普通高等教育"十一五"国家级规划教材

教育部国家级精品课程配套教材

Mathematics

大学数学应用教程（第三版）

高等数学（下册）

仉志余 主编　康淑瑰 副主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学应用教程(第三版)

高等数学(下册)

主　编　仉志余
副主编　康淑瑰

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/仉志余主编. —3版. —北京：北京大学出版社，2019.9
大学数学应用教程

ISBN 978-7-301-30703-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①仉… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第171052号

书　　名　大学数学应用教程（第三版）· 高等数学（下册）
DAXUE SHUXUE YINGYONG JIAOCHENG (DI-SAN BAN) · GAODENG SHUXUE (XIACE)

著作责任者　仉志余　主编

责任编辑　曾琬婷

标准书号　ISBN 978-7-301-30703-8

出版发行　北京大学出版社

地　　址　北京市海淀区成府路205号　100871

网　　址　http://www.pup.cn　新浪微博：@北京大学出版社

电子信箱　zpup@pup.cn

电　　话　邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62754819

印 刷 者　北京市科星印刷有限责任公司

经 销 者　新华书店

787毫米×980毫米　16开本　15.25印张　350千字

2005年7月第1版

2009年9月第2版

2019年9月第3版　2019年9月第1次印刷

定　　价　39.00元

内容简介

本书是在普通高等教育“十一五”国家级规划教材《大学数学应用教程(本科第二版·上册)》基础上,深入总结多年来教学改革和实践的经验,迎合教育部应用型本科转型改革和试点的需要并充分利用多媒体等现代教学技术编写而成的.

全书分上、下两册,内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,不定积分,定积分,导数与微分的应用,定积分的应用,常微分方程,数值计算方法,向量与空间解析几何,多元函数微分法及其应用,多元函数积分法及其应用,无穷级数,高等数学的软件实现,其中带“*”的为选学内容.通过书上的二维码还可以参阅线上相应的电子资源内容.

本书适合非“211”大学理工科和经济管理类各专业本科生使用,也适合同层次的成人教育以及工程技术人员使用.

第三版前言

《大学数学应用教程》第一版由北京大学出版社于 2005 年出版以来，深受高等院校同人青睐，2008 年被教育部评为普通高等教育“十一五”国家级规划教材，在重印 6 次后于 2009 年修订为第二版，形成了本科和高职教育不同类型的系列教材，其中本科层次分为上、下两册. 对于后者，随着教育部卓越拔尖计划实施 10 年来，经过多所高等院校任课教师的不懈努力和研究探索，包括教学内容、教学方法的改革和现代多媒体教学技术的应用，已经形成不少宝贵经验并及时融入了教材之中. 截至 2018 年，第二版已经先后重印 13 次，较好地满足了多所本科院校应用型人才培养的需要，同时太原工业学院的教学团队也于 2010 年被评为山西省大学数学优秀教学团队. 随着中国特色社会主义事业建设进入新时期，为满足我国高等教育改革创新、国民经济建设和科学技术发展的需要，全国应用型本科教育人才培养模式的探索也在如火如荼地进行之中. 2019—2021 年，教育部将分三年全面实施“六卓越一拔尖”计划 2.0，面向所有高校、所有专业，全面实施一流课程建设“双万计划”是其三项核心任务之一. 为了更好地体现和吸收我们的教学成果，努力争创全国“双万”“线下”与“线上”混合型“金课”，应山西省应用型本科院校联盟主要院校的倡议，在上级主管部门的大力支持下，我们决定变“单兵作战”为“集体发力”，集中优势兵力对该教材再次实施改版. 本次改版后的教材内容仍然包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计和大学数学的软件实现四大模块. 教材的支撑体系分为“线下”和“线上”两大部分. “线下”体系包括纸质课本和配套教学参考书. “线上”体系即电子资源平台，是课本基本内容的拓展部分，内容包括知识背景、方法训练、应用实例等；呈现形式包括电子课件、微课、慕课、动画演示、交流互动和自测与学位考试题库等. “线下”与“线上”可以通过“二维码”链接，互联互通、相辅相成. 本次改版以期达到让课本更“瘦壮”、知识更“宽广”、使用更方便之目的.

此版教程的内容保留了第二版的特色. 第一，就前三大模块内容的低限而言，均符合教育部高等学校非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的《工科类数学基础课程教学基本要求》. 第二，就其内容的深度而言，更加注重了简化理论推导，强化联系实际和方法运用，问题叙述力求深入浅出. 本教程更适合于“应用型”本科层次理工科和经济管理类的学生使用，与“研究型”大学普遍使用的近乎“数学分析”的教材相比，其理论证明的要求已被大大降低，其计算的繁难程度也被大大简化. 本次修订适当增加了部分典型例题，减少了部分过于繁难的习题. 针对某些专业的减少，有的章节内容加了“ * ”(但并非不重要)，以供实际教学中选择. 第三，就本教程内容的广度而论，不但没有减少，反而做了适度增加，这完全归功于“线上”系统的支持. 现已初步形成的电子资源平台承载了课本所无法承载的“宽广”内容. 笔者建议教学中师生可以充分发

挥“线下”“线上”两个系统的作用,以期随时随地方便地学习、交流与沟通,达到提升教学效果的目的.第四,根据应用型人才培养目标的要求,本次修订仍保留了第二版突出数学的应用,即“建模—解模”的特色.例如,高等数学模块中渗透了数学建模—解模的思想方法;线性代数模块的体系就是按照建立数学模型—寻求解模工具—解模答问这一主线设计的;概率论与数理统计模块则更加突出了其应用部分——数理统计的学习.此外,前三大模块的有机整合,减少了重复,节约了教学时数.第四模块大学数学的软件实现,利用 Mathematica 软件将前三大模块综合运用于解决实际问题,更加彰显了大学数学应用的特色,体现了现代理工科学生应掌握一门数学应用软件的要求.

总之,很好地学完了本教程内容的同学,其应用数学解决实际问题的能力将会大大提高.还希望继续考研深造的同学,若在进一步学习与本教程配套的《大学数学分级讲练教程》(北京大学出版社)后,其大学数学知识的深度和研究能力将会到达更高水平.

本次改版将教程分四册出版:《大学数学应用教程(第三版)·高等数学(上册)》,内容包括函数极限与连续,导数与微分,不定积分,定积分,导数与微分的应用,定积分的应用,常微分方程,数值计算方法;《大学数学应用教程(第三版)·高等数学(下册)》,内容包括向量与空间解析几何,多元函数微分法及其应用,多元函数积分法及其应用,无穷级数,高等数学的软件实现;《大学数学应用教程(第三版)·线性代数》,内容包括行列式,矩阵,n 维向量与线性方程组,相似矩阵与二次型,线性代数的软件实现;《大学数学应用教程(第三版)·概率论与数理统计》,内容包括随机事件及其概率,随机变量及其概率分布,随机变量的数字特征,多维随机变量,大数定律与中心极限定理,样本与抽样分布,参数估计,假设检验,一元线性回归分析,概率论与数理统计的软件实现.由于本教程的内容体系与现行教材相比改革力度较大,为便于教学管理部门和教师更好地安排教学,特提出使用本教程的如下教学方案,仅供参考:

本教程总学时可为 246(或 276)学时左右,其中高等数学、线性代数、概率论与数理统计分别为 150(或 164)、48(或 32)、48(或 80)学时.

本教程适用于工科类所有专业,也适用于经济、贸易、金融、工商管理和市场营销等专业.对于后者,其高等数学部分可安排 120~130 学时,其中的向量代数和多元微积分可以略讲,微积分在物理力学方面的应用可以不讲;线性代数、概率论与数理统计部分可与工科类专业类似.概率论与数理统计部分建议以概率论为基础,数理统计为重点,即淡化概率论,突出数理统计的数学思想.

在本次修订中,参与教程编写的单位有:太原工业学院、山西工程技术学院、吕梁学院、大同大学、山西应用科技学院、太原学院和山西警察学院等.参编高等数学内容的骨干教师代表有:冯贵林(第二章)、王爱武(第三章)、阮豫红(第四章)、刘彦芝(第五章)、田慧琴(第六章)、于彩娴(第七章)、王波(第九章)、李灿(第十章)、王颖(第十一章)、王瑶(第十二章).参编线性代数内容的骨干教师代表有:邢青红(第一章)、刘彩云(第三章)、高玉洁(第四章).参编概率论与数理统计内容的骨干教师代表有:王建军(第一章)、连高社(第五章)、马慧莲(第六章)、李艳艳

（第七章）. 其余部分的编写及全书的统稿工作由主编负责.

参与高等数学内容修订和电子资源建设的还有：王玉清（第一章），陈慧琴、陈小彪（第二、五章），郭元伟、岳霞霞（第四、六章），刘方（第七章），王俊梅（第八、十二章），李艳艳（第九章）. 参与线性代数内容修订和电子资源建设的还有：段振兴（第二章）. 参与概率论与数理统计内容修订和电子资源建设的还有：杨焕青（第一章），张晓青、赵登科（第二章），张鹏（第三章），马霞（第四章），连高社（第五章），康淑瑰（第六章），张晓青（第七章）.

还有以上六所院校未列入代表名单的多位老师和多年以来使用本教材前两版的所有老师对本教程的建设提出了宝贵意见和给予了大力支持，特别不会忘记的是全省优秀教学团队重要成员宋智民、王晓霞、赵治荣、张晋珠等老师在前两版教材建设十几年的工作中严谨的作风和不计名利的贡献！在此对以上所有人员，以及北京大学出版社和北京霞光图书公司同人们的大力支持一并致以诚挚的感谢！

由于作者水平所限，新版内容中难免存在不足甚至谬误之处. 对此，敬请广大专家、同人和读者不吝指正.

仉志余

2019 年 4 月

第二版前言

《大学数学应用教程》第一版由北京大学出版社于2005年出版以来，深受高等院校同人青睐，已6次重印，2008年又被教育部评为普通高等教育“十一五”国家级规划教材.原教程适合少学时本科和较高层次高职高专院校各专业使用.随着我国高等教育大众化过程的推进，在实际教学中，作者深深感到国内现行高等数学、线性代数、概率论与数理统计等大学数学课程的品牌教材尤其不能适应二、三类本科学生的实际，而《大学数学应用教程》的特色恰恰可以弥补这一不足.为了加强对各类人才培养的针对性，作者认为很有必要按照进一步拓展与精简两个方向分别将其修订为本科层次和高职高专层次两种版本使用.这是本科层次的版本.

此版本的内容包括高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计和大学数学的软件实现四大模块，拓展了数理统计等部分内容.第一，就前三大模块内容的低限而言，均符合教育部高等学校非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新制定(2009年宁波会议通过)的《工科类数学基础课程教学基本要求》.第二，就其内容的深度而言，本教程更适合于非“211”大学理工类和经济管理类本科专业使用，与“研究型”大学普遍使用的近乎“数学分析”的教材相比，其理论证明的要求已被大大降低，其繁难的计算也被放弃.其目的是将重点转移到熟练掌握基本概念、基本性质和基本方法的应用上.第三，就本教程内容的广度而论，不但没有减小，反而做了适度增加.笔者认为这样将更有利于应用型人才的培养.第四，根据应用型人才培养目标的要求，本教程突出了数学的应用，例如微积分模块中增加了数值计算方法的相关内容；渗透了数学建模的思想方法；线性代数模块的体系是按照建立数学模型—寻求解模工具—解模答问这一主线设计的；概率论与数理统计模块则更突出了其应用部分——数理统计的学习.此外，三大模块的有机整合，减少了重复，节约了教学时间.最后增加的大学数学的软件实现一篇，将三大模块的主要知识运用计算机软件加以展示，更加彰显了大学数学应用的现代特色.

总之，很好地学习了本教程内容的同学，其应用数学解决实际问题的能力将会大大提高.还希望继续考研深造的同学，若在进一步学习与本教程配套的《高等学校数学讲练教程系列》(北京大学出版社)后，其大学数学知识的深度和研究能力将会达到更高的水平.

本教程分为上、下两册.上册内容包括一元微积分及其应用，常微分方程，无穷级数，数值计算方法，空间解析几何与向量代数，多元微积分及其应用等.下册内容包括线性代数，概率论与数理统计和大学数学的软件实现等.由于本教程的内容体系与现行教材相比改革力度较大，为便于教学管理部门和教师更好地安排教学，特提出使用本教程的如下教学方案，仅供参考：

本教程总学时可为272学时(17学分)左右，其中微积分、线性代数、概率论与数理统计分

别为 170(或 176)学时、48(或 42)学时、48 学时. 打“＊”的内容可根据专业要求选讲.

本教程也适用于经济、贸易、金融、工商管理和市场营销等专业. 此时,其微积分部分可安排 120～130 学时,其中的向量代数和多元微积分可以略讲,微积分在物理力学方面的应用可以不讲,线性代数、概率论与数理统计部分可与工科类专业类似.

本教程在改版过程中,参加编写工作的有：王建军、宋智民、王晓霞、张晋珠、阮豫红、王波、寇静、王颖、樊孝仁、闫乙伟、赵治荣、高玉洁、马慧莲、尹礼寿、郭尊光、李灿、于彩娴、王瑶、张玫玉等多位教师. 在教育部和北京大学出版社的大力支持下,本教程列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材. 对上述各部门领导和同人以及各位支持本教程建设的朋友,在此表示诚挚的感谢!

新版中存在的问题,敬请广大专家、同人和读者给予批评指正.

仉志余

2009 年 6 月

目　　录

第九章　向量与空间解析几何

与平面解析几何对于一元函数微积分一样，空间解析几何是学习多元函数微积分必不可少的基础. 本章首先建立空间直角坐标系，并简要介绍工程技术中常用的向量代数知识，然后以向量为工具讨论空间曲面和曲线.

第一节　空间直角坐标系与向量

一、空间直角坐标系

过空间的一个定点 O，作三条两两相互垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般具有相同的长度单位. 这三条数轴分别叫作 x **轴**（**横轴**）、y **轴**（**纵轴**）、z **轴**（**竖轴**），统称为**坐标轴**. 通常把 x 轴和 y 轴放置在水平面上，而 z 轴垂直于 x 轴和 y 轴所确定的平面. 它们的正向要求符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（如图 9-1 所示）. 这样三条坐标轴就组成一个**空间直角坐标系**，记为 $Oxyz$，称为**右手系**，其中点 O 称为**坐标原点**（简称**原点**）. 以后在应用空间直角坐标系时，如无特别说明，都指右手系.

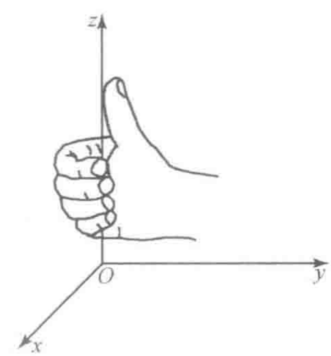
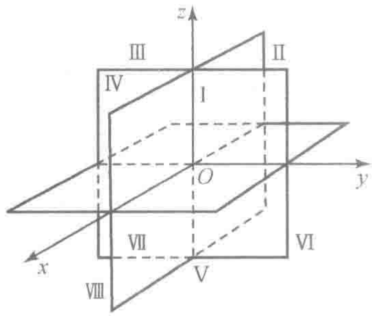


图　9-1

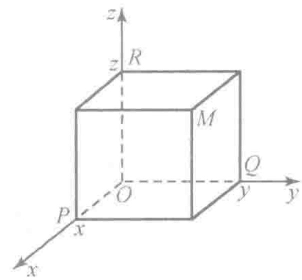
在空间直角坐标系中，三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为**坐标面**. 由 x 轴与 y 轴确定的平面称为 Oxy **面**. 类似地可确定 Oyz 面和 Ozx 面. 三个坐标面将空间分成八部分，每一部分称为一个**卦限**. 含有 x 轴正向、y 轴正向、z 轴正向的卦限叫作**第Ⅰ卦限**，逆时针方向转依次为第Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限，它们的下方依次为第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限（如图 9-2(a)所示）.

下面建立空间点的直角坐标. 设 M 为空间一已知点，过点 M 作三个平面分别与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直相交，交点依次为 P,Q,R（如图 9-2(b)所示），这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次是 x，y，z，于是空间点 M 就唯一确定了一个三元有序数组 (x,y,z). 这个三元有序数组就是点 M 的**坐标**，其中 x 称为**横坐标**，y 称为**纵坐标**，z 称为**竖坐标**. 坐标为 (x,y,z) 的点 M 记为 $M(x,y,z)$.

反之，已知一个三元有序数组 (x,y,z)，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，再过点 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，这三个垂直平面的交点 M 便是以三元有序实数组 (x,y,z) 为坐标的点（如图 9-2(b)所示）.



(a)



(b)

图 9-2

这样,通过空间直角坐标系,我们建立了空间的点 M 与三元有序数组(x,y,z)之间的一一对应关系.容易知道,空间直角坐标系中一些特殊点的坐标有如下特征:

各卦限内点的坐标符号:

Ⅰ:(+,+,+); Ⅱ:(−,+,+); Ⅲ:(−,−,+); Ⅳ:(+,−,+);

Ⅴ:(+,+,−); Ⅵ:(−,+,−); Ⅶ:(−,−,−); Ⅷ:(+,−,−).

各坐标面上点的坐标:

Oxy 面上点的坐标为 $(x,y,0)$;Oyz 面上点的坐标为$(0,y,z)$;Ozx 面上点的坐标为 $(x,0,z)$.

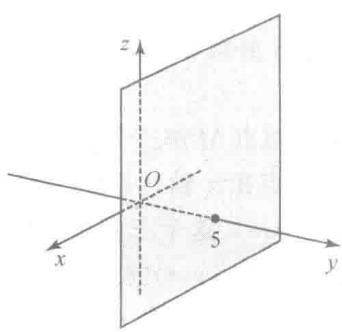
各坐标轴上点的坐标:

x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$;y 轴上点的坐标为$(0,y,0)$;z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$.

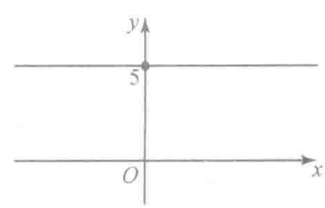
原点 O 的坐标:$(0,0,0)$.

例 1 $y=5$ 在空间直角坐标系和平面直角坐标系中的图形是什么?

解 在空间直角坐标系中,$y=5$ 是指集合$\{(x,y,z)\mid y=5\}$,表示一个平行于 Ozx 面的平面(如图 9-3(a));在平面直角坐标系中,$y=5$ 是指集合$\{(x,y)\mid y=5\}$,表示一条平行于 x 轴的直线(如图 9-3(b)).



(a)



(b)

图 9-3

二、向量及其线性运算

1. 向量的概念

现实世界中的量可分为两类：一类如长度、面积、体积、质量、时间、密度、功和能等，它们只有大小，可用一个数来表示，称为**数量**(或**纯量**、**标量**)；另一类如力、力矩、位移、速度和加速度等，它们既有大小，又有方向，称为**向量**(或**矢量**).

几何上常用一条有向线段表示向量，其中有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以点 A 为始点，点 B 为终点的有向线段表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$（如图 9-4 所示）. 印刷时常用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{V},\boldsymbol{F}$ 等来表示向量.

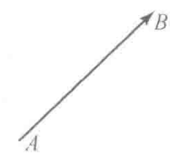


图　9-4

在空间直角坐标系中，以坐标原点 O 为始点，M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$，称为**向径**，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示. 空间点 M 与它的向径 $\overrightarrow{OM}$ 存在一一对应关系.

向量的大小称为向量的**模**，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的始点和终点重合，它的方向可以看作是任意的.

在实际问题中，有些向量与始点有关，有些向量与始点无关. 本书中只研究与始点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**(以后简称**向量**). 所以，如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

2. 向量的线性运算

2.1　向量的加法

定义 1　设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，它们有同一始点 O，以它们为邻边作平行四边形，则以 O 为始点的对角线向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**(如图 9-5 所示)，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 求向量的和的运算称为向量的**加法**. 这种求向量和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

特别地，若两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在同一直线上，则规定它们的和是这样一个向量：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同时，和向量的方向与原来两向量的方向相同，其模等于两向量模的和；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反时，和向量的方向与模较大的向量的方向相同，而模等于两向量模的差.

求两个向量的和还可以用下面的方法：

平移向量 $\boldsymbol{b}$，使其始点与向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则由 $\boldsymbol{a}$ 的始点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$，就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 这种求向量和的方法称为向量加法的**三角形法则**(如图 9-6 所示).

显而易见，使用三角形法则与平行四边形法则结果是一致的. 通常用三角形法则较简单些. 另外，三角形法则还可推广到多边形法则，从而解决两个以上向量的求和问题.

向量的加法满足以下运算律：

交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

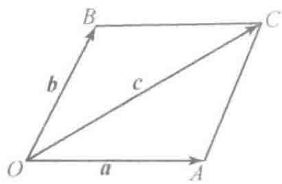


图 9-5

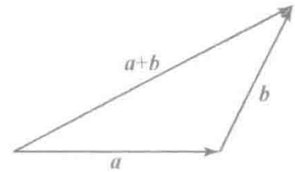


图 9-6

利用向量加法的三角形法则,很容易验证上面的两条运算律,请读者自己完成.

与数的运算一样,向量的减法可以作为加法的逆运算引入.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记为 $-\boldsymbol{a}$(如图 9-7 所示). 由此规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**如下:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

特别地,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

求向量差的运算称为向量的**减法**. 由向量加法法则,可得求两个向量差的方法如下:

将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移,使它们有同一始点,则由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$,就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (如图 9-8 所示).

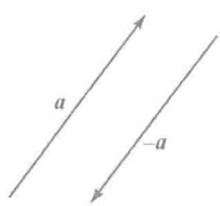


图 9-7

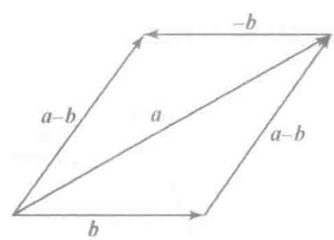


图 9-8

2.2 数量与向量的乘法

定义 2 设 λ 是一数量,λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,并且当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

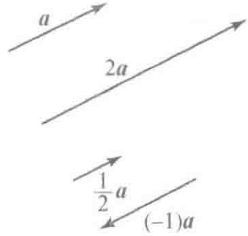


图 9-9

特别地,当 $\lambda=-1$ 时,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$,恰好是 $\boldsymbol{a}$ 的负向量(如图 9-9 所示).

数量与向量的乘法满足下面的运算律.

结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,其中 λ,μ 为数量;

分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,其中 λ,μ 为数量.

根据数量与向量乘积的定义,可以推出以下结论:

(1) $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行($\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行是指 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$);

(2) 当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$ 时,常常把与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$,那么

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}^0 \quad \text{或} \quad \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0.$$

这说明,一个非零向量除以它的模,得到一个与该向量同向的单位向量.或者说,这把向量 $\boldsymbol{a}$ 的**两个要素(大小和方向)**表现出来了,其中模 $|\boldsymbol{a}|$ 代表 $\boldsymbol{a}$ 的大小,而单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 代表 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

向量的加法、数量与向量的乘法这两种运算统称为向量的**线性运算**.

例 2　设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

例 3　证明:三角形的中位线平行于底边且等于底边的一半.

证　如图 9-10 所示,因为 D,E 分别为边 AB,AC 的中点,所以

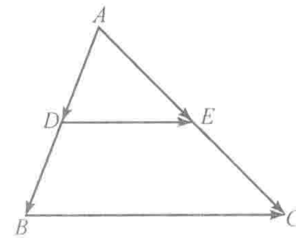


图　9-10

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

证毕

三、向量的坐标

1. 向径的坐标表示

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中分别与 x 轴、y 轴、z 轴方向相同的单位向量称为**基本单位向量**,分别用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示(如图9-11 所示).

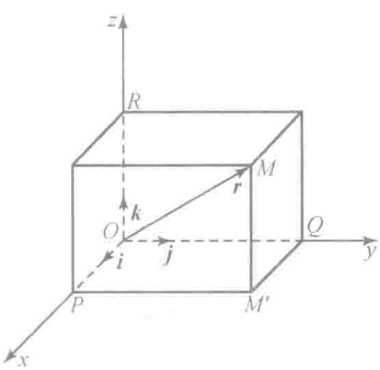


图　9-11

设点 M 的坐标为 (x,y,z),则 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$(如图 9-11 所示).由向量的加法运算法则得

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})+\overrightarrow{OR}$$

$$=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

即向径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式为

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

我们称 x,y,z 为 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标**,记为 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$.

例 4　设有向径 $\boldsymbol{r}_1=\{x_1,y_1,z_1\}$,$\boldsymbol{r}_2=\{x_2,y_2,z_2\}$ 和常数 λ,则由向量加法和数量与向量的乘法运算法则知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}\\&=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{r}_1&=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k}\\&=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}.\end{aligned}$$