高等数学

GAODENG SHUXUE

下

主　编　沈世云　朱　伟
副主编　孙春涛　何承春　游晓黔　耿金玲
主　审　郑继明

重庆大学出版社

高等数学

下

主　编　沈世云　朱　伟
副主编　孙春涛　何承春
　　　　游晓黔　耿金玲
主　审　郑继明

重庆大学出版社

内容提要

本书是根据编者多年来的教学经验编写而成的. 全书分为上下两册，本书为下册，主要内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分及无穷级数. 本书力求结构严谨、逻辑清晰，注重知识点的引入方法. 本书对传统的高等数学内容进行了适当的补充，利用二维码拓展较难的高等数学理论知识、MATLAB 图形描绘、简单数学模型等知识，训练学生的解题能力. 本书叙述深入浅出，理论及计算方法讲述清楚；每节配置习题，每章附有总习题，题型多样，选题典型，难易层次分明，特别是本书配备的 MATLAB 画图的知识介绍，有利于学生更好地理解和掌握多元函数积分的相关计算，提升学生的解题能力.

本书可作为高等院校非数学类各专业学生的教材，也可作为教师的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 沈世云，朱伟主编. -- 重庆：重庆大学出版社，2019.2

新工科系列. 公共课教材

ISBN 978-7-5689-1434-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①沈… ②朱… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 295726 号

高等数学

(下)

主　编　沈世云　朱　伟

副主编　孙春涛　何承春

游晓黔　耿金玲

主　审　郑继明

策划编辑：范　琪

责任编辑：李定群　　版式设计：范　琪

责任校对：刘志刚　　责任印制：张　策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：易树平

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401331

电话：(023) 88617190　88617185(中小学)

传真：(023) 88617186　88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆华林天美印务有限公司印刷

*

开本：787mm×1092mm　1/16　印张：15.25　字数：373千

2019 年 2 月第 1 版　2019 年 2 月第 1 次印刷

印数：1—4 000

ISBN 978-7-5689-1434-5　定价：38.00 元

前言

本书是在习近平新时代中国特色社会主义思想指导下，落实“新工科”建设的新要求，在教育大众化和“互联网 +”的新形势下，集编者多年教学经验编写而成的. 编写本书遵循的原则是：在教学内容的深度和广度上与信息类各专业高等数学课程要求一致，并与现行工科院校“高等数学课程教学基本要求”相适应，满足当前教与学的需要，渗透现代数学思想，加强应用能力培养.

在本书的编写过程中，我们尽可能遵循以下原则：

1. 在理论体系、知识系统与本书的上册能很好地衔接.

2. 以实际问题为引例，注重重积分、曲线积分、曲面积分概念的实际背景介绍，系统讲解空间解析、多元函数微积分和无穷级数等基本概念、理论和方法及应用.

3. 继承和保持经典高等数学类教材的优点，适当降低对解题训练方面的要求，注重对多元函数积分的计算知识和无穷级数理论的应用能力的培养，加强数学思想方法的训练.

4. 加强课程理论与工科专业的融合，在教材中适当加入与通信、计算机、自动化等专业相关的例题，注重学生应用知识分析和解决实际问题的能力以及构建数学建模的能力.

5. 加强数学文化的熏陶，利用二维码介绍数学史和数学家等，力争打造满足新时代要求的大学数学新型教材.

6. 本书注重例题和习题的多样性和层次性. 习题按节配置，遵循循序渐进的原则；每章配备有总习题，其中包括一些考研题目.

本书由沈世云、朱伟主编. 编写组耿金玲、何承春、游晓黔、孙春涛、沈世云等分别编写了第 8 章至第 12 章，刘显全提供附图及 MATLAB 绘图方法. 全书由沈世云、朱伟统稿定稿，由郑继明主审. 本书的编写得到了重庆邮电大学理学院领导和同行的支持和帮助.

本书在编写过程中，参考了较多的国内外教材，在此表示感谢.

由于编者水平有限，教材中难免有不足和疏漏之处，恳请同行和读者批评指正.

编　者

2018 年 10 月

目录

第 8 章 向量代数与空间解析几何

自然界中的很多量既有大小，又有方向，对它们进行抽象、研究和发展，就得到了数学中的向量. 向量在自然科学与工程技术中有着广泛的应用，是一种重要的数学工具.

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有顺序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而可用向量代数的方法来研究几何问题. 为学习多元函数微积分，必须先了解空间解析几何的知识. 与平面解析几何知识体系类似，空间解析几何也是用向量代数方法研究空间中的几何问题. 空间解析几何是多元函数微积分的重要基础.

本章先引进向量的概念，根据向量的线性运算建立空间直角坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的有关内容，包括空间曲面与平面、空间曲线与直线.

8.1 向量及其线性运算

8.1.1 向量的概念

客观世界中，人们熟知的位移、速度、力、力矩等物理量不仅有大小，而且有方向. 这类既有大小又有方向的量，称为**向量**. 不论向量的具体特性如何，在数学上都可用一条有方向的线段（称为有向线段）来表示. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向.

(1) 向量的表示

以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量，记作$\overrightarrow{AB}$，如图 8.1 所示. 向量常用小写黑体字母（书写时，在字母上加一箭头）来表示，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 或 $\vec{a},\vec{b},\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

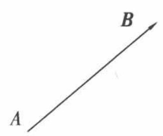

图 8.1

在实际问题中，有些向量与起点无关，有些向量与起点有关. 由于一切向

量的共性是它们都有大小和方向,因此,在数学上只研究与起点无关的向量,并称这种向量为**自由向量**,以下简称**向量**. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 也就是,相等的向量经过平移后可以完全重合.

(2)向量的模

向量的大小称为向量的模. 向量 $\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}$的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$,$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**,一般记作 $\boldsymbol{e}$. 模等于 0 的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$ 或$\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合,它的方向可看成任意的.

(3)向量的夹角

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取空间一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,规定不超过 π 的角 $\angle AOB$(设 $\varphi=\angle AOB, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**,记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,即 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,如图 8.2 所示. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量,由于零向量的方向是任意的,因此,规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角可取 0 到 π 之间的任意值.

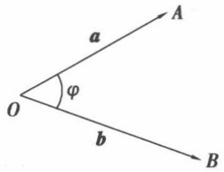

图 8.2

如果 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$(或 π),就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,即如果两个向量的方向相同或相反,就称这两个向量平行. 如果 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 可认为零向量与任何向量都平行,也可认为零向量与任何向量都垂直.

注 当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此,两向量平行又称两向量**共线**. 类似还有共面的概念. 设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果公共起点和其终点在一个平面上,就称这 k 个向量**共面**.

8.1.2 向量的线性运算

(1)向量的加法

在力学中,作用于一质点的两个力的合力是依"平行四边形法则"确定的,数学中向量的加法即依此法则而定.

设已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 O 作为起点,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,再以 OA,OB 为边作平行四边形 $OACB$,则对角线的向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 8.3 所示. 这种规定两个向量之和的方法,称为**向量加法的平行四边形法则**.

注意图 8.3 中$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$,所以上述向量的加法也可有以下描述:平移向量 $\boldsymbol{b}$,使得 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时,从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量称 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **和**,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 8.4 所示. 这种做法称为**向量加法的三角形法则**.

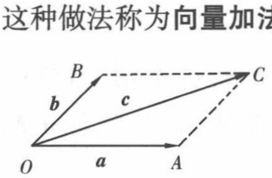

图 8.3

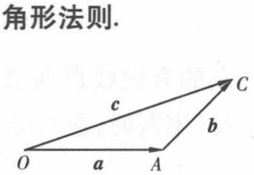

图 8.4

由向量的加法运算规则很容易推知,向量的加法符合下列运算规律:

①**交换律**

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{8.1}$$

②**结合律**

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{8.2}$$

读者可以自己证明.

注　因向量的加法符合交换律与结合律,故可把向量的加法推广到 n 个向量. n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写为

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

并按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则如下:使前一向量的终点始终作为后一向量的起点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以第一个向量的起点作为起点,最后一个向量的终点作为终点连接起来作一向量,这个向量即为所求的和.

(2)向量的减法

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量,称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记为 $-\boldsymbol{a}$,显然有 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$. 由此规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差** $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 对应的法则如图 8.5(a)所示,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

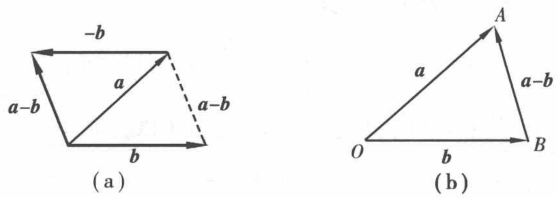

图 8.5

因此,若把向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,则从 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 向 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 所引向量 $\overrightarrow{BA}$,便是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,如图 8.5(b)所示.

由三角形两边之和大于第三边,有不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \tag{8.3}$$

成立. 其中,等号在 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时成立.

(3)向量与数的乘法

定义 8.1　设 λ 是一个数,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积仍为一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定:

①当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$;

②当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

③当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

按上述运算规定,不难证明数与向量的乘积具有下列运算规律:

①结合律:

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a} \tag{8.4}$$

②分配律:

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \tag{8.5}$$

向量的加减法及数乘运算,统称为**向量的线性运算**.

当 $\lambda \neq 0$ 时,规定$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$. 于是当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$ 时,向量$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,记为 $\boldsymbol{e}_a$,即

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \tag{8.6}$$

这就是向量的**单位化**. 式(8.6)表明,**一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量**.

例 1 化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

解 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)=(1-3)\boldsymbol{a}+\left(-1-\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{5}\cdot 5\right)\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}-\dfrac{5}{2}\boldsymbol{b}$

数与向量的乘积可用来刻画两个向量之间的平行关系.

定理 8.1 非零向量 $\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

当 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 时,取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,并且规定 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值,而 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值,则有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$$

再证明数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减,便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$$

即 $|\lambda-\mu|\cdot|\boldsymbol{a}|=0$. 因 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$,故 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,即 $|\lambda-\mu|=0$,所以 $\lambda=\mu$.

例 2 试用向量方法证明:对角线互相平分的四边形必是平行四边形(见图 8.6).

证 因为$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$,所以

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}$$

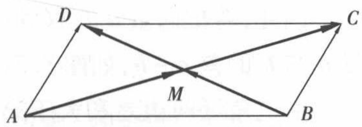

图 8.6

由定理 8.1 可知,$\overrightarrow{AD}$与 $\overrightarrow{BC}$平行且相等,故结论得证.

定理 8.1 是建立数轴的理论基础. 至此可知,给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox,轴上的任一点 P,对应一个向量$\overrightarrow{OP}$,由于$\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$,根据定理 8.1,必有唯一的实数 x,使$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$(实数 x 称为**轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值**),并且$\overrightarrow{OP}$与实数 x 是一一对应. 因此,有对应关系

$$\text{点 } P \leftrightarrow \text{向量}\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow\text{实数 } x$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系(见图 8.7). 据此,定义实数 x 为轴上点 P 的坐标. 由上述对应关系可知,轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$.

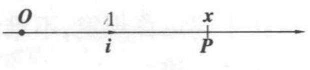

图 8.7

8.1.3　空间直角坐标系

在空间内取定一点 O 并作 3 条相互垂直的数轴 Ox,Oy,Oz(通常这 3 条数轴的长度单位相同),它们构成一个**空间直角坐标系**,称为 $Oxyz$ **坐标系**. 点 O 称为**坐标原点**,Ox,Oy,Oz 分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为**坐标轴**. 一般地,取从后向前,从左向右,从下向上的方向作为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向(见图 8.8). 3 个坐标轴的正方向符合**右手系**. 即以右手握住 z 轴,当右手的 4 个手指从 x 轴的正向以$\dfrac{\pi}{2}$角度转向 y 轴的正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向.

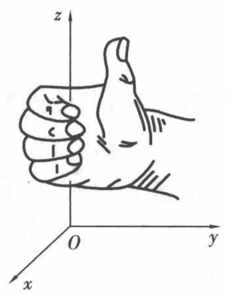

图 8.8　空间直角坐标系

由两个坐标轴所确定的平面,称为**坐标平面**,简称**坐标面**. x 轴、y 轴、z 轴可确定 xOy,yOz,zOx 3 个坐标面. 这 3 个坐标面可把空间分成 8 个部分,每个部分称为一个**卦限**. 含有 3 个正半轴的卦限称为第一卦限,它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面的上方,按逆时针方向还排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 面的下方,与第一卦限对应的是第五卦限,按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 8 个卦限分别用字母 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ表示(见图 8.9).

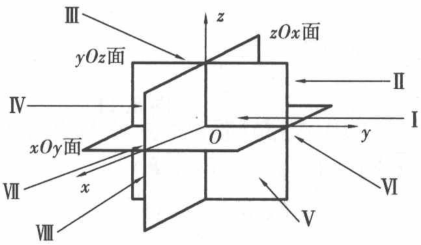

图 8.9

空间解析几何的诞生

设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示与 x 轴、y 轴、z 轴正向方向相同的单位向量. 任给向量 $\boldsymbol{r}$,对应有点 M,使 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 以 OM 为对角线、3 条坐标轴为棱作长方体 $RCMB-OPAQ$(见图 8.10),有

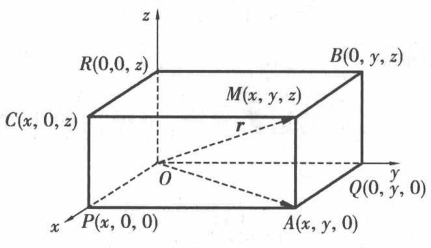

图 8.10

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\\&=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA})+\overrightarrow{AM}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\end{aligned}$$

设$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

上式称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式**,$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 3 个坐标轴方向的**分向量**. 由上式可知,向量 $\boldsymbol{r}$ 与 3 个有序数 x,y,z 之间有一一对应的关系

$$\boldsymbol{r}\leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z)$$

有序数组(x,y,z)称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标表示,记为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 有序数组(x,y,z)也称**点 M 的坐标**,记为 $M(x,y,z)$. 3 个有序数 x,y,z 分别称为**点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标**.

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明,一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号(x,y,z)既可表示点 M,又可表示向量$\overrightarrow{OM}$,具体要从上下文认清它究竟表示点还是向量.

坐标面上和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征. 在 yOz 面上点的横坐标为 0;在 zOx 面上点的纵坐标为 0;在 xOy 面上点的竖坐标为 0. 在 x 轴上的点,只有横坐标不为 0;在 y 轴上的点,只有纵坐标不为 0;在 z 轴上的点,只有竖坐标不为 0.

设 $\boldsymbol{a}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量,过 M_1,M_2 各作垂直于3 个坐标轴的平面 ,这 6 个平面围成一个以线段 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 8. 11).

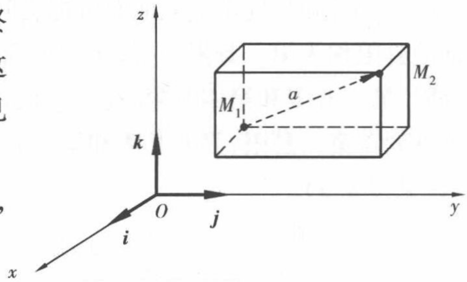

图 8. 11

设$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}$,它在 3 个坐标轴上的分向量:$a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$,即

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以

$$a_x=x_2-x_1,a_y=y_2-y_1,a_z=z_2-z_1$$

由此得到以 $\boldsymbol{a}$ 的起点坐标和终点坐标表示的坐标表达式

$$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1) \tag{8.7}$$

8.1.4 向量的线性运算的坐标表示

利用向量的坐标和向量线性运算的运算规律,可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下:

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,且 λ 为实数,因

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k};\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

故有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z) \tag{8.8}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z) \tag{8.9}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z) \tag{8.10}$$

由此可见,向量的加、减及数乘,只需对向量的各个坐标进行相应的数量运算即可.

例 3　已知 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$ 和线性方程组 $\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$，求未知向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$.

解　如同解二元一次线性方程组，可得 $\begin{cases}\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}\end{cases}$，于是

$$\boldsymbol{x}=2(2,1,2)-3(-1,1,-2)=(7,-1,10)$$
$$\boldsymbol{y}=3(2,1,2)-5(-1,1,-2)=(11,-2,16)$$

例 4　设 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 为两已知点，而在 AB 直线上的点 M 将有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 分为两部分 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{MB}$（见图 8.12），使它们的值的比等于某数 $\lambda(\lambda\neq-1)$，即 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，求分点 M 的坐标.

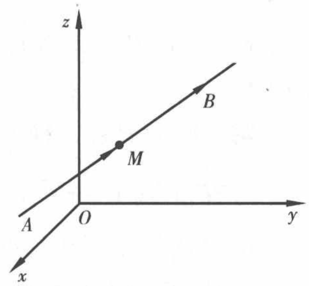

图 8.12

解　设 $M(x,y,z)$ 为直线上的点，则

$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$

由题意可知，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，所以有

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

从而有

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),y-y_1=\lambda(y_2-y),z-z_1=\lambda(z_2-z)$$

所以

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

本例中的点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点，也称 λ 分点. 当 M 为中点时，则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

8.1.5　向量的模、方向角、投影

(1) 向量的模与两点间的距离公式

在空间取定一点 $M(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x,y,z)$，如图 8.10 所示. 由勾股定理很容易推得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

一般地，如果 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\tag{8.11}$$

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中任意两点，则点 M_1 和点 M_2 的距离 $|M_1M_2|$ 就是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 因为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

所以点 M_1 和点 M_2 的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\tag{8.12}$$

这就是空间两点之间的距离公式.

例 5 证明以 3 点 $M_1(4,3,1)$,$M_2(7,1,2)$,$M_3(5,2,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

证 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6$$

$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6$$

所以$|M_2M_3|=|M_3M_1|$,即$\triangle M_1M_2M_3$ 是一个等腰三角形.

例 6 设 P 在 x 轴上,它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$的距离的 2 倍,求点 P 的坐标.

解 因为 P 在 x 轴上,可设 P 点坐标为$(x,0,0)$,则

$$|PP_1|=\sqrt{(-x)^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},\ |PP_2|=\sqrt{(-x)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{x^2+2}$$

由$|PP_1|=2|PP_2|$,得$\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$,解得 $x=\pm1$,故所求点为$(1,0,0)$,$(-1,0,0)$.

(2)向量的方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的正向的夹角 α,β,γ 称为 **$\boldsymbol{r}$ 的方向角**,向量的方向角 α,β,γ 的余弦称为向量的**方向余弦**(见图 8.13).

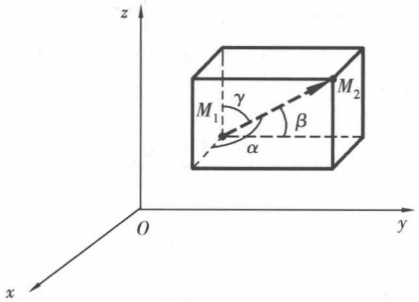

图 8.13

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z)\neq\boldsymbol{0}$(如图8.13),则有

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

于是,向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦的坐标表示式

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \tag{8.13}$$

因为方向余弦满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{8.14}$$

所以$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

例 7 已知两点 $A(4,0,5)$和 $B(7,1,3)$,求与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解 因为$\overrightarrow{AB}=(7-4,1-0,3-5)=(3,1,-2)$,$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$,所以

$$\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$$

例 8 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$,它与 x 轴和 y 轴的夹角分别为$\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{\pi}{4}$,且$|\overrightarrow{P_1P_2}|=2$,如果 P_1 的坐标为$(1,0,3)$,求 P_2 的坐标.

解 设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为 α,β,γ,则 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$,$\beta=\dfrac{\pi}{4}$. 因为

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

所以 $\cos\gamma=\pm\dfrac{1}{2}$,故 $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$或 $\gamma=\dfrac{2\pi}{3}$.