性运算如下:

(1) 对任意$x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, x+y \triangleq \{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}$;

(2) 对任意$x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \alpha \in K, \alpha x \triangleq \{\alpha x_x\}_{n=1}^{\infty}$.

不难验证l^{∞}是线性空间.

对任意$x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$,定义

$$\rho(x,y)=\sup_n|x_n-y_n|,$$

容易验证ρ是l^{∞}上的距离,从而(l^{∞},ρ)是线性距离空间.

让我们来看一看,l^{∞}中点列的收敛意味着什么. 设$x^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$是$l^{\infty}$中的点列,$x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$,且$\rho(x^{(k)},x)=\sup_n|x_n^{(k)}-x_n| \to 0\ (k\to\infty)$,则对任意$\varepsilon>0$,存在$k_0$,使得当$k \geqslant k_0$时,有

$$\rho(x^{(k)},x)<\varepsilon,$$

从而对一切n,有

$$|x_n^{(k)}-x_n|<\varepsilon \quad (\forall k \geqslant k_0),$$

这说明,$x^{(k)}$按坐标一致收敛到x.

反之,设$x^{(k)}$按坐标一致收敛到x,即对任意$\varepsilon>0$,存在k_0,使得当$k \geqslant k_0$时,对一切n,有

$$|x_n^{(k)}-x_n|<\varepsilon,$$

从而$\sup_n|x_n^{(k)}-x_n| \leqslant \varepsilon$,即$\rho(x^{(k)},x) \leqslant \varepsilon$. 这说明$x^{(k)} \xrightarrow{\rho} x$等价于$x^{(k)}$按坐标一致收敛到$x$.

例2 设$1 \leqslant p<\infty$,记$l^p=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in K, n=1,2,\cdots$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$,对任意$x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$及$\alpha \in K$,定义$x+y \triangleq \{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}, \alpha x \triangleq \{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}$,可以证明$l^p$是一个线性空间. 事实上,$\alpha x$显然在$l^p$中,为证$x+y \in l^p$,只需注意到对任意复数$a,b$,下列不等式成立:

$$|a+b|^p \leqslant (|a|+|b|)^p \leqslant [2\max\{|a|,|b|\}]^p \leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p),$$

由此立知l^p确是线性空间. 在l^p上定义

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

完全类似 L^p 空间情形(参见本书上册第四章§5)可证

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

故 ρ 满足距离的定义,从而 (l^p,ρ) 是线性距离空间.

现设 $x^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^p 中的点列,按距离 ρ 收敛到 l^p 中的点 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0\quad(k\to\infty),$$

于是对任意 $\varepsilon>0$,存在 k_0,使得当 $k\geqslant k_0$ 时,有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2},$$

从而对任意 N,有

$$\sum_{n\geqslant N}|x_n^{(k)}-x_n|^p<\frac{\varepsilon}{2^p}.$$

由于 $\{x_n\}\in l^p$,故存在 N_0,使得 $\sum\limits_{n\geqslant N_0}|x_n|^p<\frac{\varepsilon}{2^p}$,于是

$$\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}+\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}=\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

即

$$\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p<\varepsilon.$$

此外,对任意 n,显然有 $x_n^{(k)}\to x_n\ (k\to\infty)$.

另一方面,若对任意 n,$x_n^{(k)}\to x_n\ (k\to\infty)$,且对任意 $\varepsilon>0$,存在 k_0,N_0,使得对任意 $k>k_0$ 有

$$\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p<\varepsilon,$$

则由 ε 的任意性及

$$\begin{aligned}\rho(x^{(k)},x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{n<N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{n<N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

不难得到 $\rho(x^{(k)},x)\to 0\ (k\to\infty)$,由此可见 l^p 中的点列 $\{x^{(k)}\}=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}\}$ 收敛

到 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 当且仅当

(1) 对每个 n, $x_n^{(k)}\to x_n\ (k\to\infty)$,

(2) 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 k_0, N_0, 使得对任意 $k>k_0$ 及 $N\geqslant N_0$, $\sum\limits_{n\geqslant N}|x_n^{(k)}|^p<\varepsilon$.

1.3 线性赋范空间

我们把线性空间中的点称作向量并不奇怪,因为它和平面、三维空间中的向量有着类似的特征. 有限维欧氏空间中的向量按自然方式有长度,但一般线性空间中的向量却未必有"长度",除非我们事先赋予某种定义.

定义 9 设 X 是数域 K 上的线性空间, ρ 是 X 到实数域 $\mathbf{R}$ 的映射(这样的映射称为 X 上的实值泛函),满足:

(1) (非负性) 对任意 $x\in X$, $\rho(x)\geqslant 0$, 且 $\rho(x)=0$ 当且仅当 $x=0$;

(2) (正齐性) 对任意 $x\in X$, $\alpha\in K$, $\rho(\alpha x)=|\alpha|\rho(x)$;

(3) (三角不等式) 对任意 $x,y\in X$, $\rho(x+y)\leqslant\rho(x)+\rho(y)$.

则称 X 为 K 上的线性赋范空间,记作 (X,ρ), $\rho(x)$ 称为 x 的范数.

按习惯记法,通常用"$\|\ \ \|_X$"记范数,即 $\|x\|_X\triangleq\rho(x)$.

实变函数中熟知的连续函数空间 $C([a,b])$ 按 $\|f\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$ 构成线性赋范空间, $L^p(E)$ 空间按 $\|f\|_p=\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 也构成线性赋范空间. 前面例1、例2中的空间 l^∞, l^p 分别按 $\|x\|_\infty=\sup\limits_{1\leqslant n<\infty}|x_n|$ 及 $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 构成线性赋范空间. 下面再来看两个例子.

例 3 设 $V[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上的实有界变差函数全体,依照通常的线性运算,它是线性空间,对 $f\in V[a,b]$,定义

$$\|f\|=|f(a)|+V_a^b(f),$$

则 $V[a,b]$ 按 $\|f\|$ 成为线性赋范空间.

记 $V_0[a,b]=\{f|f\in V[a,b], f$ 在 (a,b) 中每一点是右连续的,且 $f(a)=0\}$,则 $V_0[a,b]$ 是 $V[a,b]$ 的线性子空间,在 $V_0[a,b]$ 上,范数 $\|f\|$ 等于全变差 $V_a^b(f)$.

例 4 设 D 是复平面 内的单位圆盘,即 $D=\{z\in \ \ |\,|z|<1\}$,记

$$L_a^2(D)=\{f|f\text{ 在 }D\text{ 中解析,且 }\int_D|f(z)|^2\mathrm{d}A<\infty\},$$

其中 $\mathrm{d}A$ 是 D 上的面积元素,显然 $L_a^2(D)$ 按通常的线性运算成为线性空间,对任意 $f\in L_a^2(D)$,定义

$$\|f\|_2=\left(\int_D|f(z)|^2\mathrm{d}A\right)^{\frac{1}{2}},$$

不难验证 $\|f\|$ 是 $L_a^2(D)$ 中的范数，于是 $(L_a^2, \|\ \ \|_2)$ 是线性赋范空间，它称为 Bergman 空间.

在线性赋范空间 $(X, \|\ \ \|_X)$ 中，由范数可以诱导一个距离，即

$$\rho(x,y) = \|x-y\|_X \quad (\forall x, y \in X),$$

不难证明 ρ 的确是 X 上的距离，且线性运算按此距离连续，故而 (X,ρ) 是线性距离空间. X 中的序列 $\{x_n\}$ 若按此距离收敛到某个元 x，即

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

则称它按范数收敛到 x，记作 $x_n \xrightarrow{\|\ \ \|_X} x$ 或 $x_n \to x$.

应该注意的是，对给定的线性空间 X，在 X 上通常可以定义多个范数，这就存在不同范数之间的比较问题，为此引入下面的

定义 10　设 $\|\ \ \|_1$，$\|\ \ \|_2$ 都是线性空间 X 上的范数，如果存在常数 $M > 0$，使得对任意 $x \in X$，有

$$\|x\|_1 \leqslant M \|x\|_2,$$

则称 $\|\ \ \|_2$ 强于 $\|\ \ \|_1$. 如果既有 $\|\ \ \|_1$ 强于 $\|\ \ \|_2$，又有 $\|\ \ \|_2$ 强于 $\|\ \ \|_1$，则称 $\|\ \ \|_1$ 与 $\|\ \ \|_2$ 等价.

§2　距离空间的完备性

2.1　完备性定义及例子

在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，序列的收敛性有一个基本的判别准则，这就是 Cauchy 准则，我们在本书的上册中已看到 L^p 空间中 Cauchy 准则也成立，在一般的距离空间中，类似结论是否总是正确的呢？我们先来看一个例子.

例 1　设 $X = \{r \mid r$ 是 $\mathbf{R}$ 中的有理数$\}$，Q 是有理数域，则按通常的运算，X 是 Q 上的线性空间，按通常的距离 $\rho(x,y) = |x-y|$，(X,ρ) 成为线性赋范空间.

众所周知，$\mathbf{R}$ 中有理数全体在 $\mathbf{R}$ 中稠密，设 $\{r_n\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中收敛到某个无理数的有理数列，则 $\{r_n\}$ 显然是 Cauchy 列，然而 $\{r_n\}$ 在 X 中不收敛. 可见并非在所有的距离空间中 Cauchy 准则都成立. 因此有必要引入下面的

定义 1　设 (X,ρ) 是距离空间（或赋范空间），如果 X 中的点列 $\{x_n\}$ 满足

$$\rho(x_n, x_m) \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列（或 Cauchy 列）. 若 X 中任意基本列都在 X 中收敛，则称 (X,ρ) 是完备的距离空间（或赋范空间）.

本书上册已讨论过 $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ 空间的完备性，除此而外，完备空间的例子是很多的. 例如，$C([a,b])$ 按距离 $\rho(x,y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$ 是完备的.

$l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$也是完备的，不过其完备性证明并不是一件很轻松的事，有兴趣的读者不妨一试.

注 可以证明 $L^p(1\leqslant p<\infty)$、$l^p(1\leqslant p<\infty)$及 l^∞ 分别按范数 $\|f\|_p\triangleq\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}$、$\|x\|_p\triangleq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$及 $\|x\|_p\triangleq\sup_n|x_n|$ 构成完备的线性赋范空间.

例 **2** 记 $L^\infty(E)$ 为可测集 E 上几乎处处有界的可测函数全体，对任意 f，$g\in L^\infty(E)$，定义

$$\begin{aligned}\rho(f,g)&=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E}|f(x)-g(x)|\\&\triangleq\inf_{mE_0=0,E_0\subset E}\left(\sup_{x\in E-E_0}|f(x)-g(x)|\right),\end{aligned}\qquad(*)$$

则 ρ 是 $L^\infty(E)$ 上的距离，

$$\|f\|_\infty=\rho(f,0)\triangleq\inf_{mE_0=0,E_0\subset E}\left(\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|\right)\qquad(**)$$

是 $L^\infty(E)$ 上的范数. $(L^\infty(E),\|\ \|_\infty)$ 是完备的线性赋范空间.

可以证明，$(**)$式中的下确界 $\inf\limits_{mE_0=0,E_0\subset E}$ 是可达的，即对任意 $f\in L^\infty(E)$，存在 E 的零测子集 E_0，使得

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|$$

（请读者自行验证）.

现设 f_n 是 $L^\infty(E)$ 中的 Cauchy 列，对每个 f_n，存在零测集 $E_n\subset E$，使得

$$\|f_n\|_\infty=\sup_{x\in E-E_n}|f(x)|,$$

对任意 n,m，也存在零测集 $E_{nm}\subset E$，使得

$$\rho(f_n,f_m)=\|f_n-f_m\|_\infty=\sup_{x\in E-E_{nm}}|f_n(x)-f_m(x)|,$$

记 $E_0=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\cup\left(\bigcup_{n,m=1}^{\infty}E_{nm}\right)$，则 $mE_0=0$，且对任意 $n,m=1,2,\cdots$，

$$\begin{aligned}\rho(f_n,f_m)&=\sup_{x\in E-E_{nm}}|f_n(x)-f_m(x)|\\&\geqslant\sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f_m(x)|\geqslant\rho(f_n,f_m).\end{aligned}$$

由$\{f_n\}$是 Cauchy 列立得 $\sup\limits_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f_m(x)|\to0\ (n,m\to\infty)$，即$\{f_n\}$是 $E-E_0$ 上一致收敛意义下的 Cauchy 列，故存在 $E-E_0$ 上的可测函数 f，使得

$$\sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f(x)|\to0\quad(n\to\infty).$$

在 E_0 上令 $f=0$，于是 f 可看作 E 上的可测函数. 注意到

$$\sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)|\leqslant\sup_{x\in E-E_n}|f_n(x)|=\|f_n\|_\infty,$$

且由$\{f_n\}$是 Cauchy 列易知$\{\|f_n\|_\infty\}$有界，所以$\{f_n\}$在 $E-E_0$ 上一致有界，从而 f 在 E 上有界，故 $f\in L^\infty(E)$，并且

$$\rho(f_n,f)\leqslant \sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f(x)|\to 0 \quad (n\to\infty).$$

2.2 完备空间的重要性

欧氏空间中许多结论均依赖于空间的完备性，如直线上的闭区间套定理，平面内的闭矩形套定理等. 在完备的距离空间中，许多与欧氏空间情形类似的结论仍然成立.

定义 2 设(X,ρ)是距离空间，$x_0\in X$，

$$S(x_0,r)\triangleq\{x\in X\mid\rho(x,x_0)<r\}\quad(r>0)$$

称为以 x_0 为中心，r 为半径的开球；

$$\overline{S(x_0,r)}\triangleq\{x\in X\mid\rho(x,x_0)\leqslant r\}\quad(r>0)$$

称为以 x_0 为中心，r 为半径的闭球.

命题 1（闭球套定理） 设(X,ρ)是完备的距离空间，$\overline{S_n}=\{x\in X\mid\rho(x,x_n)\leqslant \varepsilon_n\}$是一串闭球：

$$\overline{S_1}\supset\overline{S_2}\supset\cdots\supset\overline{S_n}\supset\cdots,$$

如果球的半径 $\varepsilon_n\to 0$，则存在唯一的点 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$.

证明 由命题的条件，不难看到球心组成的序列$\{x_n\}$是一个 Cauchy 列. 事实上，对任意 n,m，若 $n\geqslant m$，则由 $x_n\in\overline{S_n}\subset\overline{S_m}$得

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\varepsilon_m.$$

由此立得$\{x_n\}$是一个 Cauchy 列. 由 X 是完备的知存在 $x\in X$，使得$\rho(x_n,x)\to 0$，在不等式

$$\rho(x_m,x)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_m,x_n)\leqslant\rho(x_n,x)+\varepsilon_m$$

中，固定 m 并令 $n\to\infty$ 得$\rho(x_m,x)\leqslant\varepsilon_m$. 这说明 $x\in\overline{S_m}$，$m=1,2,\cdots$，故 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$.

若另有 $y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$，且 $y\neq x$，则对任意 n，有

$$\rho(y,x_n)\leqslant\varepsilon_n,$$

由不等式

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)\leqslant 2\varepsilon_n$$

及 $\varepsilon_n\to 0$ 立得$\rho(x,y)=0$，从而 $x=y$，这就得到矛盾，所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$必是单点集. 证毕.

在直线上的闭区间套定理中，即使区间的长度不趋于 0，所有区间的交仍然是非空的. 然而，在一般距离空间中，即使空间是完备的，假如闭球套的半径不趋于 0，则其交可能是空集.

从直线上 Cauchy 准则与闭区间套定理的等价性，人们自然会提出这样的问

题:

在距离空间中,闭球套定理与空间的完备性是否等价?

答案是肯定的. 事实上,假设在距离空间 (X,ρ) 中闭球套定理成立,为证空间的完备性,假设 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,于是存在正整数列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,使得当 $n,m\geqslant n_k$ 时

$$\rho(x_n,x_m)<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

作闭球 $\overline{S_k}=\overline{S\left(x_{n_k},\frac{1}{2^k}\right)}$, $k=1,2,\cdots$,则对任意 $y\in\overline{S_{k+1}}$,由

$$\rho(x_{n_k},y)\leqslant\rho(x_{n_k},x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}},y)<\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k},$$

知 $y\in\overline{S_k}$,故 $\{\overline{S_k}\}$ 是一个闭球套,于是存在唯一的 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S_k}$. 由 $\rho(x,x_{n_k})<\frac{1}{2^k}\to0$ 知 $x_{n_k}\to x$,又由

$$\rho(x,x_n)\leqslant\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x,x_{n_k})$$

立得 $x_n\to x$,即 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛,从而 (X,ρ) 完备.

以后还会看到完备空间的更多重要性质.

既然空间的完备性如此重要,对于给定的空间,有没有什么方法使其完备呢? 下面就来讨论这个问题.

2.3 空间的完备化

定义 3 设 (X,ρ) 是距离空间, M,N 是 X 的两个子集,且 $M\subset N$,若对任意 $\varepsilon>0$,及任意 $x\in N$, $M\cap S(x,\varepsilon)\neq\varnothing$,则称 M 在 N 中稠密.

定义 4 设 (X,ρ) 是距离空间. 若有完备的距离空间 $(\widetilde{X},\rho)$ 及映射 $T:X\to\widetilde{X}$,使得

$$\rho(x,y)=\rho(Tx,Ty),\quad\forall x,y\in X.$$

且 TX 在 $\widetilde{X}$ 中稠密,则称 $\widetilde{X}$ 为 X 的完备化空间. T 通常称为 (X,ρ) 到 $(\widetilde{X},\rho)$ 的等距映射.

在等距意义下 X 可视为 $\widetilde{X}$ 的子集,即将 X 与 TX 等同,此时也称 X 与 TX 等距同构.

定理 1 任何距离空间都有完备化空间.

证明 设 (X,ρ) 是任一距离空间,我们希望构造一个空间,使得 X 中的 Cauchy 列在其中都有一个极限. 为此,不妨将 (X,ρ) 中的 Cauchy 列全体所构成的集合记作 $\widetilde{X}$. 显然,有三个问题需要考虑:

(1) 如何在 $\widetilde{X}$ 中定义距离?

(2) X 能否等距地映到 $\widetilde{X}$ 中,且在 $\widetilde{X}$ 中稠密?

(3) $\widetilde{X}$ 是否完备?

首先来定义距离. 对任意 $\xi=\{x_n\},\eta=\{y_n\}\in\widetilde{X}$,由 ξ,η 均是 Cauchy 列可知 $\rho(x_n,y_n)$ 是收敛数列,所以我们可以定义

$$\rho(\xi,\eta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

ρ 是不是 $\widetilde{X}$ 上的距离呢? 由 ρ 是距离不难证明 ρ 满足非负性、对称性及三角不等式,但 $\rho(\xi,\eta)=0$ 并不意味着 ξ 与 η 是两个相同的 Cauchy 列. 解决此问题的方法是在 ρ 中作一等价类,凡使得 $\rho(\xi,\eta)=0$ 的 ξ 与 η 视为相同,易知这是一个等价关系,记此等价关系为 ~. 在 $\widetilde{X}/\sim$ 中定义

$$d(\tilde{\xi},\eta)=\rho(\xi,\eta),\quad(\xi,\eta\in\widetilde{X}),$$

其中$\tilde{\xi},\eta$分别是 ξ,η 在 $\widetilde{X}/\sim$ 中的等价类. 可以证明 d 不依赖于$\tilde{\xi},\eta$中代表元的选取. 事实上,若 $\xi=\{x_n\}\sim\xi_1=\{x'_n\},\eta=\{y_n\}\sim\eta_1=\{y'_n\}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x'_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y_n,y'_n)=0$,从而由

$$\rho(x'_n,y'_n)\leqslant\rho(x'_n,x_n)+\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y'_n)$$

得 $\rho(\xi_1,\eta_1)\leqslant\rho(\xi,\eta)$. 类似可得相反不等式. 由此可见 d 确是 $\widetilde{X}/\sim$ 上的距离. 为简便计,仍用 $\widetilde{X}$ 记 $\widetilde{X}/\sim$.

如何将 X 映到 $\widetilde{X}$ 中呢? 显而易见 X 的 Cauchy 列中包含形如 $\{x_n\equiv x\}(x\in X)$ 的点列,我们称这样的点列为常驻列. 对任意 $x\in X$,可以将 x 对应到通项为 x 的常驻列,并记为 $\tilde{x}$,即作映射 T 如下:

$$Tx=\tilde{x}=\{x,x,\cdots\}\quad(x\in X).$$

显然,对任意 $x,y\in X$,有

$$d(\tilde{x},\tilde{y})=d(Tx,Ty)=\lim_{n\to\infty}\rho(x,y)=\rho(x,y),$$

故 T 是 X 到 $\widetilde{X}$ 中的等距映射.

往证 TX 在 $\widetilde{X}$ 中稠密. 设 $\xi=\{x_n\}\in\widetilde{X}$,记$\widetilde{x_k}=Tx_k$,对任意 $\varepsilon>0$,存在 N,当 n, $m\geqslant N$ 时,$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$,于是当 $k\geqslant N$ 时

$$d(\xi,\widetilde{x_k})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_k)\leqslant\varepsilon,$$

这说明$\widetilde{x_k}\xrightarrow{d}\xi$,故 TX 在 $\widetilde{X}$ 中稠密.

还需证明 $\widetilde{X}$ 是完备的. 设 $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$是 $\widetilde{X}$ 中的 Cauchy 列,要证 $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$收敛到 $\widetilde{X}$ 中某一点. 由于 X 在 $\widetilde{X}$ 中稠密,故对每个 ξ_k,存在 $x_k\in X$,使得

$$d(\xi_k,\widetilde{x_k})\leqslant\frac{1}{k}.$$

记 $\xi=\{x_k\}$, $\xi\in\widetilde{X}$, 往证 ξ 是 Cauchy 列. 事实上, 由不等式

$$\rho(x_n,x_m)=d(\widetilde{x_n},\widetilde{x_m})\leqslant d(\widetilde{x_n},\xi_n)+d(\xi_n,\xi_m)+d(\xi_m,\widetilde{x_m})\leqslant\frac{1}{n}+d(\xi_n,\xi_m)+\frac{1}{m}$$

及 $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列立得 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 注意到

$$d(\xi_k,\xi)\leqslant d(\xi_k,\widetilde{x_k})+d(\widetilde{x_k},\xi)<\frac{1}{k}+d(\widetilde{x_k},\xi)$$

$$=\frac{1}{k}+\lim_{n\to\infty}\rho(x_k,x_n).$$

由此不难得知 $d(\xi_k,\xi)\to 0$. 证毕.

空间的完备性对于方程的求解是十分重要的. 正是由于对有理数进行了完备化, 才使得诸如 $x^2=2$ 这样的方程成为可解的. 而对函数空间的完备化则可使得一些微分方程或积分方程成为可解的, L^p 空间理论的产生正源于此.

既然任何距离空间都存在完备化空间, 以后我们将主要讨论完备的距离空间, 而且大多数情况下将仅讨论完备的线性赋范空间, 这样的空间称为 Banach 空间, 以纪念 S. Banach 在这方面的杰出成就.

§3 内积空间

3.1 内积空间的定义

在平面与空间的几何理论中, 有一个非常重要的基本概念, 这就是"角". 正是由于有了角度, 人们才能在平面或空间建立各种坐标(直角坐标或斜坐标)系与几何理论.

在 n 维欧氏空间中, 向量的"夹角"是利用内积来定义的. 所谓两个向量 u,v 的夹角, 指的是

$$\theta\triangleq\arccos\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\ \ \|v\|},$$

其中 $\langle u,v\rangle$ 是 u 与 v 的内积, $\|u\|$ 是 u 的模或长度, 它等于 $\sqrt{\langle u,u\rangle}$. 如果抛开 $\mathbf{R}^n$ 中内积的具体形式, 将其性质抽象出来, 则可以得到抽象空间上的内积概念.

定义 1 设 X 是复域上的线性空间, $(\ ,\ )$ 是 $X\times X$ 到复域 的二元函数, 使得对任意 $x,y,z\in X$ 及 $\alpha\in$ 满足:

(1) $(x,x)\geqslant 0$, 且 $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=\mathbf{0}$;

(2) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

(3) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;

(4) $(x,y)=\overline{(y,x)}$,

则称(,)为 X 上的内积,称 X 为具有内积(,)的内积空间,有时,也记此空间为 $(X,(\ ,\ ))$.

由内积定义不难验证还有 $(x,\alpha y)=\bar{\alpha}(x,y)$.

例 1 在 $L^2(E)$ 上定义

$$\langle f,g\rangle=\int_E f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \quad (f,g\in L^2(E)),$$

则 $L^2(E)$ 是内积空间.

与欧氏空间类似,内积也可以诱导出向量"长度",若 X 是内积空间,定义

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \quad (x\in X), \tag{a}$$

我们将证明 $\|\ \ \|$ 是 X 上的范数,称为由内积诱导的范数. 为此,首先证明下面的

定理 1(**Cauchy-Schwarz** 不等式) 设 $(X,(\ ,\ ))$ 是内积空间,则对任意 x, $y\in X$,有

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\ \ \|y\|.$$

证明 不妨设 $y\neq0$,对任意 $\lambda\in$,有

$$\begin{aligned}0\leqslant(x+\lambda y,x+\lambda y)&=(x,x)+\lambda(y,x)+(x,\lambda y)+(\lambda y,\lambda y)\\&=\|x\|^2+\lambda(y,x)+\bar{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2\|y\|^2,\end{aligned}$$

取 $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{\|y\|^2}$,代入上式得

$$\|x\|^2-2\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2}+\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^4}\ \ \|y\|^2\geqslant0,$$

即 $\|x\|^2\ \ \|y\|^2-|(x,y)|^2\geqslant0$,进而 $|(x,y)|\leqslant\|x\|\ \ \|y\|$. 证毕.

定理 2 内积空间 $(X,(\ ,\ ))$ 按(a)定义的范数成为线性赋范空间.

证明 只需证明 $\|\ \ \|$ 确是范数就可以了. $\|\ \ \|$ 显然满足范数定义中的非负性与正齐性,下证三角不等式. 事实上,对任意 $x,y\in X$,有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)=(x,x)+(y,x)+(x,y)+(y,y)\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\ \ \|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

故 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. 证毕.

命题 1 在内积空间 $(X,(\ ,\ ))$ 中,内积(,)是关于范数 $\|\ \ \|$ 的连续函数,即当 $\|x_n-x\|\to0$, $\|y_n-y\|\to0$ 时,有 $(x_n,y_n)\to(x,y)$.

证明 设 $x_n\xrightarrow{\|\ \|}x$, $y_n\xrightarrow{\|\ \|}y$,则 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 显然都是有界序列,不妨设 $\|x_n\|\leqslant M$, $\|y_n\|\leqslant M$,则

$$\begin{aligned}|(x_n,y_n)-(x,y)|&=|(x_n-x,y_n)+(x,y_n-y)|\\&\leqslant\|x_n-x\|\ \ \|y_n\|+\|x\|\ \ \|y_n-y\|\\&\leqslant M\|x_n-x\|+\|x\|\ \ \|y_n-y\|\to0.\end{aligned}$$

证毕.

既然内积可以诱导一个范数,人们或许会问,线性赋范空间中的范数能否诱导出一个内积呢?为了回答这个问题,还是让我们来进一步分析内积与范数的关系.

设 x,y 是复内积空间 X 中的任意两个元素,则直接验证可得:

$$\|x+y\|^2=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y),\tag{b}$$

$$\|x-y\|^2=(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y),\tag{c}$$

$$\|x+\mathrm{i}y\|^2=(x,x)-\mathrm{i}(x,y)+\mathrm{i}(y,x)+(y,y),\tag{d}$$

$$\|x-\mathrm{i}y\|^2=(x,x)+\mathrm{i}(x,y)-\mathrm{i}(y,x)+(y,y).\tag{e}$$

(b)式减去(c)式再加上(d)式减去(e)式的 i 倍得

$$4(x,y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2.$$

于是我们有

定理 3(极化恒等式) 设$(X,(\ ,\ ))$是内积空间,则对任意 $x,y\in X$,有

$$(x,y)=\frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2].\tag{f}$$

是否任何一个线性赋范空间都可以利用(f)式定义内积呢?将(b)式与(c)式相加可以看出,由内积导出的范数应满足:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.\tag{g}$$

这很像平面几何中的平行四边形法则,实际上人们也把(g)式称作平行四边形法则.这就是说,任何内积诱导的范数都满足平行四边形法则.因此,假如范数能诱导出内积,它应该满足平行四边形法则.然而,不是所有的范数都满足这一点,例如,取 $C([0,1])$ 中两个元 $x(t)\equiv 1,y(t)=t$,则

$$\|x+y\|_\infty=\|1+t\|_\infty=2,$$

$$\|x-y\|_\infty=\|1-t\|_\infty=1,$$

$$\|x\|_\infty=1,\ \|y\|_\infty=1.$$

显然 $\|x+y\|_\infty^2+\|x-y\|_\infty^2>2\|x\|_\infty^2+2\|y\|_\infty^2$. 可见并非所有的范数都可以诱导一个内积,从极化恒等式的证明不难证明如下的

定理 4 设$(X,\|\ \ \|)$是线性赋范空间,则$(X,\|\ \ \|)$可以赋予内积的充要条件为$\|\ \ \|$满足平行四边形法则.

证明 显然,仅需证充分性.设$\|\ \ \|$满足(g),对任意 $x,y\in X$,定义

$$(x,y)=\frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2],$$

可以验证(x,y)满足内积的定义(详情可参考文献[9]).证毕.

定义 2 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

例 2 证明 l^2 是 Hilbert 空间.

回忆 $l^2=\{\{x_n\}|x_n\in\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\}$，对任意 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，定义

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n},$$

由 Hölder 不等式知 $(x,y)\leqslant\|x\|_2\ \|y\|_2<\infty$，不难验证 $(\ ,\ )$ 确为 l^2 中的内积，从而 $(l^2,(\ ,\ ))$ 成为内积空间. 往证 l^2 是完备的.

设 $x_k=\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$，$k=1,2,\cdots$ 是 l^2 中的 Cauchy 列，于是对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $k,j\geqslant N$ 时，有

$$\|x_k-x_j\|_2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon,$$

因此对每个正整数 n，有

$$|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}|<\varepsilon\quad(\forall k,j\geqslant N),$$

这说明对每个 n，$\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列，故存在有限数 $x_n^{(0)}$，使得 $x_n^{(k)}\to x_n^{(0)}$，记 $x_0=\{x_n^{(0)}\}$. 由 $\|x_k-x_j\|_2<\varepsilon$ 知对任意正整数 m 有

$$\left(\sum_{n=1}^{m}|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon\quad(\forall k,j\geqslant N),$$

令 $j\to\infty$ 得

$$\left(\sum_{n=1}^{m}|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon\quad(\forall k\geqslant N),$$

再令 $m\to\infty$ 得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon\quad(\forall k\geqslant N).$$

由此可见当 $k\geqslant N$ 时，$x_k-x_0\in l^2$，因 l^2 是线性空间，故 $x_0\in l^2$. 从不等式 $\|x_k-x_0\|\leqslant\varepsilon(k\geqslant N)$ 及 ε 的任意性知 $x_k\to x_0$，所以 l^2 是完备的. 证毕.

可以证明 $L^2(E)$ 也是 Hilbert 空间（此处 $L^2(E)$ 表示 E 上平方可积的复值可测函数空间）. 事实上，对任意 $f,g\in L^2(E)$，只需定义

$$(f,g)=\int_E f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x,$$

容易验证 $(\ ,\ )$ 是 $L^2(E)$ 中的内积，且由此内积诱导的范数恰好是本书上册第四章 §5 中 $(p=2)$ 定义的范数. 那里已证明 $L^2(E)$ 是完备的，故它是 Hilbert 空间.

由完备化定理知任何距离空间都有完备化空间，而在内积空间中，内积可以自然诱导一个范数，那么，按此范数的完备化空间是不是 Hilbert 空间呢？下面的定理肯定地回答了这一问题.

定理 5 设$(H,(\ ,\ ))$是内积空间，则 H 按范数$\|\ \|=\sqrt{(\ ,\ )}$的完备化空间是 Hilbert 空间.

证明 H 按$\|\ \|=\sqrt{(\ ,\ )}$确定的范数成为线性赋范空间，记其完备化空间为 $\widetilde{H}$，按完备化空间的定义知对任意 $x,y\in\widetilde{H}$，有 H 中的 Cauchy 列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，使得 $x=\{x_n\}$，$y=\{y_n\}$. 现在的问题是如何在 $\widetilde{H}$ 中定义内积，注意到$\{\|x_n\|\}$、$\{\|y_n\|\}$必有界，且

$$\begin{aligned}|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)|&\leqslant|(x_n,y_n)-(x_n,y_m)|+|(x_n,y_m)-(x_m,y_m)|\\&\leqslant\|x_n\|\ \|y_n-y_m\|+\|x_n-x_m\|\ \|y_m\|.\end{aligned}$$

故$\{(x_n,y_n)\}$是 Cauchy 列，从而收敛. 因此，我们可以定义

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n).$$

如果$\{x'_n\}$，$\{y'_n\}$是 H 中另两个 Cauchy 列，使得 $x=\{x'_n\}$，$y=\{y'_n\}$，则由$\|x_n-x'_n\|\to0$，$\|y_n-y'_n\|\to0$ 不难得知

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}(x'_n,y'_n),$$

这就是说(x,y)的定义与具体 Cauchy 列的选取无关，所以定义是无歧义的. 不难验证$(\ ,\ )$满足内积定义，从而$(\widetilde{H},(\ ,\ ))$成为内积空间，按完备化构造所确定的 $\widetilde{H}$ 中范数为

$$\|x\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n,x_n)}=\sqrt{(x,x)}\quad(x=\{x_n\}\in\widetilde{H}),$$

这说明$\|x\|$的确是由内积$(\ ,\ )$诱导的范数，故而 $\widetilde{H}$ 是 Hilbert 空间. 证毕.

有了内积概念，便可以定义内积空间中两个向量的夹角了，特别地，可以定义两个向量直交(或垂直)的概念.

定义 3 设$(H,(\ ,\ ))$是内积空间，$x,y\in H$，如果$(x,y)=0$，则称 x,y 为相互直交的，此时，记 $x\perp y$. 特别地，若 x 与 y 是相互直交的单位向量，即$\|x\|=\|y\|=1$，则称它们是正规直交向量，简称为正交向量.

3.2 正规直交(正交)基

在欧氏空间中，由于有了向量的直交概念，所以可以在空间中建立直角坐标系，进而可以将几何问题转化为代数问题来研究.

由 Schmidt 正交化过程可知任何有限维内积空间都有正规直交基(或直角坐标系). 无限维空间中情形如何呢? 其实，从 Schmidt 正交化方法可以看出，只要有内积，便可施行这一过程. 因此，我们总可以从一个线性无关序列出发通过 Schmidt 正交化过程得到一个相互正交的序列.

定义 4 设 $M\subset H$ 是相互正交的点集(即对任意 $x,y\in M$，有$\|x\|=\|y\|=1$，且若 $x\neq y$，有$(x,y)=0$)，通常称 M 为 H 中的正规直交集，简称为正交集. 若 H 中不存在与 M 中每个向量都直交的非零向量，则称 M 为 H 的完备正交集.