普通高等教育“十五”国家级规划教材

博雅®

21世纪物理规划教材

基础课系列

3rd edition

数学物理方法（第三版）

Methods of Mathematical Physics

吴崇试 高春媛 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪物理规划教材

基础课系列

数学物理方法（第三版）

Methods of Mathematical Physics

吴崇试　高春媛　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

数学物理方法 / 吴崇试，高春媛编著. -- 3 版. —北京：北京大学出版社，2019. 5
ISBN 978-7-301-30280-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①吴… ②高… Ⅲ. ①数学物理方法 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 034250 号

书　　名	数学物理方法（第三版） SHUXUE WULI FANGFA（DI-SAN BAN）
著作责任者	吴崇试　高春媛　编著
责 任 编 辑	尹照原
标 准 书 号	ISBN 978-7-301-30280-4
出 版 发 行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn
电 子 信 箱	zpup@pup.cn
新 浪 微 博	@ 北京大学出版社
电　　话	邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62752021
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	787 毫米 × 960 毫米　16 开本　26 印张　601 千字
	2019 年 5 月第 3 版　2019 年 5 月第 1 次印刷
定　　价	68.00 元

第 三 版 序

本书第二版面世以来，已历十余载．现应北京大学出版社之约，以稍有新意的第三版奉献给读者．在修订过程中，高春媛老师认真研读了全书，根据近年来的教学实践，对全书进行了删减增订，使得本书的内容更加严谨，表述更加准确．读者阅读本书，会发现大到定理的证明和例题的增减，小到遣词用字，都展现出不少新意．所有这一切都离不开高春媛老师的创新思维和辛勤努力．

和第二版相比，本书在第三版中除了改正了已发现的错误，并增补和替换了部分习题之外，主要做了如下修改：

1. 为了使内容更加丰富，同时又不使教材篇幅增加太多，本书除了纸质出版物之外，还以网络形式提供课外阅读材料．除了将原书的部分内容 (例如 Riemann ζ 函数和 Möbius 变换，超几何函数，合流超几何函数，涉及 Bessel 函数的常微分方程，习题答案等) 移入外，还增加了笔者发表的教学性论文，以及若干阅读材料．此外，原书中有关 Mathematica 软件的简介也请北京大学物理学院的朱杰同学重新改写，一并移入．

2. 本书前两版中均将 Cauchy 定理拆分为单连通区域与多连通区域两节分别叙述，现合并为一个定理，并从积分围道“变形定理”的角度加以解读．同时增加了 Cauchy 定理的严格证明，供读者参考．

3. 在留数定理及其应用一章中，增加了含三角函数的无穷积分的新解法．这部分内容应该具有原创性，至少在国内教材中所仅见．在这一章中，还增添了“其他形式的积分围道”一节．

4. 原来有关微分算符的定义，虽然也提及需明确应限于相关的定义域，但具体表述比较简略，也容易造成读者忽视，现在做了改进，在定义算符时均明确注明了定义域．

5. 前两版中，部分内容只有理论或方法上的普遍性叙述，例如函数在 ∞ 点的幂级数展开，现在增加了简单的例题．又如，书中在叙述了有关 Sturm-Liouville 方程本征值问题的普遍结论后，现在也补充了例题．值得提到的还有 Γ 函数的应用和圆形区域内 Laplace 方程的边值问题．

6. 书中有少数几章，章末有较大的空白，现在也插入一些短小精干的文字，或是有意思的小问题，或是相关章节内容的补充．这些内容，作为教材中的花絮，供读者浏览．

书中有关文字方面的修改颇多，个别章节的位置也有调整，这些恕不一一列出．修改的目的，是希望内容更加紧凑，表述更加准确，文字更加通顺．至于文中出现的外国人名，为避免不同译法引起的不便，现在均改用原名或英译名．

本书出版过程中，得到了北京大学出版社的大力支持，谨致诚挚的谢意．本书面世以来，也得到同行的指教，使用本书的同学也提出了不少有益的建议，编者借此机会，一并致以谢忱．

吴 崇 试
2019 年春于蓝旗营

第 二 版 序

十分荣幸，本书能入选“十五”国家级教材和北京市高等教育精品教材立项而修订再版. 值此第二版付梓之际，作者感谢教育部、北京市教委、北京大学和北京大学出版社给予的支持. 自从第一版出版以来，同行和读者给予了关心和鼓励，他们指出了书中的错误与不足，并提出了一些修改的具体建议，作者也借此机会向他们致以谢忱.

在本书的第二版中，作了如下的改动:

1. 订正了原书第一版中的错误.

2. 新增加了部分章节，主要有：(计算机软件) Mathematica 中的复变函数 (第 11 章)、两个有用的引理 (3.4 节)、Cauchy 型积分 (3.7 节)、矢量波动方程和矢量 Helmholtz 方程 (15.7 节) 以及连带 Legendre 函数的加法公式(16.10节).

3. 将第 7 章并入第 5 章.

4. 改写了部分内容. 主要有：将复数及其运算规则与复数的几何表示合并为一节，作为复变函数及解析函数的预备知识；将含参量积分的内容拆为两部分，在 Cauchy 型积分 (新增加的 3.7 节) 之后立即讨论了普通的含参量积分的解析性，而在第 4 章 (无穷级数) 中再进一步讨论含参量的反常积分的解析性；在求解整数阶 Bessel 方程的第二解时，删去了直接代入无穷级数的求解法，而将原来第 17 章 (柱函数) 中介绍的方法 (即将 $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 适当组合) 提前；增加了 Γ 函数的围道积分表示，连同 Γ 函数的无穷乘积表示，成为新的一节 (Γ 函数的普遍表达式)；常微分方程的 Green 函数解法，原按初值问题与边值问题分为两节，现改写为三节，即常微分方程初值问题的 Green 函数、常微分方程边值问题的 Green 函数以及常微分方程的 Green 函数解法. 此外，重新调整了第 17 章前几节的架构，使之更适合于组织教学.

5. 删去了解析函数的变换性质、Cauchy 积分公式的几个重要推论 (但保留均值定理，并入 3.5 节)、Euler 求和公式、整函数和亚纯函数、Γ 函数的计算、圆盘的引力势与静电势、Kelvin 函数、Airy 函数以及三维调和函数的均值定理与极值原理等节，同时还删去了一致收敛级数的 Weierstrass 定理及 Laplace 变换普遍反演公式的证明. 第 17 章 (柱函数) 中还删去了 Hankel 函数的例题 (而仅保留 Hankel 函数的定义).

6. 书中的插图全部改用计算机绘制. 作者感谢北京大学刘循序同学为全部插图所作的加工；也感谢清华大学周含露同学与北京大学洪礼明同学，他们分别绘制了书中的图 1.5、图 2.8、图 16.2 与图 2.6.

7. 为了教学的方便，每一章 (第 11 章除外) 后均增添了习题. 书末亦附有习题答案. 我们另编有《数学物理方法习题指导》，该书亦由北京大学出版社出版.

吴 崇 试

2003 年夏于蓝旗营

第一版作者前言

(节　　录)

目前关于《数学物理方法》的教材为数不少. 特别是郭敦仁先生和梁昆淼先生的两本同名著作，内容丰富，各校广泛采用. 本书的编写，希望能略有创新，而不完全雷同于其他教材，但因为作为一门基础课程，其基本内容应该说是共同的；加之篇幅有限，因而实际上只能做到在若干部分略有新意：在各章的次序安排上，作了某些调整；某些章节中，增加了一点新的内容；某些部分的讲法上，作了一点新的尝试；在一些问题上自认为有更仔细的分析；在个别问题上纠正了其他书上的一些疏漏之处. 作者希望本书能做到不求全，但稍有特色. 如果从事本课程教学的教师认为本书有参考的必要，如果学习本课程的学生感到本书有阅读的兴趣，如果从事有关专业工作的同志发现本书有查阅、保存的价值，作者也就感到十分满足了.

和传统的《数学物理方法》教材一样，本书由复变函数及数学物理方程两部分组成. 在前一部分中，把二阶常微分方程的幂级数解法和解析延拓两章提前，紧接解析函数的幂级数展开之后. 这样做的目的，纯粹是为了避免在学期末 (在北大，本课程是一年的课程) 讲授常微分方程的幂级数解法. 提前讲授，可以使学生有较充裕的时间复习巩固. 在常微分方程的幂级数解法一章之后，立即介绍解析延拓，显得比较紧凑. 用级数解法得到的微分方程的解多只在复平面的一定区域内成立，解析延拓到更大范围就成为自然的要求. 而从微分方程的解来进一步阐述解析延拓的概念，又增加了解析延拓的具体例证. 在数学物理方程部分，在分离变量法及特殊函数之后，集中明确地把分离变量法总结列为一章，力求更加深入、紧密地讨论分离变量法的理论依据，以加深对于分离变量法这一最基本内容的理解. 另外，在全书的最后，还增加了数学物理方程解法的综述，对于课程中的各种解法进行横向的分析比较，力图使同学能对数学物理方程的各种解法有更全面的认识. 应该说，这些内容在各章中也都分散地谈到过，但集中到一处，希望能收到更好的效果.

关于本书中的新讲法，值得提到的有两处. 一是 Γ 函数的互余宗量定理和倍乘公式的证明，在一般教材中，各自总要用到特别的技巧. 本书利用 B 函数与 Γ 函数的关系来证，希望能使证明的难度有所降低，方法上也显得比较一致. 另一处是关于 Legendre 多项式的引入 (表达式). 通常的做法都是在 $x=0$ 点的邻域内求解 Legendre 方程而引入 Legendre 多项式. 现在改用在 $x=1$ 点的邻域内求解 Legendre 方程，求解本征值问题更加直截了当，Legendre 多项式的形式也比较简单，在此基础上照样能推出 Legendre 多项式的其他性质，并不产生任何困难.

本书中增加的新内容，有两种类型。一种属于课程的基本要求，这包括第 13 章以及第 15 章的部分内容. 第 13 章中讨论了线性偏微分方程的通解，这不仅涉及方程解的基本结构，而且也使得以后讨论非齐次方程的齐次化时，显得“有章可循”. 在这一章中还定性讨论了三种基本类型的数学物理方程的特点，如波的耗散与色散、热传导方程的传播速度问题等，它们是和物理现象紧密联系的. 由于一般教材都只介绍方程的解法，往往都未曾涉及这些内容. 当然，由于篇幅所限，本书在这方面也只能做到“浅尝辄止”. 在第 15 章中，介绍了外微分法，由此给

出 Laplace 算符在各种正交曲面坐标系中的表达式. 由于学时的限制，这里只是介绍了外微分的运算法则，根本不可能涉及有关微分流形的基本概念. 而且，如果学时紧张，只要求学生承认 Laplace 算符在柱坐标系和球坐标系中的表达式，这些内容完全可以略去. 在这一章中还讨论了 Laplace 算符在坐标变换下的不变性，这涉及求解具体数学物理方程定解问题时的坐标选取问题. 这是一个不可回避，但其实又是一个简单而又重要的基本问题，可惜一般教材中都未能有明确的表述. 另外一种类型属于选修的内容 (相应地，在节号前标有 $*$ 号). 这既有相当古老的问题 (例如正十七边形的几何作图、Euler 求和等)，也有近年来发展起来的新课题 (如非线性偏微分方程、小波变换等). 本书对于这些问题的介绍，应该说，都只是入门性的. 作者不希望把数学物理方法课程描述成封闭的完整的体系，更希望读者看到它是一门开放的发展的学科 (当然，学科不全等于课程，二者既有区别，又有联系). 希望通过这些内容的介绍，能激发起读者学习与思考的积极性. 在这方面要特别提到我国陈难先院士关于 Möbius 变换的工作. 他把纯数学理论和物理问题巧妙地联系起来，取得了举世公认的成就. 尽管这方面的工作和本课程的教学内容还有一定的距离，但是，作者认为，有责任把它首先写进我国的教科书中.

当然，本书中凡是标有 $*$ 号的 (都属于选修的内容)，并不全是区别于一般教材的新内容. 另一方面，也有一些内容，并未标有$*$号，也不属于课程的基本要求. 使用本书的师生，完全可以自主地略去这些内容.

这里不想再对本书作更多的自我评述，特别是不想列举国内外某些教材中的疏漏与不足. 唯一要提到的是关于几个特殊函数公式的订正 (见本书 9.8 节)，涉及的是正弦积分和余弦积分的几个无穷级数和. 应该说，它们都不属于本课程的教学内容. 但作者见到的几本工具书中均有误，而且也检索不到原始出处. 由于工具书有误，当然就增加了问题的严重性. 所以，作者愿借此机会，收录在这里，以资订正.

在本书即将付印的时刻，作者要深深感谢郭敦仁先生的教育与指导. 还是在大学的学习阶段，郭先生就是我的授课老师. 从事教学30余年来，从辅导到讲课，作者一直在郭敦仁先生的指导下工作. 郭先生的教诲，终身铭记.

作者还要感谢多年一起工作的同事. 教学工作中的研讨切磋，使作者受益匪浅. 在本书中应该说也包含了他们的贡献. 特别感谢钟毓澍教授，他仔细地阅读了本书的书稿，提出了不少宝贵意见.

作者也要感谢在北京大学听过我的课的历届学生. 本书中的不少观点与讲法，是在历年的教学中逐渐提炼形成的. 青年人的如饥似渴的求知欲，他们闪烁着智慧火花的诘问，对作者都是一种鞭策与激励. 作者愿将此书奉献给新世纪的大学生们，希望本书能为他们的成长与发展提供一点帮助.

由于本书写作仓促，错误之处，欢迎使用本书的师生与读者指正.

吴 崇 试

1998 年夏，北大燕北园

数 字 资 源 目 录

数 学 符 号

$\forall$	任何；凡
$\exists$	有；存在
$\exists!$	存在唯一的
$\nexists$	不存在
$\wedge$	并且；与
$\vee$	或
$a \in A$	(元素) a 属于 (集合) A
$a \notin A$	a 不属于 A
$\cup$	并集
$\cap$	交集
$\supset$	包含
$\subset$	子集
$\subseteq$	包含于
$A \setminus B$	$\{a : a \in A, a \notin B\}$
$\emptyset$	空集
$\mathscr{F}\{f\}$	f 的傅里叶变换
$\mathscr{L}\{f\}$	f 的拉普拉斯变换
$F(p) \fallingdotseq f(t)$	$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}$

$\mathbb{N}$	非负整数 (自然数)
$\mathbb{Z}$	整数
$\mathbb{R}$	实数
$\mathbb{R}^+$	正数
$\mathbb{R}^-$	负数
$\mathbb{C}$	复数；复平面
$\overline{\mathbb{C}}$	复数 (包括 ∞) 扩充的复平面
$\overline{\lim}$	上极限
$\underline{\lim}$	下极限
$\rightrightarrows$	一致收敛
$\Vert \cdot \Vert$	范数
$(\alpha)_n$	$\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	(矢量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$) 的内积
$\mathscr{F}^{-1}\{f\}$	f 的傅里叶逆变换
$\mathscr{L}^{-1}\{f\}$	f 的拉普拉斯逆变换
$f(t) \risingdotseq F(p)$	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$

目　　录

第一部分　复　变　函　数

第二部分 数学物理方程