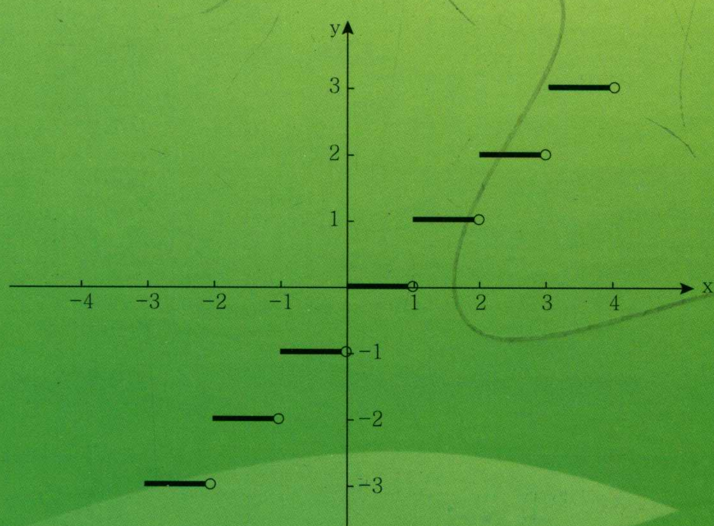
大学数学系列教学丛书
普通高等教育“十三五”规划教材
安徽省“十三五”规划教材

高等数学
（经管类）

范益政　郑婷婷　陈华友　主　编



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

安徽省“十三五”规划教材

大学数学系列教学丛书

高等数学（经管类）

主　编　范益政　郑婷婷　陈华友

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书以安徽大学数学科学学院近十几年多次再版的《高等数学》(经济管理类)为基础，为适应新时代数学教学改革的需要而编写. 书籍结合编者多年来教学实践经验的体会，从内容体系、观点和方法角度等方面进行了有益的创新和改革. 主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数微积分、微分方程初步、差分方程等十章.

本书可以作为地方综合性大学及普通本科学校的经管类专业高等数学课程的教科书，也可供其他有关专业选用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类/范益政，郑婷婷，陈华友主编. —北京：科学出版社，2018. 8
(大学数学系列教学丛书)
普通高等教育"十三五"规划教材·安徽省"十三五"规划教材
ISBN 978-7-03-057495-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①范… ②郑… ③陈… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 107899 号

责任编辑：张中兴 蒋 芳 梁 清 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：师艳茹 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2018 年 8 月第一次印刷 印张：21 1/2
字数：433 000

定价：54.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

“大学数学系列教学丛书”

经管类编委会名单

FOREWORD / 丛书序言

数学是各门学科的基础, 不仅在自然科学和技术科学中发挥重要作用, 因为"高技术本质上是一种数学技术", 而且在数量化趋势日益明显的大数据背景下, 在经济管理和人文社科等领域也发挥着不可替代的作用. 大学本科是数学知识学习、实践应用和创新能力培养的基础阶段. 如何提高数学素养和培养创新能力是当前大学数学教育所关心的核心问题.

教材建设是大学数学教育改革的重要内容. 基于此, 我们编写此套大学数学系列教学丛书. 该丛书根据使用对象的不同、教材内容的覆盖面和难易度, 分为两类: 一类是主要针对理工类学生使用的《高等数学 (上册)》、《高等数学 (下册)》、《线性代数》、《概率论与数理统计》, 另一类是针对经管类学生使用的《高等数学 (经管类)》、《线性代数 (经管类)》和《概率论与数理统计 (经管类)》.

上述丛书所覆盖的内容早在三百多年前就已创立. 例如, 牛顿和莱布尼茨在 1670 年创立了微积分, 这是高等数学的主要内容. 凯莱在 1857 年引入矩阵概念, 佩亚诺在 1888 年定义了向量空间和线性映射, 这些都是线性代数中最基本的概念. 惠更斯在 1657 年就发表了关于概率论的论文, 塑造了概率论的雏形, 而统计理论的产生则是依赖于 18 世纪概率论所取得的进展. 当然, 经过后来的数学家的努力, 这些理论已形成严谨完善的体系, 成为现代数学的基石.

尽管如此, 能够很好领会这些理论的思想本质并不是一件容易的事! 例如, 微积分中关于极限的 ε-δ 语言、线性代数中的向量空间、概率论中的随机变量等. 这些都需要经过反复练习和不断揣摩, 方能提升数学思维, 理解其中精髓.

国内外关于大学数学方面的教材数不胜数. 针对于不同高校、不同专业的学生, 这些教材各有千秋. 既然如此, 我们为什么还要继续编写这样一套系列教材呢?

我们最初的设想是要编写一套适合安徽大学理工类、经管类等学生使用的大学数学系列教材. 我校目前使用的教材由于编写时间较早、版次更新不及时, 部分例题和习题已显陈旧. 另一方面, 由于新的高考改革方案即将在全国实施, 未来

高中文理不分科将直接影响到大学数学教学. 因此, 我们有必要在内容体系上进行调整.

在教材的编写以及与科学出版社的沟通过程中, 我们发现, 真正适合安徽大学等地方综合性大学及普通本科学校的规划教材并不多见. 安徽大学作为安徽省属唯一的双一流学科建设高校, 本科专业涉及理学、工学、文学、历史学、哲学、经济学、法学、管理学、教育学、艺术学等 10 个门类, 数学学科在全省发挥带头示范作用, 所以我们有责任编写一套大学数学系列教学丛书, 尝试在全省范围内推动大学数学教学和改革工作.

本套系列教材涵盖了教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会规定的关于高等数学、线性代数、概率论与数理统计的基本内容, 吸收了国内外优秀教材的优点, 并结合安徽大学的大学数学教学的实际情况和基本要求, 总结了诸位老师多年的教学经验, 为地方综合性大学及普通本科学校的理工类和经管类等专业学生所编写.

本套系列教材力求简洁易懂、脉络清晰. 在这套教材中, 我们把重点放在基本概念和基本定理上, 而不会去面面俱到、不厌其烦地对概念和定理进行注解、对例题充满技巧地进行演示, 使教材成为一个无所不能、大而全的产物. 我们之所以这样做是为了让学生避免因为细枝末节而未能窥见这门课程的主干和全貌, 误解了课程的本质内涵, 从而未能真正了解课程的精髓. 例如, 在线性代数中, 以矩阵这一具体对象作为全书首章内容, 并贯穿全书始末, 建立抽象内容与具体对象的联系, 让学生逐渐了解这门课程的思维方式.

另一方面, 本套系列教材突出与高中数学教学和大学各专业间的密切联系. 例如, 在高等数学中, 实现了与中学数学的衔接, 增加了反三角函数、复数等现行中学数学中弱化的知识点, 对高中学生已熟知的导数公式、导数应用等内容进行简洁处理, 以极限为出发点引入微积分, 并过渡到抽象环节和严格定义. 在每章最后一节增加应用微积分解决理工或经管领域实际问题的案例, 突出了数学建模思想, 以培养学生应用数学能力.

以上就是我们编写这套系列教材的动机和思路. 这仅是以管窥豹, 一隅之见, 或失偏颇, 还请各位专家和读者提出宝贵建议和意见, 以便在教材再版中修订和完善.

PREFACE / 前言

数学是自然科学中的一种基本语言, 是形成人类文化的主要力量. 随着计算机科学与技术的发展, 数学从科学的幕后走向台前, 数字化深入到人类几乎所有的活动, 人类历史进入全新的信息时代. 不仅科学家和工程师需要数学, 未来更多的行业工作人员需要在工作中大量运用以数学为基础的工具、设备和技术. 因此, 在某种程度上可以说, 信息时代就是数学的时代.

《高等数学 (经管类)》作为高等院校经济、管理等相关专业的专业基础课程, 是未来学习专业知识的强有力工具. 本教材不仅仅是介绍微积分的基本概念与方法, 更重要的是传授现代数学思想, 培养科学思维和创新意识, 提高应用数学能力. 本教材能满足多样化分层分类人才培养方式的需求, 特色鲜明.

1. 实现了与中学数学的有机衔接. 一是通过灵活的方式, 增补了诸如极坐标、反三角函数、复数等现行中学数学中弱化的知识点; 二是对中学生已经熟知的诸如导数公式、导数应用等内容进行简洁处理, 以极限为出发点进入微积分, 充分利用大学新生极高的学习热情和强烈的求知欲望巧妙地过渡到抽象环节.

2. 抓住本质, 突出重点. 本书强调微积分的基本思想和基本方法, 立足于微积分的基本理论和基本技能, 把主要篇幅集中在最基本、最主要的内容上, 真正使读者学深学透. 从应用实例出发引入抽象的数学概念, 充分体现问题驱动的数学教育理念, 引人入胜.

3. 突出数学建模思想, 培养学生应用数学能力. 本教材每章节结尾部分嵌入微积分解决经管领域实际问题的案例, 突出数学建模思想, 使学生开卷有益, 提高学习兴趣, 学习目的更明确. 本书可作为学生尽早尽快了解数学建模思想的入门参考书之一.

4. 定位准确, 满足专业需求. 本教材根据经管领域不同专业对数学的不同需求, 在编写时充分考虑理论与应用、经典与现代、知识与能力等内容的定位, 使其符合学生的需要与实际, 并针对学生已有的基础和将来专业面临的方向突出应用,

同时留给学生适度的自学和研究空间.

本书在编写上力求简明扼要, 通俗易懂, 同时保证内容上的系统性和内在规律性. 在本书编写的过程中, 我们参阅了国内外许多教材, 在此恕不一一列出, 谨致以衷心的感谢!

限于编者水平, 书中难免有疏漏或不妥之处, 敬请读者批评指正.

编 者

2018 年 1 月

CONTENTS / 目录

Chapter 1 第1章 函数

函数是高等数学的主要研究对象. 本章主要介绍集合和函数的概念、函数的几种特性、复合函数和反函数的概念、基本初等函数和初等函数的概念. 本章内容可视为初等数学中相应内容的延伸与拓展, 作为本书的预备知识.

1.1 实数集

一、集合

"集合"是数学中的一个基本概念, 它在数学中发挥着十分重要的作用. 事实上, 给"集合"下个精确的定义也不是件易事, 姑且以具体的例子说明. 例如, 2018 年 2 月 16 日在合肥市出生的人, 某厂家 2017 年生产的节能轿车, 全体有理数等等. 它们组成的集体都是集合.

一般地说, **集合**是具有某种特定属性的事物全体, 或是某些研究对象的汇总. 称构成集合的事物或对象为该集合的**元素**. 集合一般用大写字母表示, 其元素用小写字母表示, 元素 a 在集合 A 中, 记作

$$a \in A,$$

读作 a 属于 A; 元素 a 不在集合 A 中, 记作

$$a \notin A,$$

读作 a 不属于 A.

本书主要关注的集合为数集, 亦即该集合中的元素都是数. 常见的数集有正整数集 $\mathbb{N}^+$, 自然数集 $\mathbb{N}$, 整数集 $\mathbb{Z}$, 有理数集 $\mathbb{Q}$, 实数集 $\mathbb{R}$.

若集合 A 的元素都在集合 B 中, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$, 读作 A 包含于 B. 例如, $\mathbb{N}^+ \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

如果两个集合 A 与 B 具有相互包含关系, 即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A=B$. 例如, 集合 A 中仅有两个元素, 分别为 1 和 2, 集合 B 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的所有实根, 则 $A=B$.

不含任何元素的集合为空集, 记作 $\varnothing$. 例如, 集合 C 表示方程 $x^2+1=0$ 的所有实数根, 则 C 就是空集. 约定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集. 若 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的一个真子集, 例如上文中提到的有理数集 $\mathbb{Q}$ 就是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个真子集.

集合有两种表示方法, 即枚举法和描述法. 如果一个集合只有有限个元素, 可用枚举法表示, 即在花括号内按任意顺序列出集合的所有元素, 例如集合 A 有 n 个元素, 分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

若集合中的元素无法一一枚举或不必一一枚举, 可用描述法表示, 即在花括号左边写出元素的一般符号, 右边写出元素满足的属性, 中间用竖线或冒号隔开. 例如, A 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的所有实根, 则

$$A=\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2-3x+2=0\right\}=\left\{x \in \mathbb{R}: x^2-3x+2=0\right\}.$$

二、实数轴

众所周知, 实数是由有理数和无理数组成. 有理数可以表示成既约分数 $\dfrac{p}{q}$, 而无理数不能表示成既约分数 $\dfrac{p}{q}$, 其中 $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+$.

设有一条水平直线, 在这条直线上取定一个点 O, 称为原点. 习惯上规定原点 O 向右的方向为正方向, 再规定一个单位长度. 这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为**实数轴**, 简称**数轴**, 如图 1.1.1.

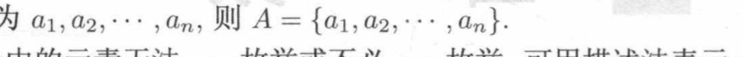


图 1.1.1

任给一个实数 a, 在数轴上能找到唯一一点与之对应; 反之, 数轴上任何一点也唯一对应一个实数. 正因为如此, 通常把数轴上的点和实数不加区别, 这样实数 a 也有 "几何" 意义了.

三、绝对值

一个实数 a 的绝对值, 记为 $|a|$, 定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

实数 a 的绝对值 $|a|$ 表示数轴上点 a 与原点之间的距离. 运用绝对值的定义, 可以证明绝对值及其运算有如下基本性质: 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

(1) $|a| = |-a| \geqslant 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

(2) $|a| = \sqrt{a^2}$;

(3) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

(4) 若 $b > 0$, 则 $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$; 若 $b \geqslant 0$, 则 $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$;

(5) $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$;

(6) $|ab| = |a|\,|b|$;

(7) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, 其中 $b \neq 0$.

四、区间与邻域

设 a, b 为实数, $a < b$, 数集 $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ 称为**开区间**, 记作 (a,b), 其中 a, b 分别称为开区间 (a,b) 的左、右端点. 注意 $a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$. 数集 $\{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**, 记作 $[a,b]$, 其中 a, b 分别称为闭区间 $[a,b]$ 的左、右端点. 注意 $a \in [a,b]$, $b \in [a,b]$. 当闭区间 $[a,b]$ 的左、右端点相等时, $[a,a] = \{a\}$.

类似地, 记 $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$, $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\}$, 称 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 均为**半开半闭区间**.

以上四类区间均是有限区间, 此外还有无限区间的概念. 引入正无穷大 “$+\infty$” 和负无穷大 “$-\infty$” 记号, 定义 $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant a\}$, $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$, $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant b\}$, $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$.

上述八类区间可以在数轴上直观地表示出来, 见图 1.1.2.

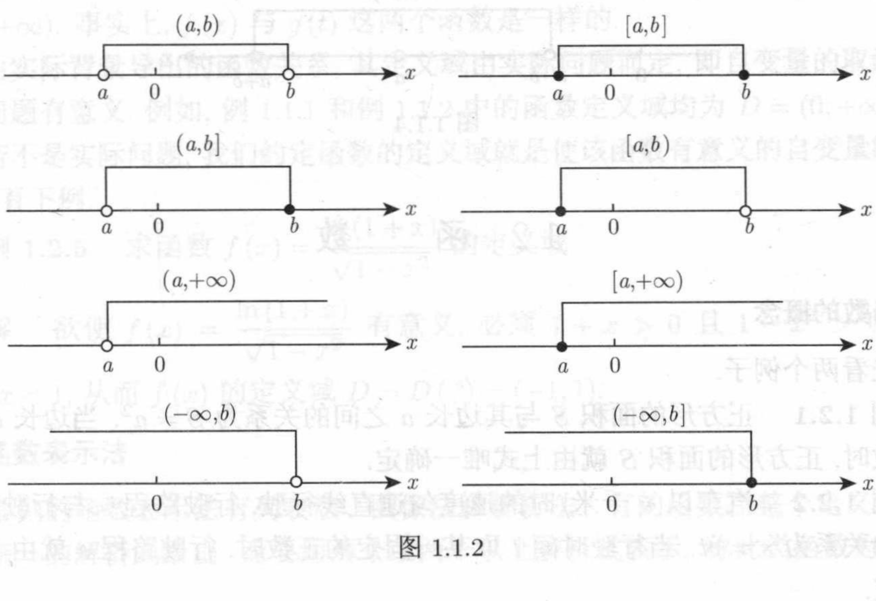


图 1.1.2

实数集 $\mathbb{R}$ 记为 $(-\infty,+\infty)$, 即 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.

邻域也是一个常用的概念. 设 $a\in\mathbb{R}$, δ 是个正实数. 称数集

$$\{x\in\mathbb{R}\,|-\delta<x-a<\delta\}=\{x\in\mathbb{R}\,||x-a|<\delta\}$$

为点 a 的 δ-邻域, 记为 $U(a,\delta)$. 称 a 为 $U(a,\delta)$ 的中心, δ 为 $U(a,\delta)$ 的半径.

易见 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$, 如图 1.1.3.

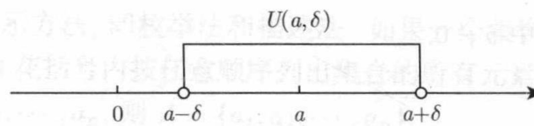


图 1.1.3

当把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉, 得到

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\in\mathbb{R}\,|-\delta<x-a<+\delta,x\neq a\}=\{x\in\mathbb{R}\,|0<|x-a|<\delta\},$$

称 $\mathring{U}(a,\delta)$ 为点 a 的去心 (空心)δ-邻域. 注意到

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\bigcup(a,a+\delta),$$

其中 $(a-\delta,a)$ 与 $(a,a+\delta)$ 分别称为点 a 的左、右 δ-邻域, $\mathring{U}(a,\delta)$ 不再是一个区间, 如图 1.1.4 所示.

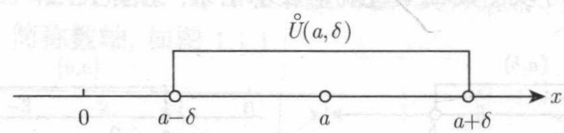


图 1.1.4

1.2　函　数

一、函数的概念

先看两个例子.

例 1.2.1　正方形的面积 S 与其边长 a 之间的关系为 $S=a^2$. 当边长 a 取任一正数时, 正方形的面积 S 就由上式唯一确定.

例 1.2.2　汽车以 v 千米/时的速度匀速直线行驶, 行驶路程 s 与行驶时间 t 之间的关系为 $s=vt$. 当行驶时间 t 取某一固定的正数时, 行驶路程 s 就由上式唯一确定.

以上两个实例都表达了两个变量之间的相互依赖关系, 即对应法则, 当其中一个变量 (例如例 1.2.1 中的 a) 在一定范围内任意取定一个数值时, 另一个变量 (例如例 1.2.1 中的 S) 按照这种对应法则就有唯一确定的值与之对应. 由此, 我们给出函数的概念.

定义 1.2.1 设 D, R 是两个数集. 若对于每个 $x \in D$, 按照某种对应法则 f, 在 R 内都存在唯一的数 y 与 x 对应, 则称 $f: D \to R$ 为集合 D 到 R 的**函数**, 记作 $y = f(x)$. 数集 D 称为该函数的**定义域**, 记为 $D(f)$, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**. 当 x 取遍数集 D 时, 对应的 y 值全体组成的数集

$$R(f) = \{y \,|\, y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**.

函数 $y = f(x)$ 中的 "f" 表示函数关系中的**对应法则**, 即对于 $x \in D(f)$, 按对应法则 f, 有唯一确定的 y 值与之对应.

例 1.2.3 若 $f(x) = x^3$, 则

$$f(2) = 2^3 = 8, \quad f(a) = a^3,$$
$$f(t+1) = (t+1)^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1, \quad f(f(t)) = (t^3)^3 = t^9.$$

若两个函数有相同的定义域, 且有完全相同的对应法则, 尽管两个函数的表现方式不同, 两者本质上是相同的, 看下例.

例 1.2.4 $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in D(f) = (-\infty, +\infty)$; $g(t) = |t|$, $t \in D(g) = (-\infty, +\infty)$. 事实上, $f(x)$ 与 $g(t)$ 这两个函数是一样的.

由实际背景导出的函数关系, 其定义域由实际问题而定, 即自变量的取法要使实际问题有意义. 例如, 例 1.1.1 和例 1.1.2 中的函数定义域均为 $D = (0, +\infty)$.

若不是实际问题, 我们约定函数的定义域就是使该函数有意义的自变量的取值全体, 看下例.

例 1.2.5 求函数 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域.

解 欲使 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$ 有意义, 必须 $1 + x > 0$ 且 $1 - x^2 > 0$, 解得 $-1 < x < 1$, 从而 $f(x)$ 的定义域 $D = D(f) = (-1, 1)$. □

二、函数表示法

常见的函数表示法有列表法、图像法和解析法. 有的函数在整个定义域中不能用统一的解析式给出, 而要用两个或两个以上解析式表示, 称此类函数为 "分段函数".

例 1.2.6　函数 $y=f(x)$ 如下:

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R(f)=\{-1,0,1\}$. 此函数称为**符号函数**. 其图像如图 1.2.1.

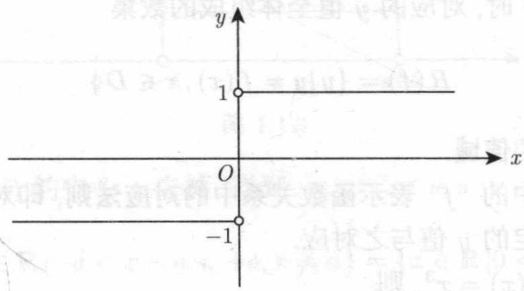


图 1.2.1

例 1.2.7　设 x 为任一实数, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如

$$\left[\frac{1}{2}\right]=0,\quad [0]=0,\quad \left[-\frac{1}{2}\right]=-1,\quad [1.35]=1.$$

将 x 视为自变量, 则 $y=[x]$ 是自变量 x 的函数, 称为**取整函数**. 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $\mathbb{Z}$, 其图像如图 1.2.2.

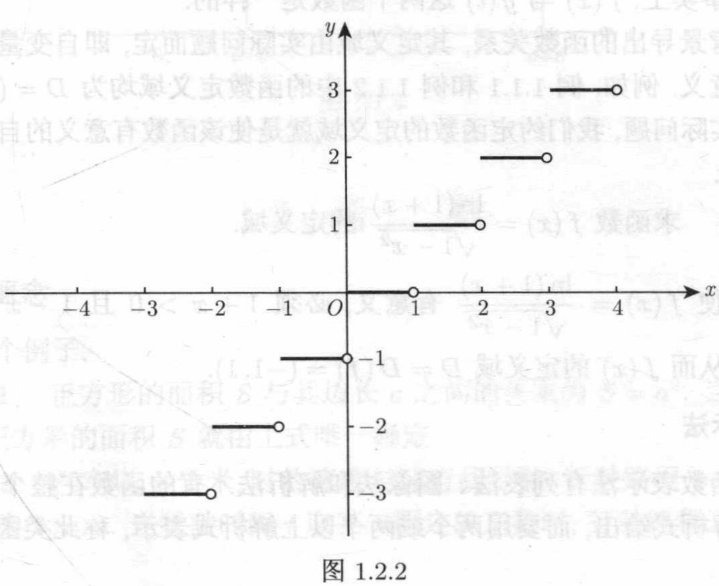


图 1.2.2