



普通高等学校“十三五”数字化建设规划教材
大学数学基础教材

新经度

高等数学

GAODENG SHUXUE

上

郝志峰 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



普通高等学校“十三五”数字化建设规划教材

新经度 大学 数学 基础 教材

高等数学

(上)

郝志峰 编 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书主要面向地方应用型本科院校,涉及内容的深广度符合最新的高等学校理工科、经管类专业对该课程的教学基本要求(2014),也能达到全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的相应要求。内容包括:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数、微分方程。

本书以学生为本,力求通俗易懂、深入浅出,激发学生的兴趣;注意定理、定义、性质、例题的说明解释,及时归纳总结诸多理解、分析高等数学的理论与方法,强化解决问题和数学建模的能力;适应翻转课堂、慕课、微课等新时期的教学改革。为满足学习者的需求,公式、标号详尽便于查阅,精心设计习题,并附解答与证明提示。

本书适宜作为普通高等学校非数学理工科及经济、管理相关专业“高等数学”课程的教材或参考书,也可供需要高等数学知识的各类科技工作者学习或参考,并为准备考研的非数学专业学生及其他读者服务。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/郝志峰编著. —北京:北京大学出版社, 2018. 7

ISBN 978-7-301-29508-3

I. ①高… II. ①郝… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 094971 号

书 名 高等数学(上)

GAODENG SHUXUE

著作责任者 郝志峰 编著

责任编辑 曾婉婷

标准书号 ISBN 978-7-301-29508-3

出版发行 北京大学出版社

地 址 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址 <http://www.pup.cn>

电子信箱 zpup@pup.cn

新浪微博 @北京大学出版社

电 话 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62754819

印 刷 者 长沙超峰印刷有限公司

经 销 者 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 13 印张 322 千字

2018 年 7 月第 1 版 2018 年 7 月第 1 次印刷

定 价 42.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

图书如有印装质量问题,请与出版部联系,电话:010-62756370

本书配套云资源使用说明

本书配有网络云资源,资源类型包括:知识结构、名家简介、微课视频、演示动画和历年考研真题.

一、资源说明

1. 知识结构:对每章知识点以框图形式做系统总结,让学生提前了解本章讲述的大概内容,方便学生学完本章内容后做自我测评,加深学生对本章内容的理解.
2. 名家简介:提供相关科学家的简介,从而提高学生对数学的认识,以及学习数学的兴趣.
3. 微课视频:针对重要知识点,本书主编郝志峰教授进行系统讲解.视频短小精练,方便学生学习,提高效率.
4. 演示动画:针对重要知识点、抽象内容,提供相关演示动画,便于学生理解和掌握.
5. 历年考研真题:提供一些历年的考研试题,对学有余力的学生提供考研帮助.

二、使用方法

1. 打开微信的“扫一扫”功能,扫描关注公众号(公众号二维码见封底).
2. 点击公众号页面内的“激活课程”.
3. 刮开激活码涂层,扫描激活云资源(激活码见封底).
4. 激活成功后,扫描书中的二维码,即可直接访问对应的云资源.

注:1. 每本书的激活码都是唯一的,不能重复激活使用.

2. 非正版图书无法使用本书配套云资源.

总序

数学是人一生中学得最多的一门功课。中小学里就已开设了很多数学课程，涉及算术、平面几何、三角、代数、立体几何、解析几何等众多科目，看起来洋洋大观、琳琅满目，但均属于初等数学的范畴，实际上只能用来解决一些相对简单的问题，面对现实世界中一些复杂的情况则往往无能为力。正因为如此，在大学学习阶段，专攻数学专业的学生不必说了，就是对于广大非数学专业的大学生，也都必须选学一些数学基础课程，花相当多的时间和精力学习高等数学，这就对非数学专业的大学数学基础教材提出了迫切的需求。

这些年来，各种大学数学基础教材已经林林总总地出版了许多，但平心而论，除少数精品以外，大多均偏于雷同，难以使人满意。而学习数学这门学科，关键又在理解与熟练，同一类型的教材只需精读一本好的就足够了。这样，精选并推出一些优秀的大学数学基础教材，就理所当然地成为编辑出版这一丛书的宗旨。

大学数学基础课程的名目并不多，所涵盖的内容又大体上相似，但教材的编写不仅仅是材料的堆积和梳理，更体现编写者的教学思想和理念。同一门课程，应该鼓励有不同风格的教材来诠释和体现；针对不同程度的教学对象，也应该有不同层次的教材来使用和适应。特别是，大学非数学专业是一个相当广泛的概念，对分属工程类、财经管理类、医药类、农林类、社科类甚至文史类的众多大学生，不分青红皂白、一刀切地采用统一的数学教材进行教学，很难密切联系有关专业的实际，很难充分针对有关专业的迫切需要和特殊要求，是不值得提倡的。相反，通过教材编写者和相应专业工作者的密切结合和协作，针对该专业的特点编写出来的教材，才能特色鲜明、有血有肉，才能深受欢迎，并产生重要而深远的影响。这是专业类大学数学基础教材应有的定位和标准，也是大家的迫切期望，但却是当前明显的短板，因而使我们对这套丛书可以大有作为有了足够的信心和依据。

说得更远一些，我们一些教师往往把数学看成是定义、公式、定理及证明的堆积，千方百计地要把这些知识灌输到学生头脑中去，但却忘记了有关数学最根本的三件事。一是数学知识的来龙去脉——从哪儿来，又可以到哪儿去。割断数学与生动活泼的现实世界的血肉联系，学生就不会有学习数学持续的积极性。二是数学的精神实质和思想方法。只讲知识，不讲精神；只讲技巧，不讲思想，学生就不可能学到数学的精髓，不能对数学有真正的领悟。三是数

学的人文内涵. 数学在人类认识世界和改造世界的过程中起着关键的、不可代替的作用, 是人类文明的坚实基础和重要支柱. 不自觉地接受数学文化的熏陶, 是不可能真正走近数学、了解数学、领悟数学并热爱数学的. 在数学教学中抓住了上面这三点, 就抓住了数学的灵魂, 学生对数学的学习就一定会更有成效. 但客观地说, 现有的大学数学基础教材, 能够真正体现这三方面要求的, 恐怕为数不多. 这一现实为大学数学基础教材的编写提供了广阔的发展空间, 很多探索有待进行, 很多经验有待总结, 可以说是任重而道远. 从这个意义上说, 由北京大学出版社推出的这套丛书实际上已经为一批有特色、高品质的大学数学基础教材的面世搭建了一个很好的平台, 特别值得称道, 也相信一定会得到各方面广泛而有力的支持.

特为之序.

李大潜

2015年1月28日



前 言

在科学技术飞跃发展的今天,人们越来越意识到高等数学(微积分)的重要.高等数学不仅在各领域中有广泛的应用,而且在培养具有创新思维、创业能力的人才方面,更具有重要作用.因此,高等数学课程与教材在大学本科教学中占有重要的地位,在理工科、经管类各专业的国内外专业认证中,是培养目标、毕业要求和课程体系中最基础的一个环节;同时,也是STEAM(Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics)教育、创客教育中重要的一门主干课程.本书正是在这一国内外教育教学改革的大背景下,积极适应教育部等三部委发布的《关于引导部分地方普通本科高校向应用型转变的指导意见》,针对地方院校创新创业应用型、技术技能型人才培养模式改革的需要,通过“高等数学”课程落实人才培养方案和课程体系的综合改革;同时,主动满足翻转课堂、微课和慕课等新时期的教学需要,提高学生的综合能力,更好地适应21世纪创新创业型人才和卓越计划对工程师教育、经管类教育的需求.

本书涉及内容的深广度符合最新的高等学校理工科、经管类各专业对该课程的教学基本要求(2014),也能达到全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的相应要求.一方面,综合地方应用型本科院校的实际情况,结合编者自身多年的教学实践与改革成果.由编者负责的“大学数学网络教育的研究与实践”获2005年国家优秀教学成果二等奖,“大学数学立体化教育资源与集成系统的研究和实践”获2009年国家优秀教学成果二等奖,本书为这两个项目的研究成果.另一方面,通过参与“我国大学数学课程建设与教学改革六十年课题组”的工作,理解并融入了六十多年来高等数学课程变革的精华.编写时比较注重教学法,并注意结合长期执教与研究这一课程教学的经验;基于对时代发展与高等教育大众化进程对高等数学课程提出新挑战的认识,在内容的展开、描述中,比较注意激发学生的学习兴趣,力求符合大多数学习者的认识规律.

全书共分十二章:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数、微分方程.

本书有如下特点:

一是可读性强.全书力求做到内容丰富、通俗易懂,力争突出每章教学重点,注重基本概

念、基本理论、基本运算的讲解,便于学生理解和掌握.在内容安排上,详略得当、循序渐进,逻辑严谨清晰,及时将一些性质(或结论、定理等)进行适当的归纳集中,并对部分性质加以证明,以便于在教学过程中生动活泼地详细讲解.

二是以学生为本.全书以学生的学习为中心,力求做到深入浅出、清楚易懂,激发学生的学习兴趣,注重定义、定理、性质、例题的说明解释,及时归纳总结诸多理解、分析高等数学的步骤和学习方法,在渗透数学思想和方法的同时,着力培养学生应用数学方法解决问题的能力,强化应用意识和数学建模能力的引导.

三是突出重点.全书适合本科生学习,并适合其他需要学习高等数学课程的各类人员.书中所有例题都经严格挑选,具有典型性、代表性、灵活性.在例题解答中,十分注重分析思路、拓宽思维,帮助学生更好地掌握解题要领和规律;对解题做适当说明和引申,注重理论联系实际,激发学生深入思考;例题和练习题的设计增强了层次感,鼓励学生通过跨越进步的台阶,勇于挑战.

本书由郝志峰编著.苏文华、赵子平构思并设计了全书在线课程教学资源的结构与配置,吴浪、邓之豪编辑了教学资源内容,并编写了相关动画文字材料,余燕、沈辉参与了动画制作及教学资源的信息化实现,袁晓辉、范军怀审查了全书配套在线课程的教学资源,苏文春、苏娟提供了版式和装帧设计方案.在此一并致谢.衷心感谢教育部数学与统计学教学指导委员会原主任委员李大潜院士为本系列教材欣然题序,并对内容的组织和编排做了详细的指导;尤其是其对数学知识、能力和素养相互统一的期盼,都为本套教材的编写明确了方向.

尽管编者有力求把此书编好的愿望,但限于客观条件与自身学识和能力的不足,此书中难免有不妥之处,恳请同行专家和读者们批评指正.若奉献给广大读者的这套高等数学教材能让读者有所收获,将感到莫大的荣幸.

编者

于佛山

2018年1月



目 录

第一章 函数与极限/	1
§ 1.1 函数	2
§ 1.2 初等函数	9
§ 1.3 极限概念	15
§ 1.4 无穷小量与无穷大量	22
§ 1.5 极限运算法则	27
§ 1.6 两个重要极限	29
§ 1.7 函数的连续性	32
习题一	38
第二章 导数与微分/	41
§ 2.1 导数的概念	42
§ 2.2 求导法则	49
§ 2.3 初等函数的求导	53
§ 2.4 隐函数求导	57
§ 2.5 高阶导数	61
§ 2.6 微分	64
习题二	70
第三章 中值定理与导数的应用/	73
§ 3.1 中值定理	74
§ 3.2 罗必塔法则	79
§ 3.3 函数的单调性	84
§ 3.4 函数的极值	85
§ 3.5 函数的最值	88

§ 3.6 曲线的凹向与拐点	90
§ 3.7 函数图形的描绘	93
§ 3.8 曲率	95
§ 3.9 方程的近似解	100
习题三	103
第四章 不定积分/	106
§ 4.1 原函数与不定积分的概念	107
§ 4.2 直接积分法	111
§ 4.3 换元积分法	113
§ 4.4 分部积分法	119
§ 4.5 特殊类型的积分	123
§ 4.6 积分表的使用	129
习题四	131
第五章 定积分/	133
§ 5.1 举例	134
§ 5.2 定积分的定义	136
§ 5.3 定积分的性质	138
§ 5.4 牛顿-莱布尼兹公式	139
§ 5.5 定积分的换元积分法	142
§ 5.6 定积分的分部积分法	144
§ 5.7 定积分的近似计算	145
§ 5.8 广义积分	148
习题五	153
第六章 定积分的应用/	155
§ 6.1 定积分的元素法	156
§ 6.2 平面图形的面积	156
§ 6.3 空间立体的体积	159
§ 6.4 平面曲线的弧长	162

§ 6.5 功和水压力	163
§ 6.6 平均值	166
习题六	168
附录 I 几种常用的曲线/	170
附录 II 积分表/	173
附录 III 二阶和三阶行列式简介/	183
习题参考答案 /	186
参考文献 /	195
历年考研真题 /	196



知识框图

第一章

函数与极限

由于社会和科学发展的需要,到了17世纪,对物体运动的研究成为自然科学的中心问题.与之相适应,数学在经历了两千多年的发展之后进入了一个被称为“高等数学时期”的新时代.这一时代集中的特点是超越了希腊数学传统的观点,认识到“数”的研究比“形”更重要,以积极的态度开展对“无限”的研究,由常量数学发展为变量数学,微积分的创立更是这一时期最突出的成就之一.微积分研究的基本对象是定义在实数集上的函数.

本章将简要地介绍高等数学的一些基本概念,其中重点介绍极限的概念、性质和运算法则,以及与极限概念密切相关的,并且在微积分运算中起重要作用的无穷小量的概念和性质.此外,还将给出两个极其重要的极限.随后,运用极限的概念引入函数的连续性概念,它是客观世界中广泛存在的连续变化这一现象的数学描述.极限是研究函数的一种基本工具,极限的思想方法贯穿于高等数学的始终,而连续性则是函数的一种重要属性.因此,本章内容是整个微积分学的基础.

§ 1.1 函 数

一、函数的概念

定义 1 设 x 和 y 为取值于数集的变量,若变量 x 在某一范围内取定一个数值时,变量 y 按照某个法则 f 总有确定的值与它对应,则变量 y 称为变量 x 的函数,记作

$$y = f(x),$$

其中变量 x 称为自变量,变量 y 称为因变量.

在函数的记号 $y = f(x)$ 中, f 是英文“function”(函数)的第一个字母.

定义 2 当函数 $y = f(x)$ 的自变量 x 取定 x_0 时,因变量 y 有确定的值 y_0 与之对应,则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有定义.使函数 $y = f(x)$ 有定义的一切实数的全体,称为函数的定义域,记作 D .

因变量 y 在 x_0 处确定的值 y_0 称为函数值,记作

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{或} \quad y \Big|_{x=x_0}.$$

函数值的全体称为函数的值域,记作 G .

例如,函数 $y = 3x$, 其定义域 D 为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$.

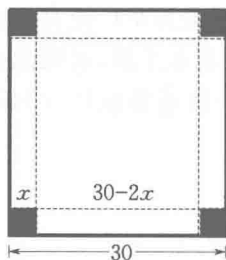


图 1.1

例 1 有一块正方形铁皮,边长为 30 cm. 现从它的四个角各剪去相等的小正方形,制成一个没有盖的容器. 求这容器的容积与被剪去的小正方形边长之间的关系式.

解 如图 1.1 所示,设被剪去的小正方形边长为 x cm,容器的容积为 V cm³. 根据题意我们知道,该容器的高为 x ,底为边长为 $(30 - 2x)$ 的正方形,因此容器的容积等于底面积乘高,即

$$V = x(30 - 2x)^2.$$

因为容积应取正,所以 $0 < x < 15$ (即 V 的定义域).

例 2 如图 1.2 所示,有一条河流(自西向东),河边有相距 130 公里的 A, B 两城. 现从 A 城运货到 B 城正北 15 公里的工厂 C . 已知在河流北岸建有码头 M 和公路 MC , 且水运运费是 3 元/(吨·公里),陆运运费是 5 元/(吨·公里). 记 $|BM| = x$ 公里,求从 A

城运货到码头 M 再到工厂 C 所需每吨运费 y 与 x 的函数关系.

解 因 $|AM| = 130 - x$ (公里), 公路长度为

$$\begin{aligned} |MC| &= \sqrt{|BM|^2 + |BC|^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 225} \text{ (公里)}, \end{aligned}$$

故

$$y = 3(130 - x) + 5\sqrt{x^2 + 225}.$$

该函数定义域为 $0 \leq x \leq 130$.

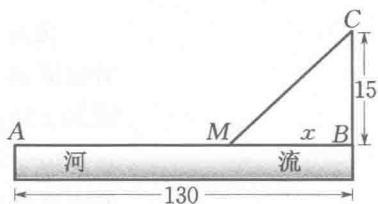


图 1.2

定义 3 若函数 $y = f(x)$ 的自变量取定一数值 x_0 , 因变量只有一个确定值 $f(x_0)$ 与其对应, 则称该函数为单值函数. 否则, 若有多个 (包括无穷多个) 确定值与其对应, 则称该函数为多值函数.

例如, $y = 3x$ 为单值函数, $y = \pm\sqrt{x}$ 为多值函数.

二、函数的表示法

1. 公式法 (解析法)

定义 4 用数学式子直接表示函数自变量与因变量对应关系的方法称为公式法 (解析法).

公式法的优点是简明准确, 方便理论分析与计算, 缺点是不够直观.

定义 5 若函数的对应法则可用自变量 x 的等式 $y = f(x)$ 明显表示, 则称这类函数为显函数; 若函数的对应法则由 x 和 y 之间的方程 $F(x, y) = 0$ 来确定, 则称这类函数为隐函数.

例如, 函数 $y = 2x$, $y = \sin x$ 等是显函数; $e^y + xy = 0$, $x + y^3 - 1 = 0$ 等是隐函数.

若函数的对应法则可用关于参数 t 的两个算式表达, 则称这类

函数为由参数方程所确定的函数, 例如 $\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$ 等.

若函数的对应法则可用按定义域取值不同有不同的表达,

则称这类函数为分段函数, 例如 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \text{ 等.} \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

例 3 ▶ 求函数 $f(x) = 3x$ 在 $x = -1$ 处的函数值.

解 将 $x = -1$ 代入 $3x$ 中进行计算, 得函数值为

$$f(-1) = 3 \times (-1) = -3.$$

例 4 ▶ 求函数 $f(x) = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的函数值.

解 将 $x = \frac{\pi}{4}$ 代入 $\sin x$ 中进行计算, 得函数值为

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 5 ▶ 求函数 $f(x) = 2x$ 在 $x = x_0 + h$ 处的函数值.

解 将 $x = x_0 + h$ 代入 $2x$ 中进行计算, 得函数值为

$$f(x_0 + h) = 2(x_0 + h).$$

定义 8 只要构成函数的两要素(定义域、对应法则)都相同的两个函数就是相等的函数.

例如, 下列三组函数为相等的函数:

例 6 ▶ $y = mx$ ($x \in \mathbf{R}$), $y = ma$ ($a \in \mathbf{R}$) (自变量写法不同, “ \in ”是“属于”的记号).

例 7 ▶ $y = \sin 2x$, $y = 2 \sin x \cos x$ (对应法则形式不同).

例 8 ▶ $y = |x|$, $y = \sqrt{x^2}$ (对应法则形式不同).

四、函数的几何特性

1. 函数的奇偶性

定义 9 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若对 D 中的任一点 x , 恒有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数; 若对 D 中的任一点 x , 恒有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

例 9 ▶ 判定函数 $y = f(x) = x^2$ 的奇偶性.

解 因

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

故 $y = f(x) = x^2$ 为偶函数.

例 10 ▶ 判定函数 $y = f(x) = x^3$ 的奇偶性.

解 因

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x),$$

故 $y = f(x) = x^3$ 为奇函数.

例 11 ▶ 设函数 $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ 都是奇函数, 其函数定义域均为 D , 试证: $f_1(x)f_2(x)$ 为偶函数.

证 设 $F(x) = f_1(x)f_2(x)$, 则

$$\begin{aligned} F(-x) &= f_1(-x)f_2(-x) = [-f_1(x)][-f_2(x)] \\ &= f_1(x)f_2(x) = F(x), \end{aligned}$$

故 $f_1(x)f_2(x)$ 为偶函数.

说明 许多函数是没有奇偶性的, 例如函数 $y = x^2 + x^3$ 就没有奇偶性.

设函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 若 $M(x, f(x))$ 是图形 $y = f(x)$ 上的点, 和它对称于 y 轴的点 $M'(-x, f(x))$ 也在图形上, 可见偶函数的图形关于 y 轴对称(见图 1.5(a)).

设函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 若 $M(x, f(x))$ 是图形 $y = f(x)$ 上的点, 和它对称于原点的点 $M'(-x, -f(x))$ 也在图形上, 可见奇函数的图形关于原点对称(见图 1.5(b)).

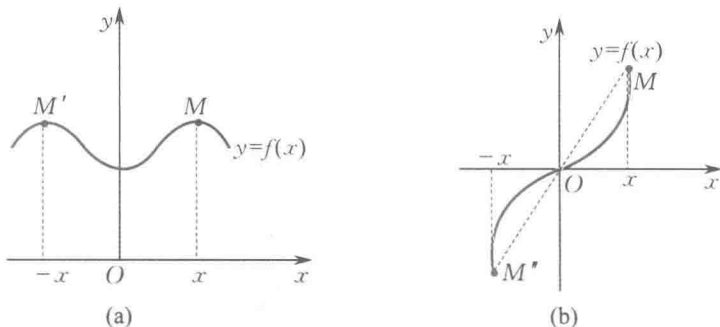


图 1.5

2. 函数的单调性

定义 10 若函数 $y = f(x)$ 在区间 (A, B) 内随着 x 增大而增大, 即当 $A < x_1 < x_2 < B$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (A, B) 内为单调增加函数(见