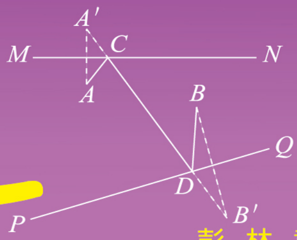
给力数学
GEILI MATHEMATICS



彭 林 童纪元◎编著

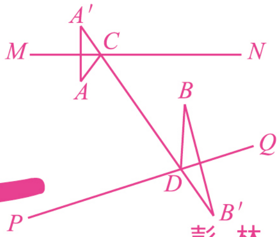
五招破解中考数学压轴题锦囊秘笈

2016版

2016版

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

给力数学
GEILI MATHEMATICS



彭 林 童纪元◎编著

五招破解中考数学压轴题锦囊秘笈

2016版

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

五招破解中考数学压轴题:锦囊秘笈:2016版/彭林,童纪元编著.—3版.—上海:华东理工大学出版社,2015.10
(给力数学)
ISBN 978-7-5628-4401-3

Ⅰ.①五… Ⅱ.①彭… ②童… Ⅲ.①中学数学课—初中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第239906号

给力数学

五招破解中考数学压轴题(锦囊秘笈)(2016版)

编　　著/彭　林　童纪元
责任编辑/赵子艳
责任校对/张　波
封面设计/裘幼华
出版发行/华东理工大学出版社有限公司
地　址:上海市梅陇路130号,200237
电　话:(021)64250306(营销部)
(021)64252750(编辑室)
传　真:(021)64252707
网　址:press.ecust.edu.cn
印　　刷/江苏省句容市排印厂
开　　本/787 mm×1092 mm　1/32
印　　张/8.125
字　　数/182千字
版　　次/2015年10月第1版
印　　次/2015年10月第1次
书　　号/ISBN 978-7-5628-4401-3
定　　价/25.00元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn
官方微博 e.weibo.com/ecustpress
天猫旗舰店 http://hdlgdxcbs.tmall.com

華東理工大學出版社
客户端扫码进入天猫旗舰店

1

前　言

《给力数学：五招破解中考数学压轴题（锦囊秘笈）（2016版）》所选的题目均为近几年全国各地中考数学试卷的压轴题.压轴题是试卷中综合性最强、难度最大、能够真正拉开水平档次的题型，能够把握住压轴题，在一定程度上就意味着获得高分.本书的读者对象是中等以上程度的学生. 本书以提高学生数学综合解题能力为目的，具有很强的针对性和实用性. 为了便于使用，本书分为"破解中考数学压轴题必胜五招"和"揭秘中考数学压轴题必考二十题型"两部分，通过典型例题，详尽评述了中考数学压轴题的命题特点与趋势，以及中考数学压轴题的解题策略，相信同学们在认真阅读本书后会受益匪浅，特别是基础较好的考生在认真用好本书后，能确保拿到"压轴题"的分数，挑战满分.

特别感谢李世魁、黄洋、项辉、马杰、秦书锋、郭春利、张春花、李秀琴、王献利、吴智敏、钟春风、彭光进、林秀敏、李曹群等老师为本书编写所作的贡献.

好运留给有准备的人——祝你好运！

目录

第一部分

破解中考数学压轴题必胜五招

第一招　咬文嚼字　弄清题意

审题时要咬文嚼字，不要一带而过.

首先，你必须弄清问题：未知是什么？已知是什么？

其次，进一步审题：你是否知道与此题有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

你以前见过这个问题吗？你是否见过类似的问题而形式稍有不同？

看着未知数，试想出一个具有相同的未知数或相似未知数的熟悉问题.

你能不能从已知条件推出某些有用的东西？你是否利用了所有已知数据？你是否利用了所有的条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要概念？

无论压轴题多么复杂，它都一定会在已知条件或已知图形中透露出必要的解题信息和方向，所以只要我们认真审题，明确已知条件和所求结论之间的因果关系，就能找到解决压轴题的途径.

例 1 如图 1,在平面直角坐标系中,O 为原点.点 A 在 x 轴的正半轴上,点 B 在 y 轴的正半轴上,$\tan\angle OAB=2$.二次函数 $y=x^2+mx+2$ 的图像经过点 A、B,顶点为 D.

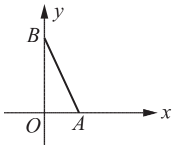


图 1

(1)求这个二次函数的解析式;

(2)将$\triangle OAB$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 后,点 B 落到点 C 的位置.将上述二次函数图像沿 y 轴向上或向下平移后经过点 C.请直接写出点 C 的坐标和平移后所得图像的函数解析式;

(3)设(2)中平移后所得二次函数图像与 y 轴的交点为 B_1,顶点为 D_1,点 P 在平移后的二次函数图像上,且满足$\triangle PBB_1$的面积是$\triangle PDD_1$面积的 2 倍,求点 P 的坐标.

解析:拿到以二次函数为主线的压轴题,我们可以从哪些角度去思考?

我们可以尝试通过如下问题进行思考:

①二次函数涉及的主要知识点有哪些?

②二次函数图像左右平移或上下平移的规律是什么?

③如何借助函数图像直观性,结合相关几何知识灵活解题?

④解这类题涉及的主要数学思想和数学方法有哪些?

(1)利用待定系数法,可以求出 m 的值,从而获得函数表达式.

由题意,点 B 的坐标为(0,2),于是 $OB=2$,而$\tan\angle OAB=2$,即$\dfrac{OB}{OA}=2$.

则 $OA=1$,点 A 的坐标为(1,0),又二次函数

$y=x^2+mx+2$ 的图像过点 A，故 $0=1^2+m+2$，解得 $m=-3$.

从而所求二次函数的解析式为 $y=x^2-3x+2$.

(2)我们不难注意到解决第二个小问题的关键是要确定点 C 的坐标，所以首先必须根据题意画出正确的图形，然后根据旋转的图形特征：形状大小不变，我们应该容易确定点 C 的坐标，从而此问题得以解决.

先根据题意，画出旋转后的图形(图 2)，准确求出点 C 的坐标.

因为$\triangle AOB\cong\triangle ADC$，所以 $AD=AO=1$，$DC=OB=2$.

可得点 C 的坐标为$(3,1)$.

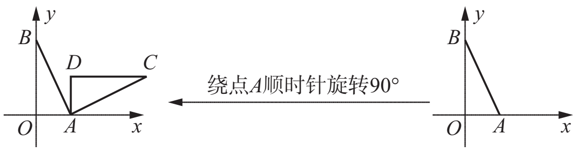


图 2

由于题目的问题是将二次函数 $y=x^2-3x+2$ 这个图像向上或向下平移，所以根据二次函数图像沿 y 轴向上或向下平移的特征：图像形状不变，与 y 轴交点的纵坐标变化.因此我们设所求二次函数解析式为 $y=x^2-3x+k$.因为此图像经过点 C，则有 $1=9-3\times3+k$，即 $k=1$.

故所求二次函数的解析式为 $y=x^2-3x+1$.

(3)回到第三小题，要求点 P 的坐标.由于点 P 在平移后的二次函数图像上，它的横、纵坐标之间就有了明确的关系，所以只要求出其中的一个即可，不妨尝试求 x.那么接下来我们重点要思考的是如何求 x？通常思路应该要建立 x 的方程.我们来审视题意，哪个条件引起你更多的关注？应该是

“$\triangle PBB_1$的面积是$\triangle PDD_1$面积的 2 倍”.根据这个条件,你通常会有哪些想法?也许有的同学会想到:相似三角形的面积比等于相似比的平方;等底(高)的两个三角形面积比等于它们的高(底)之比;面积割补法;直接利用面积公式等.对于本题我们不难发现这两个三角形是等底的,因而我们得到点 P 到 BB_1的距离是点 P 到 DD_1的距离的两倍.你能否用关于 x 的代数式分别表示这两个距离?在表示的过程中,同学们将点 P 到 DD_1的距离表示成的答案既有 $x-\frac{3}{2}$,也有$\frac{3}{2}-x$,那么到底谁对谁错?为什么会有这种情况产生?回到我们的题目:点 P 在平移后的二次函数图像上,再来仔细观察整个图形,发现这条抛物线被点 B_1和点 D_1分成三部分,所以点 P 的可能位置有三种.

由(2)可知,经过平移后所得图像是原二次函数图像向下平移 1 个单位后所得的图像,那么对称轴直线 $x=\frac{3}{2}$不变,且 $BB_1=DD_1=1$——这是解决本题的两个关键条件.

因为点 P 在平移后所得二次函数图像上,设点 P 的坐标为(x,x^2-3x+1).

在$\triangle PBB_1$和$\triangle PDD_1$中,由于 $S_{\triangle PBB_1}=2S_{\triangle PDD_1}$,利用三角形面积比等于同底的高之比转化为线段之间的关系,得到边 BB_1上的高是边 DD_1上的高的 2 倍——这是解决本题的突破口.

从而可以建立关于 x 的方程.

①当点 P 在对称轴的右侧时(图 3),建立 x 的方程是 $x=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$,得 $x=3$,故点 P 的坐标为$(3,1)$;

②当点 P 在对称轴的左侧，同时在 y 轴的右侧时，如图3所示，建立 x 的方程是 $x=2\left(\frac{3}{2}-x\right)$，得 $x=1$，故点 P 的坐标为 $(1,-1)$；

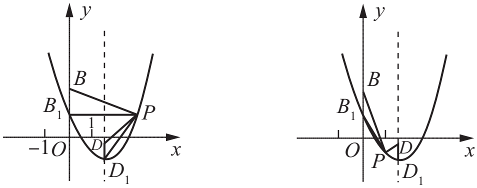


图 3

③当点 P 在 y 轴的左侧时 $(x<0)$，建立 x 的方程是 $-x=2\left(\frac{3}{2}-x\right)$，得 $x=3>0$（舍去）.

故所求点 P 的坐标为 $(3,1)$ 或 $(1,-1)$.

例 2 对于平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和⊙C，给出如下定义：若⊙C 上存在两个点 A，B，使得 $\angle APB=60°$，则称 P 为⊙C 的关联点.已知点 $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$E(0,-2)$，$F(2\sqrt{3},0)$，

(1)当⊙O 的半径为 1 时，

①在点 D，E，F 中，⊙O 的关联点是________；

②过点 F 作直线 l 交 y 轴正半轴于点 G，使 $\angle GFO=30°$，若直线 l 上的点 $P(m,n)$ 是⊙O 的关联点，求 m 的取值范围；

(2)若线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点，求这个圆的半径 r 的取值范围.

解析：这是一道现场学习型问题，此问题从题型上看，有展示全貌，留空补缺的；有说明解题理由的；有要求归纳规律再解决问题的；有理解新概念再解决新问题的.解决此类问题主要在于找到新概念和已有构建知识间的联系，以“旧”破“新”，联想与转化是关键.

本题属于理解新概念再解决新问题.通过阅读材料可知，“关联点”是与圆相关联的点，所以可以联想点和圆的三种位置关系分类探究.

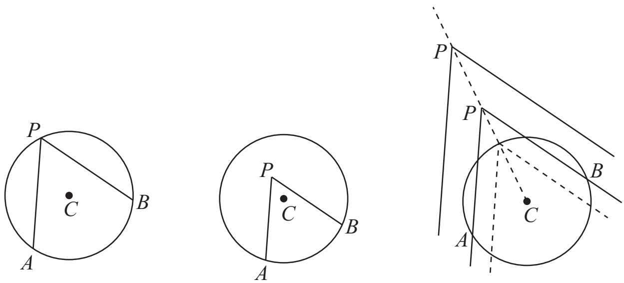


图 4

如图 4，当点 P 在 $\odot C$ 上或 $\odot C$ 内的任一位置，显然在 $\odot C$ 上必存在两个点 A，B，使得 $\angle APB=60^{\circ}$，所以 $\odot C$ 上或 $\odot C$ 内的任意一点都是 $\odot C$ 的关联点，考虑将 60° 角的顶点向圆外移动，发现在一定范围内移动时，该角的两边仍分别与 $\odot C$ 相交，且分别与 $\odot C$ 有两个交点，而在这范围之外，该角的两边与 $\odot C$ 不再同时相交，所以，找到“临界位置”是关键.

显然，直线与圆从有两个交点到无交点的过渡中，相切是关键位置.如图 5，PA，PB 为 $\odot C$ 的切线，$\angle APB=60^{\circ}$，连接 AC，PC，BC，利用切线长定理和三角函数关系可得：$PC=2AC$.由此可知，设 $\odot C$ 半径为 r，则以 C 为圆心，$2r$ 为半径的圆及其内部的所有点都是 $\odot C$ 的关联点，不妨称满足此条件的所有点的集合为 $\odot C$ 的关联点区域.

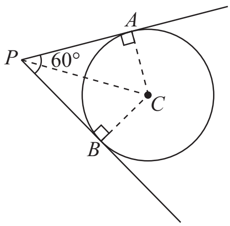


图 5

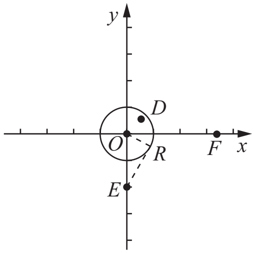


图 6

(1)①通过上述分析，判断点 D，E，F 中，哪些是 $\odot O$ 的关联点，显然是判断哪些点在 $\odot O$ 的关联点区域，利用点和圆的位置关系判断，点 D，E 是 $\odot O$ 的关联点.

如果没有经历上述比较详细的分析，则可以紧扣 $\odot C$ 的关联点的定义来判断：

如图 6 所示，过点 E 作 $\odot O$ 的切线，设切点为 R，

因为 $\odot O$ 的半径为 1，所以 $RO=1$.

因为 $EO=2$,所以$\angle OER=30°$.

根据切线长定理得出$\odot O$ 的左侧还有一个切点,使得组成的角等于 30°.

所以点 E 是$\odot O$ 的关联点.

因为 $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$E(0,-2)$,$F(2\sqrt{3},0)$,

所以 $OF>EO$,$DO<EO$.

所以点 D 一定是$\odot O$ 的关联点,而在$\odot O$ 上不可能找到两点使得它们与 F 组成的角度(以 F 为顶点的角)等于 60°.故在点 D,E,F 中,$\odot O$ 的关联点是 D,E.

②由题意可知,若 P 要刚好是$\odot C$ 的关联点,需要点 P 到$\odot C$ 的两条切线 PA 和 PB 之间所夹的角为 60°.由图 7 可知$\angle APB=60°$,则$\angle CPB=30°$,

连接 BC,则 $PC=\dfrac{BC}{\sin\angle CPB}=2BC=2r$,

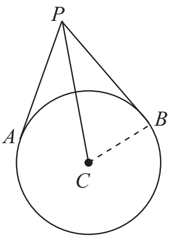


图 7

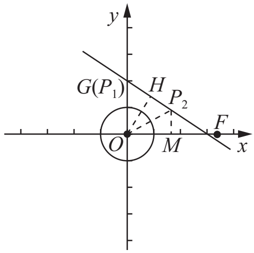


图 8

所以若点 P 为$\odot C$ 的关联点,则需点 P 到圆心的距离 d 满足 $0\leqslant d\leqslant 2r$.

由(1),考虑临界点位置的 P 点,如图 8,点 P 到原点的距离 $OP=2\times 1=2$.

过点 O 作 x 轴的垂线 OH，垂足为 H.

则 $\tan\angle OGF=\dfrac{FO}{OG}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.所以$\angle OGF=60°$.

所以 $OH=OG\sin60°=\sqrt{3}$，$\sin\angle OPH=\dfrac{OH}{OP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$\angle OPH=60°$.可得点 P_1 与点 G 重合.

过点 P_2 作 $P_2M\perp x$ 轴于点 M，可得$\angle P_2OM=30°$，

所以 $OM=OP_2\cos30°=\sqrt{3}$.

所以若点 P 为$\odot O$ 的关联点，则点 P 必在线段 P_1P_2 上.

所以 $0\leqslant m\leqslant\sqrt{3}$.

(2)若“线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点”，说明线段 EF 上的所有点都在这个圆的关联点区域内(或边界上).显然，如果这个圆足够大，则线段 EF 上的所有点落在这个圆的关联点区域(或边界)的可能性就越大，所以，确定临界情况下圆的半径是关键，即求这个圆半径的最小值.欲使这个圆的半径最小，则说明这个关联点区域的半径应最小，即线段 EF 就是关联点区域的半径，则这个圆的圆心应在线段 EF 的中点.考虑临界情况，如图 9，即恰好点 E、F 为$\odot K$ 的关联点时，则 $KF=2KN=\dfrac{1}{2}EF=2$，此时，$r=1$.

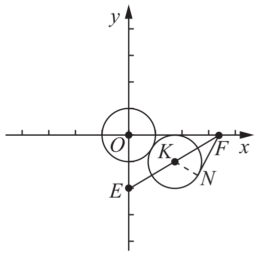


图 9

所以若线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点，这个圆的半径 r 的取值范围为 $r\geqslant1$.

第二招　模式识别　形成套路

数学解题中的模式识别来源于解题的一个基本经验:拿到一道题目,我们总是首先辨别它是否属于已经掌握的类型,如果属于,那就提取出解决该类型的方法来解答;如果不是直接属于,那我们会设法进行一些变化;如果无论如何变化都不属于时(题目比较陌生或比较复杂),我们再考虑其他的途径.这就是模式识别的解题策略.

模式识别这一解题策略体现了化归思想,有时遵循化陌生为熟悉的"熟悉化原则",有时遵循将问题分解为若干个基本问题的"简单化原则".在解中考数学压轴题时,"基本问题"的思想是这一策略的重要体现,积累"基本问题"也就成为提高这一策略效率的捷径.

我们举例说明经典的"将军饮马问题"在解代数几何综合题中的应用.

问题　如图10,古希腊一位将军要从点 A 出发,到河边 MN 去饮马,然后再回到驻地点 B.问:怎样选择饮马地点,才能使路程最短?

解析：在河边饮马的地点有多处，把这些点与 A、B 两点连接起来的两条线段的长度之和，就是从 A 地到饮马地点，再回到 B 地的路程.

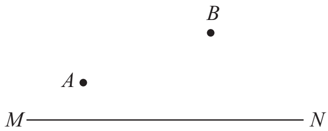


图 10

现在的问题是怎样找出使两条线段的长度之和为最短的那个点.

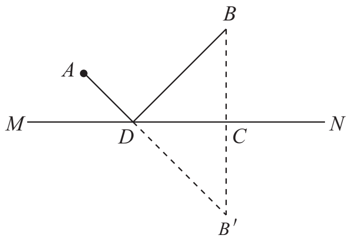


图 11

在图 11 中，过点 B 作河边 MN 的垂线，垂足为点 C，延长 BC 到点 B'，点 B' 是点 B 对于河边 MN 的对称点，连接 AB'，交河边 MN 于点 D，那么点 D 就是题目中所求的饮马地点.

利用轴对称思想，将该问题转化为"两点之间线段最短"，即"三角形的两边之和大于第三边"的问题.饮马问题可归为"求定直线上一动点与直线外两定点的距离之和的最小值"的问题的数学模型.这一基本问题在近几年的中考中发挥着举足轻重的作用.