

3 年级

◎ 丛书主编：蒋忠勇

# 小学奥数 讲练1+1

讲 解 版

本册主编：龚宇

本册编委：蒋忠勇 张峰 徐俊杰 朱财鑫 顾心培 凌广道



华东理工大学出版社  
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

# 前言

给我最大快乐的，  
不是已懂的知识，而是不断地学习；  
不是已有的东西，而是不断地获取；  
不是已达到的高度，而是继续不断地攀登。

——高斯

近年来，奥数一直是被争议的焦点，甚至被“神话”或“妖魔化”，作为一种锻炼孩子逻辑思维能力的手段，奥数的“功劳”应该被肯定，它可以像绘画、音乐、体育一样，成为一种兴趣特长。

这套书包括3年级到5年级，每个年级包括讲解版和练习版，共6本，建议配合使用。

主要适合以下读者使用：

- 对奥数比较感兴趣的家长和学生
- 想通过各个杯赛的初赛但缺少对奥数体系认识的学生
- 通过了初赛，希望在决赛中更进一步的学生

那么，与市面上众多的奥数书相比，本套书有什么特别之处呢？

1. 讲解版全书的结构设置体现了“由点到线再到面”的理念，共五大模块，每个模块下根据内容的多少设置不同的讲次，每讲又细化了若干问题，每个问题都由3~4个例题和2个巩固练习题构成，再配合专门的练习版作为习题量的补充，非常适合40~60分钟的教学需要，训练起来更加灵活和自主。

2. 书中所有的习题基本涵盖了当前各大杯赛中频繁出现的考点与知识点，并且讲解版中对每类问题的解题方法及技巧都有深入的讲解和总结。值得一提的是，其中所有的题目都已经用培训班上课讲义的形式进行了几轮的磨合试验和调整。

3. 题目的难度契合当下的竞赛。编委会将本书的题目与几大热门杯赛真题进行了回归、方差等因素分析，发现其“匹配性”较高。在专题的设置上，除了尽量靠近杯赛的考纲设置，按照计算、数论、几何、应用题等竞赛中常见热点和考点进行编排，还根据实际，增加了“口奥”和小升初的专题训练。

另外，本书在代数部分注重解题技巧的传授，在几何部分注重方法的总结。在讲解清楚每个问题后，还有针对性地配套了一定的训练和巩固练习（详见“练习版”），旨在提高学生举一反三的能力，使学生在杯赛中能灵活处理所给题目，抓住关键分，提升自己的竞争力。

希望学生能通过本书的讲练有所收获，在竞赛及“小升初”的考试中取得佳绩，更希望学生能从本书中掌握其中蕴含的数学思想方法，拓展数学思维，喜欢上奥数，并学会合理、有逻辑地阐述自己的想法和观点。

当然，书中一定有疏漏错谬之处，敬请联系编者批评指正。

# 目录

## 模块一 计算

### 第一讲 速算与巧算 /1

- 问题一 凑整法
- 问题二 分组法
- 问题三 利用公式

### 第二讲 运算规律和等量代换 /5

- 问题一 定义新运算
- 问题二 数字找规律
- 问题三 等量代换

### 第三讲 等差数列的认识与计算 /10

- 问题一 等差数列的计算
- 问题二 等差数列的应用

### 本章测试 /13

## 模块二 几何

### 第一讲 几何计数 /16

- 问题一 简单几何计数
- 问题二 分类计数
- 问题三 对应计数
- 问题四 包含类计数

### 第二讲 周长和面积 /21

- 问题一 几何图形的周长
- 问题二 图形的变换
- 问题三 面积公式的应用
- 问题四 图形的割补

### 本章测试 /27

## 模块三 综合问题

### 第一讲 数论初步 /30

- 问题一 2 的故事
- 问题二 3 的故事
- 问题三 5 的故事
- 问题四 2、3、5 挑战区

### 第二讲 周期问题 /36

- 问题一 图形中的周期问题
- 问题二 数列中的周期问题
- 问题三 日期中的周期问题

### 第三讲 平均数与排列组合 /41

- 问题一 平均数
- 问题二 排列组合

### 第四讲 简单统计 /46

- 问题一 表格绘制
- 问题二 统计平均数
- 问题三 其他问题

### 第五讲 逻辑推理 /50

- 问题一 列表推理法
- 问题二 假设推理

### 第六讲 行程问题 /54

- 问题一 行程基础
- 问题二 相遇与追及
- 问题三 流水行船行程问题
- 问题四 火车行程问题

### 本章测试 /62

## 模块四 应用题

### 第一讲 归一还原与鸡兔同笼 /65

- 问题一 归一与还原问题综合
- 问题二 变型鸡兔同笼问题与假设法
- 问题三 复杂盈亏问题

### 第二讲 和差问题 /70

- 问题一 简单和差计算
- 问题二 复杂和差计算
- 问题三 和差问题拓展

### 第三讲 和倍问题 /74

- 问题一 简单和倍问题
- 问题二 和倍问题计算

问题三 其他和倍问题

#### 第四讲 差倍问题 /78

问题一 差倍问题基础

问题二 复杂差倍计算

问题三 差倍问题延伸

#### 第五讲 年龄问题 /83

问题一 可以转化为和差、和倍、差倍问题的年龄问题

问题二 其他特殊类型的年龄问题

#### 第六讲 植树问题 /86

问题一 非封闭线路的植树问题

问题二 类似非封闭线路植树问题类

问题三 封闭线路的植树问题

问题四 方阵问题

**本章测试** /91

### 模块五 趣味数学

#### 第一讲 巧填算符 /94

问题一 倒推法

问题二 相同数字凑数

问题三 和差型凑数

问题四 二十四点与添括号

#### 第二讲 游戏与策略 /98

问题一 倒推法

问题二 对称法

#### 第三讲 智巧趣题(1) /101

问题一 青蛙跳蜗牛爬

问题二 过桥过河问题

问题三 倒水问题

问题四 称重问题

#### 第四讲 智巧趣题(2) /105

问题一 数阵图

问题二 数字谜

问题三 火柴游戏

问题四 幻方

**本章测试** /112

### 模块六 综合训练

综合训练 1 /115

综合训练 2 /116

**参考答案与分析** /118

# 模块一 计算

## 第一讲 速算与巧算

(目标问题：凑整法、分组法、利用公式)

### 问题一 凑整法

例 1

- 计算：(1)  $117 + 229 + 333 + 471 + 528 + 622$   
(2)  $(1350 + 249 + 468) + (251 + 332 + 1650)$   
(3)  $756 - 248 - 352$   
(4)  $894 - 89 - 111 - 95 - 105 - 94$

【分析】

运用加法的交换律或结合律先把加在一起是整十、整百、整千……的数加起来，使计算简便，这种方法叫做“凑整法”。

- (1) 原式  $= (117 + 333) + (229 + 471) + (528 + 622)$   
 $= 450 + 700 + 1150$   
 $= (450 + 1150) + 700$   
 $= 1600 + 700$   
 $= 2300$
- (2) 原式  $= 1350 + 249 + 468 + 251 + 332 + 1650$   
 $= (1350 + 1650) + (249 + 251) + (468 + 332)$   
 $= 3000 + 500 + 800$   
 $= 4300$
- (3) 原式  $= 756 - (248 + 352)$   
 $= 756 - 600$   
 $= 156$
- (4) 原式  $= (894 - 94) - (89 + 111) - (95 + 105)$   
 $= 800 - 200 - 200$   
 $= 400$

例 2

- 计算：(1)  $1348 - 234 - 76 + 2234 - 48 - 24$   
(2)  $1847 - 1936 + 536 - 154 - 46$

【分析】

- (1) 原式  $= (1348 - 48) + (2234 - 234) - (76 + 24)$   
 $= 1300 + 2000 - 100$   
 $= 3200$

计算

几何

综合问题

应用题

趣味数学

综合训练

参考答案与分析

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 原式} &= 1847 - (1936 - 536) - (154 + 46) \\
 &= 1847 - 1400 - 200 \\
 &= 247
 \end{aligned}$$

**例 3** 计算:  $19 + 199 + 1999 + \dots + \underbrace{199\dots\dots 9}_{1999 \text{ 个 } 9}$

**【分析】**

要注意寻找算式特有的规律, 观察可以发现 9 的个数对应求和的个数, 再根据凑整的方式来解决此题. 所以, 原式  $= \underbrace{2222\dots\dots 20}_{1999 \text{ 个 } 2} - 1999 \times 1 = \underbrace{22\dots\dots 20221}_{1996 \text{ 个 } 2}$ .

**【巩固与提高1】**

计算:  $6472 - (4476 - 2480) + 5319 - (3323 - 1327) + 9354 - (7358 - 5362) + 6839 - (4843 - 2847)$

**【巩固与提高2】**

计算:  $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999999999}_{9 \text{ 个 } 9}$

## 问题二 分组法

**例 1**

计算: (1)  $100 - 101 + 102 - 103 + 104 - 105 + 106 - 107 + 108$   
 (2)  $123 + 234 + 345 - 456 + 567 - 678 + 789$

**【分析】**

注意观察算式中的数的规律和加减符号的数量, (1)中除了第一个数 100 外, 后面的数刚好可以两两组成 1. (2)中每个数都是在第一个数 123 的基础上加 111 得到, 之后就可以根据这一规律进行速算与巧算.

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 原式} &= 100 + (102 - 101) + (104 - 103) + (106 - 105) + (108 - 107) \\
 &= 100 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 &= 104
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 原式} &= 123 + (123 + 111) + (123 + 222) - (123 + 333) + (123 + 444) - (123 \\
 &\quad + 555) + (123 + 666) \\
 &= 123 \times 3 + (111 + 222 - 333 + 444 - 555 + 666) \\
 &= 369 + 555 \\
 &= 924
 \end{aligned}$$

**例 2** 计算:  $2002 + 2001 - 2000 - 1999 + \dots + 6 + 5 - 4 - 3 + 2 + 1$

**【分析】**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 2002 - 2000 + 2001 - 1999 + \dots + 6 - 4 + 5 - 3 + 2 + 1 \\
 &= 2 \times 1001 + 1 \\
 &= 2002 + 1 \\
 &= 2003
 \end{aligned}$$

**例 3** 下式是一个加法“金字塔”,快速计算结果.

**【分析】**

这一列数的前九行是从上到下、从小到大排列,后九行是从下到上、从大到小排列,所以从中间“对折”,上、下对应的两个数字之和是 10,由此推知,个位的 18 个数之和是  $(1+9) + (3+7) + (4+6) + \dots + (1+9) = 10 \times 9 = 90$ ,同理,十位的 16 个数之和是 80,百位的 14 个数之和是 70……亿位的两个数之和是 10.按照加法进位的法则,该“金字塔”的计算结果是 1234567890.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 23 \\
 456 \\
 7891 \\
 23456 \\
 789123 \\
 4567891 \\
 23456789 \\
 123456789 \\
 987654321 \\
 87654321 \\
 6543219 \\
 321987 \\
 87654 \\
 3219 \\
 654 \\
 87 \\
 + \quad 9 \\
 \hline
 \end{array}$$

**【巩固与提高1】**

计算:(1)  $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + 13 + \dots + 2006$   
 (2)  $2003 + 2002 - 2001 - 2000 + 1999 + 1998 - 1997 - 1996 + \dots + 3 + 2 - 1$

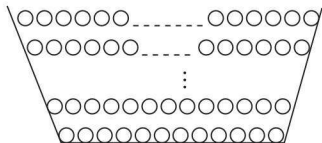
**【巩固与提高2】**

计算:  $2006 + 2005 - 2004 - 2003 + \dots + 6 + 5 - 4 - 3 + 2$

### 问题三 利用公式

例 1

乒乓球训练所为了方便乒乓球的管理与取放,将乒乓球放在如图所示的容器中,已知这个容器可以放 20 层乒乓球,最下面一层可以放 12 个,每层都比上一层多 1 个,问这个容器可以盛放多少个乒乓球?



例 1 图

【分析】

因为这些乒乓球从下向上看,从第 2 层起,每层比下一层多 1 个,共有 20 层,所以这个容器中的乒乓球总数为: $12 + 13 + 14 + \cdots + 29 + 30 + 31 = (12 + 31) + (13 + 30) + (14 + 29) + \cdots + (21 + 22) = 43 \times 10 = 430$ (个).

例 2

计算: $99 \times 101$

【分析】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (100 - 1) \times (100 + 1) \\ &= 100 \times 100 - 1 \times 1 \\ &= 9999 \end{aligned}$$

【巩固与提高 1】

有一个挂钟,一点钟敲 1 下,两点钟敲 2 下,三点钟敲 3 下……十二点钟敲 12 下,每逢分针指向 6 时敲 1 下.问:这个挂钟一昼夜共敲多少下?

【巩固与提高 2】

计算: $999 \times 1001$

## 本讲小结

### 一、巧算的几种常用方法

1. 分组凑整法:将算式中的数分成若干组,使每组的运算结果都是整十、整百、整千……的数,再将各组的结果求和(差).
2. 加补凑整法:① 移位凑整法,即先把加在一起为整十、整百、整千……的数相加,然后再与其他的数相加.② 借数凑整法,即有些算式中直接凑整不明显,可“借数”或“拆数”凑整.
3. 提取公因数:找出多个数字共同的因数.

4. 公式法:比如等差数列求和公式、等比数列求和公式、平方差、完全平方公式等.

## 二、基本运算律及公式

1. 加法交换律:两个数相加,交换加数的位置,它们的和不变,即  $a+b=b+a$ .
2. 加法结合律:三个数相加,先把前两个数相加,再加上第三个数;或者先把后两个数相加,再与第一个数相加,它们的和不变,即  $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$ .

计算

几何

## 第二讲 运算规律和等量代换

(目标问题:定义新运算、数字找规律、等量代换)

综合问题

### 问题一 定义新运算

例 1 如果定义  $a\triangle b=a+b$ ,其中  $a,b$  是正整数,那么  $9\triangle 2=(\quad)$

【分析】 已知  $a\triangle b=a+b$ ,令  $a=9,b=2$ ,则  $a\triangle b=9\triangle 2=9+2=11$ .

例 2 如果定义  $a\circ b=2\times a+b$ ,其中  $a,b$  是正整数,那么  $(3\circ 5)\circ 7=(\quad)$

【分析】 已知  $a\circ b=2\times a+b$ ,先算  $3\circ 5$ ,令  $a=3,b=5$ ,则  $a\circ b=3\circ 5=2\times 3+5=11$ ,再算  $11\circ 7=2\times 11+7=29$ .

例 3 如果定义  $a\odot b=a+b-1$ ,且  $(5\odot x)\odot x$ ,那么求  $x=3$  时该式子的值.

【分析】  $5\odot x=5+x-1=4+x$ , $(5\odot x)\odot x=(4+x)\odot x=4+x+x-1=3+2x$ ,所以  $(5\odot 3)\odot 3=3+2\times 3=9$ .

例 4 已知: $3\ast 2=3+33=36$ , $2\ast 3=2+22+222=246$ , $1\ast 4=1+11+111+1111=1234$ .  
(1) 求  $4\ast 4$ ;  $5\ast 6$  的值;(2) 如果  $5\ast x=6170$ ,求  $x$  的值.

【分析】 (1)  $4\ast 4=4+44+444+4444=4\times 1234=4936$   
 $5\ast 6=5+55+555+5555+55555+555555=5\times 123456=617280$   
(2) 已知  $5\ast x=6170$ , $6170\div 5=1234$ ,则  $x$  表示有 4 个 5 相乘,即  $x=4$ .

应用题

趣味数学

综合训练

参考答案与分析

**【巩固与提高1】**

如果： $9\triangle 13 = (9 + 13) \div 2 = 11$ ， $15\triangle 17 = (15 + 17) \div 2 = 16$ ， $34\triangle 18 = (34 + 18) \div 2 = 26$ ，那么

- (1) 求  $45\triangle 33$  的值；
- (2) 若  $x\triangle 5 = 20$ ，求  $x$ ；
- (3) 若  $1\triangle x = 8$ ，求  $x$ ；
- (4) 求  $(7\triangle 13)\triangle 10$  的值。

**【巩固与提高2】**

若定义： $a\triangle b = (a + b) \div 2$ ， $a\square b = a \times b$ ， $a\odot b = a \times 3 - b$ ，求下列式子的值。

- (1)  $10\triangle 8$ ；(2)  $9\square 5$ ；(3)  $9\odot 15$ ；(4)  $(6\odot 4)\square 2$ ；(5)  $25[(7\triangle 13)\triangle 10]$ 。

**问题二 数字找规律****例 1**

观察下面的数列，找出其中的规律，并根据规律，在括号里填上合适的数。

- (1) 2, 5, 8, 11, ( ), 17, 20
- (2) 19, 17, 15, 13, ( ), 9, 7
- (3) 1, 3, 9, 27, ( ), 243
- (4) 64, 32, 16, 8, ( ), 2

**【分析】**

(1) 该数列从第 2 项开始，每一项减去它前面一项所得的差都等于 3。因此，括号中应填 14，即  $11 + 3 = 14$ 。

(2) 该数列每相邻两项的差都是 2。所以，括号中应填 11，即  $13 - 2 = 11$ 。

(3) 此数列中，从相邻两项的差是看不出规律的，但是，从第 2 项开始，每一项都是其前面一项的 3 倍，即  $3 = 1 \times 3$ ， $9 = 3 \times 3$ ， $27 = 9 \times 3$ 。因此，括号中应填 81，即  $81 = 27 \times 3$ ，代入后，243 也符合规律，即  $243 = 81 \times 3$ 。

(4) 此数列中，从第 1 项开始，每一项是其后面一项的 2 倍，即  $64 = 32 \times 2$ ， $32 = 16 \times 2$ ， $16 = 8 \times 2$ ，

因此，括号中应填 4，代入后符合规律。

## 例 2

1,2,2,3,3,4,4,5,5,6……是一串按照某种规律排列的自然数,请问其中第 51 个数到第 55 个数的和是多少?

## 【分析】

观察可以发现,数列的规律是两个一组,即 1,2;2,3;3,4……每一组的第一个数可以组成一个从 1 开始的自然数数列,而且是这一组的组序数,每组的两个数为连续自然数,因为  $51 \div 2 = 25 \cdots 1$ ,说明第 51 个数是第 26 组的第一个数,应该是 26,从第 51 个数到第 55 个数一共有 5 个数,分别为 26,27,27,28,28,所以它们的和为  $26 + 27 + 27 + 28 + 28 = 136$ .

## 例 3

先观察下面各算式,再按规律填数.

$$(1) 12345679 \times 9 = 111111111$$

$$12345679 \times 18 = 222222222$$

$$12345679 \times 27 = 333333333$$

$$12345679 \times (\quad) = 444444444$$

$$12345679 \times (\quad) = 666666666$$

$$(2) \quad 21 \times 9 = 189$$

$$321 \times 9 = 2889$$

$$4321 \times 9 = 38889$$

$$54321 \times 9 = (\quad)$$

$$654321 \times 9 = (\quad)$$

## 【分析】

(1) 在这一组算式中,被乘数不变,乘数和积都在变化.和第一个算式相比,乘数扩大多少倍,积就扩大多少倍.根据这一规律可知,空格中的数分别为 36 和 54,即  $9 \times 4 = 36$ , $9 \times 6 = 54$ .

(2) 通过观察可以看出这是一组排列有序的数字“梯田”,一层一层有规律地向下延伸.乘号前面是 21,321,4321……乘号后面都是 9,相乘的结果的最高位分别是 1,2,3……而位数分别是三位数、四位数、五位数……由此可得:

54321 $\times$ 9 的结果的最高位是 4,位数是  $5 + 1 = 6$ ,个位上是 9,其余各位都是 8;

654321 $\times$ 9 的结果的最高位是 5,个位是 9,其余各位都是 8,位数是  $6 + 1 = 7$ .所以,54321 $\times$ 9=488889,654321 $\times$ 9=5888889.

## 例 4

先观察下列算式的规律,再回答问题.

$$1+2+1=$$

$$1+2+3+2+1=$$

$$1+2+3+4+3+2+1=$$

$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=$$

根据以上算式的计算规律,求:1+2+3+…+9+10+9+…+3+2+1.

## 【分析】

这道题可以利用简便方法计算出上面四个算式的结果,从中找出答案规律.

$1+2+1=2+(1+1)=2 \times 2=4$ , $1+2+3+2+1=3+(2+1)+(2+1)=3 \times 3=9$ , $1+2+3+4+3+2+1=4+(1+3)+(2+2)+(1+3)=4 \times 4=16$ , $1+2+3+4+5+4+3+2+1=5+(1+4)+(1+4)+(3+2)+(3+2)=5 \times 5=25$ ,可以发现,所求算式的结果等于加法算式中间一个加数(最大的数)乘以本身.所以, $1+2+3+\cdots+9+10+9+\cdots+3+2+1=10 \times 10=100$ .

**【巩固与提高1】**

找规律, 填空.

- (1) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ( ), 21, 34, ……  
 (2) 1, 3, 4, 7, 11, 18, ( ), 47, ……  
 (3) 1, 3, 6, 10, ( ), 21, 28, 36, ( ).  
 (4) 1, 2, 6, 24, 120, ( ), 5040.

**【巩固与提高2】**

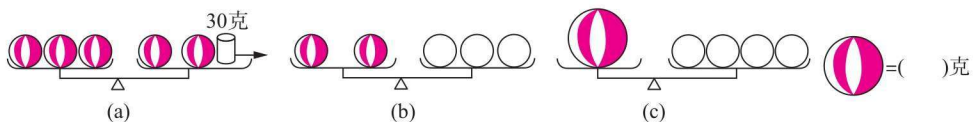
先找规律, 再填数.

$$\begin{aligned}
 &3 \times 4 = 12 \\
 &33 \times 34 = 1122 \\
 &333 \times 334 = 111222 \\
 &3333 \times 3334 = 11112222 \\
 &33333 \times 33334 = ( \quad ) \\
 &\quad \dots\dots \\
 &333333333 \times 333333334 = ( \quad )
 \end{aligned}$$

**问题三 等量代换**

**例 1**

看图填空.



例 1 图

**【分析】**

方法一: 观察发现图(a)中, 左边比右边多一个○, 所以一个大○就是 30 克, 那么 2 个大○就是 60 克. 从图(b)可以看出, 3 个小○与 2 个大○一样重, 可知一个小○为 20 克. 1 个大○与 4 个小○一样重, 所以一个大○是 80 克.

方法二: 用算式来解.

根据图(a),  $\text{大○} + \text{大○} + \text{大○} = \text{大○} + \text{大○} + 30$ , 所以  $\text{大○} = 30$  (克).

根据图(b),  $\text{小○} + \text{小○} + \text{小○} = 60$  (克), 所以  $\text{小○} = 20$  (克).

根据图(c),  $\text{大○} = 4 \times 20 = 80$  (克).

**例 2**

已知  $\triangle + \bigcirc = 24$ ,  $\bigcirc = \triangle + \triangle$ . 那么  $\triangle$  和  $\bigcirc$  各代表多少?

**【分析】**

将两个等式分别编号,  $\triangle + \bigcirc = 24$  ①,  $\bigcirc = \triangle + \triangle$  ②.

将式①中的  $\bigcirc$  用式②中的 2 个  $\triangle$  代换, 得  $\triangle + \triangle + \triangle = 24$ , 所以  $\triangle = 24 \div 3 = 8$ ,  $\bigcirc = 8 + 8 = 16$

**例 3** 已知  $\triangle + \square = 9$ ,  $\triangle + \triangle + \square + \square + \square = 25$ , 则  $\triangle = ( \quad )$ ,  $\square = ( \quad )$ .

**【分析】**

(方法一) 因为  $\triangle + \square = 9$ , 如果把  $\triangle + \triangle + \square + \square + \square = 25$  中的  $\triangle + \square$  代换成 9, 就变成  $9 + \triangle + \square + \square = 25$ ; 再代换一次, 变成  $9 + 9 + \square = 25$ , 可以得出  $\square = 7$ ; 再根据  $\triangle + \square = 9$ , 可以求出  $\triangle = 2$ .

(方法二) 因为  $\triangle + \square = 9$ , 那么 2 个  $\triangle + 2$  个  $\square = 18$ . 又因为 2 个  $\triangle + 3$  个  $\square = 25$ , 所以  $18 + \square = 25$ . 由此得出  $\square = 7$ , 那么  $\triangle = 2$ , 即  $2 \times 9 = 18$ . 列式计算为  $\square = 25 - 18 = 7$ ,  $\triangle = 9 - 7 = 2$ .

**例 4** 已知 13 个李子的重量等于 2 个苹果和 1 个桃子的重量, 而 4 个李子和 1 个苹果的重量等于 1 个桃子的重量, 问多少个李子的重量等于 1 个桃子的重量?

**【分析】**

根据题意列出等式:  $\begin{cases} 13 \text{ 李子} = 2 \text{ 苹果} + 1 \text{ 桃子} & \text{①} \\ 4 \text{ 李子} + 1 \text{ 苹果} = 1 \text{ 桃子} & \text{②} \end{cases}$

把式②代入式①得:  $13 \text{ 李子} = 2 \text{ 苹果} + 4 \text{ 李子} + 1 \text{ 苹果}$ , 即  $9 \text{ 李子} = 3 \text{ 苹果}$ , 即  $3 \text{ 李子} = 1 \text{ 苹果}$ . ③

把式③代入式②得:  $4 \text{ 李子} + 3 \text{ 李子} = 1 \text{ 桃子}$ , 即  $7 \text{ 李子} = 1 \text{ 桃子}$ , 7 个李子的重量等于 1 个桃子的重量.

**例 1** 一支钢笔的价钱是一支铅笔价钱的 5 倍, 用买 30 支铅笔的钱能买几支钢笔?

**【分析】**

(方法一) 列出等式:  $1 \text{ 支钢笔} = 5 \text{ 支铅笔}$  ①, 变式为  $30 \text{ 支铅笔} = 6 \times 5 \text{ 支铅笔}$  ②. 把式①代入式②得:  $30 \text{ 支铅笔} = 6 \times 1 \text{ 支钢笔} = 6 \text{ 支钢笔}$ .

(方法二) 用字母  $x$  代表 1 支钢笔的价钱, 用字母  $y$  代表 1 支铅笔的价钱, 依题意可列出等式:  $x = 5y$ , 因为  $30y = 6 \times 5y$ , 用  $x$  代替  $5y$ , 得  $30y = 6x$ . 所以用买 30 支铅笔的钱能买 6 支钢笔.

**【巩固与提高1】**

如果鱼尾重 4 公斤, 鱼头重量等于鱼尾加上鱼身一半的重量, 而鱼身重量等于鱼头加鱼尾的重量, 问这条鱼重多少公斤?

**【巩固与提高2】**

张老师买了 3 个足球和 2 个篮球, 李老师买了 2 个足球和 4 个篮球, 他们每个人都花了 80 元. 问: 1 个足球多少钱? 1 个篮球多少钱?

## 本讲小结

### 1. 定义新运算

定义新运算是一种特殊的运算形式,它使用的是一些特殊的运算符号,如 $*$ 、 $\triangle$ 等.

### 2. 找规律

找规律填空,可通过观察、实验、猜测、推理等方法发现图形和数字的排列规律.

### 3. 等量代换

用一种量(或一种量的一部分)来代替和它相等的另一种量(或另一种量的一部分).

## 第三讲 等差数列的认识与计算

(目标问题:等差数列的计算、等差数列的应用)

### 问题一 等差数列的计算

**例 1** 2,5,8,11,14……是按照一定规律排列的一串数,照此规律,第21项是多少?

**【分析】**

观察发现,这是一个等差数列,将第21项看做末项,依据等差数列求解末项的公式即可得出结果.末项 $=2+(21-1)\times 3=62$ .

**例 2** 计算:11+12+13+14+15+16+17+18+19

**【分析】**

利用等差数列求和公式,原式 $= (11+19)\times 9\div 2=135$ .

**例 3** 把比100大的奇数从小到大排成一列,其中第21个数是多少?

**【分析】**

该数列为等差数列,首项为101,公差为2,第21个数的项数为21.  
所以第21个数是 $101+(21-1)\times 2=141$ .

**例 4** 已知一个等差数列的第9项等于131,第10项等于137,这个数列的第1项是多少?第19项是多少?

## 【分析】

先求出等差数列的首项,再利用公式进行计算.公差 $=137-131=6$ , $131=$ 首项 $+(9-1)\times 6$ ,所以,首项 $=83$ .末项(第19项) $=83+(19-1)\times 6=191$ .

## 例 5

已知一个等差数列的第8项等于50,第15项等于71.请问这个数列的第1项是多少?

## 【分析】

$71-50=21$ , $21\div(15-8)=3$ (公差), $50=$ 首项 $+(8-1)\times 3$ ,所以首项 $=29$ .

## 【巩固与提高1】

把248分成8个连续偶数的和,其中最大的那个数是多少?

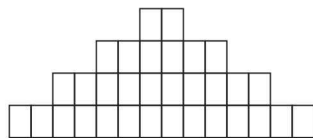
## 【巩固与提高2】

已知等差数列15,19,23,27……443,求这个数列的奇数项之和与偶数项之和的差.

## 问题二 等差数列的应用

## 例 1

建筑工地有一批砖,码成如图所示的形状,顶层2块砖,第二层6块砖,第三层10块砖……依次每层都比其上面一层多4块砖,已知最下层有2106块砖,问中间一层有多少块砖?这堆砖共有多少块?



例1图

## 【分析】

项数 $= (2106-2)\div 4+1=527$ ,因此,层数为奇数,中间项为 $(2+2106)\div 2=1054$ ,数列和 $=$ 中间项 $\times$ 项数 $=1054\times 527=555458$ ,所以中间一层有1054块砖,这堆砖共有555458块.

## 例 2

体育课上老师指挥大家排成一排,冬冬站排头,阿奇站排尾,从排头到排尾依次报数.如果冬冬报17,阿奇报150,每位同学报的数都比前一位多7,那么队伍一共有多少人?

**【分析】**

首项=17,末项=150,公差=7,项数 $= (150-17) \div 7 + 1 = 20$ ,所以一共有20人.

**例 3**

求从1到2000的自然数中,所有偶数之和与所有奇数之和的差.

**【分析】**

(方法1)可以看出,2,4,6,⋯,2000是一个公差为2的等差数列,1,3,5,⋯,1999也是一个公差为2的等差数列,且项数均为1000,所以原式 $= (2+2000) \times 1000 \div 2 - (1+1999) \times 1000 \div 2 = 1000$ .

(方法2)注意到这两个等差数列的项数相等,公差相等,且对应项差1,所以1000项就差了1000个1,即原式 $= 1000 \times 1 = 1000$ .

**例 4**

在一次数学竞赛中,获得一等奖的八名同学的分数恰好构成一个等差数列,总分为656,且第一名的分数超过了90分(满分为100分).已知同学们的分数都是整数,那么第三名的分数是多少?

**【分析】**

他们的平均分为 $656 \div 8 = 82$ , $82+1, 82+2, 82+3, \dots$ 都有可能成为第四名,相对应的,公差分别为 $1 \times 2 = 2, 2 \times 2 = 4, 3 \times 2 = 6, \dots$ 若第四名为 $82+1 = 83$ 分,则第一名为 $83 + (4-1) \times 2 = 89$ (分),不符合题意,舍;

若第四名为 $82+2 = 84$ 分,则第一名为 $84 + (4-1) \times 4 = 96$ (分),符合题意;

若第四名为 $82+3 = 85$ 分,则第一名为 $85 + (4-1) \times 6 = 103$ (分),不符合题意.

因此,第四名为84分,公差为4,所以第三名为 $84+4 = 88$ (分).

**【巩固与提高1】**

有100个连续自然数(按从小到大的顺序排列),它们的和是8450,取出其中第1个、第3个、⋯、第99个,再把剩下的50个数相加,结果是多少?

**【巩固与提高2】**

小王和小高同时开始工作.小王第一个月拿到1000元工资,以后每个月多拿到60元;小高第一个月得到500元工资,以后每个月多拿到45元.两人工作一年后,所得的工资总数相差多少元?

## 本讲小结

### 1. 等差数列的定义

若干个数组成一列,称为数列.数列中的每一个数称为一项,其中第一项称为首项,最后一项称为末项,数列中数的个数称为项数.

从第二项开始,后一项与其相邻的前一项之差都相等的数列称为等差数列,后一项与前一项的差称为公差.例如:等差数列 3、6、9、 $\dots$ 、96,这是一个首项为 3、末项为 96、项数为 32、公差为 3 的数列.

### 2. 等差数列的相关公式

通项公式:末项=首项+(项数-1) $\times$ 公差

项数公式:项数=(末项-首项) $\div$ 公差+1

求和公式:总和=(首项+末项) $\times$ 项数 $\div$ 2=平均数 $\times$ 项数

平均数公式:平均数=(首项+末项) $\div$ 2

计算

几何

综合问题

应用题

趣味数学

综合训练

参考答案与分析

## 本章测试

计算:

1  $25+53+75+78+47$

2  $91+90+88+92+93+84+85+95+97$

3  $9999+4+97+998+95+7$