Б.П.吉米多维奇
Б.П.ДЕМИДОВИЧ

数学分析习题全解

（原题译自俄文第13版）

（六）

南京大学数学系
许　宁　廖良文　编著
杨立信　译

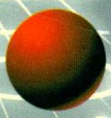












安徽人民出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

Б. П. 吉米多维奇

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解

（六）

南京大学数学系

博士生导师　许宁副教授　编著

廖良文教授

杨立信　译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解.6/(苏)吉米多维奇著.许宁,廖良文编著.—合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 7—212—02700—6/G·765

Ⅰ.吉… Ⅱ.①吉…②许…③廖… Ⅲ.数学分析—高等学校—解题 Ⅳ.017—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113595 号

责任编辑 王玉法
装帧设计 王怡敏
出版发行 安徽人民出版社
地　　址 合肥市金寨路 381 号九州大厦　邮编:230063
发 行 部 0551—2833066　0551—2833099(传真)
经　　销 新华书店
印　　刷 赣榆县苏兴印刷厂
开　　本 850×1168　1/32
印　　张 14.75
字　　数 350 千
版　　次 2005 年 12 月第 1 版
印　　次 2005 年 12 月第 1 次印刷
标准书号 ISBN7—212—02700—6/G·765
定　　价 18.00 元

本版图书凡印刷、装订错误可及时向承印厂调换。

前 言

数学分析是大学数学系的一门重要的必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。现安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》(杨立信，毕秉钧翻译)。新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，该习题集有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答，应安徽人民出版社的同志邀请我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，作练习题是一个很重要的环节。通过作练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。在本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编 者

2005 年 8 月

目　录

第八章　多重积分和曲线积分 ……（1）

§1. 二重积分 ……（1）
§2. 面积的计算 ……（52）
§3. 体积的计算 ……（74）
§4. 曲面面积的计算 ……（95）
§5. 二重积分在力学上的应用 ……（110）
§6. 三重积分 ……（131）
§7. 利用三重积分的体积计算 ……（151）
§8. 三重积分在力学上的应用 ……（173）
§9. 广义的二重和三重积分 ……（201）
§10. 多重积分……（236）
§11. 曲线积分……（256）
§12. 格林公式……（299）
§13. 曲线积分在物理学上的应用……（325）
§14. 曲面积分……（343）
§15. 斯托克斯公式……（374）
§16. 奥斯特罗格拉茨基公式……（383）
§17. 场论元素……（409）

需要全本请访问 www.ertongbook.co

第八章　多重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1. **二重积分的直接计算**　下数被称为由连续函数 $f(x,y)$ 展开成有界封闭平方域 Ω 的二重积分：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

式中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$，$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$，而其和对于 $(x_i,y_j) \in \Omega$ 展开到 i 和 j 值.

若用不等式指定域 Ω：

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

式中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为 $[a,b]$ 区间的连续函数，则相应的二重积分可以按照下式计算：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_2(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2. **二重积分中的变量代换**　若连续可微分函数

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v)$$

是 Oxy 平面上有界封闭域 Ω 在 Ouv 平面上域 Ω' 的一一映射，以及函数行列式：

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

可能除了零测度集之外，在域 Ω 内保持符号不变，则下式是正确的：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega'} f(x(u,v),y(u,v)) \mid I \mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

特别是对于按照公式 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ 变换极坐标 r 和 φ 的情

况，得出：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

3901. 计算积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

把它看作是积分和的极限，用直线：

$$x = \frac{i}{n}, \qquad y = \frac{j}{n} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n-1)$$

把积分域分成若干正方形，并在这些正方形的右顶点选取被积函数值.

解 用

$$x = \frac{i}{n} \qquad y = \frac{j}{n} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n-1)$$

将积分域分成若干正方形，则

$$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}$$

其积分和为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\frac{1}{n^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}$$

所以 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \dfrac{1}{4}$.

3902. 用直线

$$x = 1+\frac{i}{n}, \qquad y = 1+\frac{2j}{n}(i,j = 0,1,\cdots,n)$$

把 $1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 3$，域分成若干矩形，写出此域内函数 $f(x,y) = x^2+y^2$ 的上$\overline{S}$ 下$\underline{S}$ 积分和.

当 $n\to\infty$ 时，这些和的极限等于什么？

解 上和为

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \frac{2n}{n^2}\left[n + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + n + \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2\right]$$

$$= \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

下和为 $\underline{S} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$

$$= \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S} = \lim_{n\to\infty}\underline{S} = \frac{40}{3}.$$

3903. 把积分域近似为系列内接正方形，且正方形的顶点 A_{ij} 位于整数点上，并且在离坐标起点最远的那些正方形顶点上选取被积函数值，近似的计算积分：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

将所得出的结果与积分精确值进行比较.

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3). 故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{34}} + \frac{2}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{2}{\sqrt{37}} + \frac{2}{\sqrt{44}} + \frac{1}{\sqrt{42}} + \frac{2}{\sqrt{49}} \approx 2.469$$

即 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\approx 9.876.$$

下面来计算积分的精确值，利用极坐标来计算.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{24+r^2}}$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13.194.$$

将精确值与近似值作比较，显然，误差很大，其原因在于有不少不是正方形的域被忽略，因而产生较大的绝对误 3.318 及较大的相对误差$\frac{3.318}{13.194}\approx 25\%$.

3904. 近似地计算积分$\iint\limits_S\sqrt{x+y}\mathrm{d}S$，式中 S 是受直线 $x=0$，$y=0$ 和 $x+y=1$ 限制的三角形，用直线 $x=$ 常数，$y=$ 常数，$x+y=$ 常数把 S 域分成四个相等的三角形，且在这些三角形的重心选取被积函数值.

解 以 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 及 $x+y=\frac{1}{2}$ 分域 S 即得四个相等的三角形，它的面积均为

$$\Delta S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

重心为$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$及$\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$，于是，此积分的近似值为 $\iint\limits_S\sqrt{x+y}\mathrm{d}S$

$$=\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)$$

$$\approx\frac{1}{8}(0.577+0.816+1.826)\approx 0.402.$$

3905. 把 $S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 域分成有穷个直径小于 δ 的可求积的子域 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$.

当 δ 为什么样的值时将保证以下不等式成立：

$$\left|\iint_S \sin(x+y)\mathrm{d}S - \sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right| < 0.001$$

式中$(x_i, y_i) \in \Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为 ω_i，则

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_S \sin(x+y)\mathrm{d}S - \sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i\Delta S_i\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]\mathrm{d}S\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|\,\mathrm{d}S \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}\omega_i\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta S_i
\end{aligned}$$

由于域 $S\{x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 的面积为 π，故只要 $\omega_i < \dfrac{0.001}{\pi}$ 即可，

而
$$\begin{aligned}
\omega_i &= \sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i \\ (x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}} |\sin(x'_i+y'_i)-\sin(x_i+y_i)| \\
&\leqslant \sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i \\ (x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}} |(x'_i+y'_i)-(x_i+y_i)| \\
&\leqslant \sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i \\ (x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}} [|x'_i-x_i|+|y'_i-y_i|] \\
&\leqslant 2\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i \\ (x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}} \sqrt{(x'_i-x_i)^2+(y'_i-y_i)^2} = 2\delta_i
\end{aligned}$$

故只要取

$$\delta < \frac{1}{2\pi}\times 0.001 \approx 1.6\times 10^{-4}$$

则有
$$\left|\iint_S (\sin(x+y))\mathrm{d}S - \sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right| < 0.001.$$

计算积分：

3906. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y$.

解 $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy = \int_0^1 \left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 dx$

$= \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}(x^2+x)\Big|_0^1 = 1.$

3907. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x xy^2\,dy.$

解 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x xy^2\,dy = \int_0^1 \frac{1}{3}xy^3\Big|_{x^2}^x dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx = \frac{1}{40}.$

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr.$

解 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi$

$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}.$

3909. 若R—矩形：$a\leqslant x\leqslant A, b\leqslant y\leqslant B$，并且函数$X(x)$和$Y(y)$在相应区间是连续的，证明不等式：

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy = \int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

证 将二重积分化为二次积分即得

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy$$

$$= \int_0^A dx\int_0^B X(x)Y(y)dy = \int_0^A X(x)dx\int_0^B Y(y)dy.$$

3910. 若$f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$，计算：

$$I = \int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy$$

解 $I = \int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy = \int_a^A F'_x(x,y)\Big|_b^B dx$

$= \int_a^A [F'_x(x,B) - F'_x(x,b)]dx$

需要全本请访问 www.ertongbook.co

$$= F(x,B)\Big|_a^A - F(x,b)\Big|_b^A$$
$$= F(A,B) - F(a,B) - F(A,b) + F(a,b).$$

3911. 令 $f(x)$ 为在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 的连续函数，证明不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

式中：当且仅当 $f(x)$ = 常数时等号才成立.

提示：研究积分：

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x) - f(y)]^2\mathrm{d}y$$

证 因为

$$0 \leqslant \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x) - f(y)]^2\mathrm{d}y$$
$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$
$$+ (b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y$$

所以 $$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

当 $f(x)$ 为常数时，显然上式中等号成立. 反之，设上式中等号成立，则

$$0 = \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x) - f(y)]^2\mathrm{d}y$$
$$= \iint_S [f(x) - f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I$$

其中 $$S = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b\}$$
$$F(x,y) = [f(x) - f(y)]^2$$

为 S 中的非负连续函数，若存在 $(x_0,y_0) \in S$ 使得 $F(x_0,y_0) > 0$，则存在一个包含 (x_0,y_0) 的小区域 (ΔS)，使得当 $(x,y) \in (\Delta S)$ 时

$$F(x,y) > \frac{F(x_0,y_0)}{2}$$

从而 $$I \geqslant \iint_{(\Delta S)} F(x,y) > \frac{F(x_0,y_0)}{2}\Delta S > 0$$

矛盾. 因此,在 S 上,$F(x,y)\equiv 0$,即 $f(x)=$ 常数.

3912. 积分具有什么样符号:

(1) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(3) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

解 (1) 因为

$$0\leqslant x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant 1$$

所以当 $|x|+|y|<1$ 时

$$\ln(x^2+y^2)<\ln 1=0$$

故
$$\iint\limits_{|x|+|y|}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x<0.$$

(2) 显然有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1-I_2-I_3$$

其中
$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt{x^2-y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时

$$0\leqslant\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\leqslant 1$$

故
$$0<I_1<\pi$$

同样
$$I_2>0$$

$$I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-2\pi=2\pi$$

因此 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$$

(3) $$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}}\arcsin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性知，上式第一个积分为零，在第二积分中，被积函数在积分域中为非负且不恒为零的连续函数，因而积分值是正的. 因此，原积分是正的.

3913. 在正方形中

$$0\leqslant x\leqslant\pi,\qquad 0\leqslant y\leqslant\pi$$

求函数 $f(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y$ 的平均值.

解 平均值为

$$I=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0\leqslant y\leqslant\pi}}\sin^2 x\cdot\sin^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x\right]^2$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}\right]^2=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

3914. 利用中值定理评价积分：

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$$

解 因为积分域的面积为 200，故由积分中值定理有

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}$$

其中(ξ,η)是域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 中的一个固定点，显然

$$0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 0$$

下面证明

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$$

事实上$\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$为有界闭区域 $|x|+|y|\leqslant 0$ 上的连

续函数，且

$$\frac{1}{102}\leqslant\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leqslant\frac{1}{100}$$

如果

$$\cos^2\xi+\cos^2\eta=2$$

则
$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\left(\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I-I=0$$

而
$$f(x,y)=\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102}$$

是非负的连续函数，从而

$$f(x,y)\equiv 0\qquad(|x|+|y|\leqslant 0)$$

即
$$\cos^2 x+\cos^2 y\equiv 2\qquad(|x|+|y|\leqslant 10)$$

这显然是不可能的. 故

$$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$$

同样
$$\cos^2\xi+\cos^2\eta>0$$

从而有
$$\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100}$$

即
$$1.96<I<2.$$

3915. 求圆

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$$

上的点到坐标起点之间的距离的平方平均值.

解 平均值为

$$I=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi R^2}\int_{b-R}^{b+R}\mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{R^2-(y-b)^2}}^{a+\sqrt{R^2-(y-b)^2}}x^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3\pi R^2}\int_{b-R}^{b+R}\left[(a+\sqrt{R^2-(y-b)^2})^3\right.$$

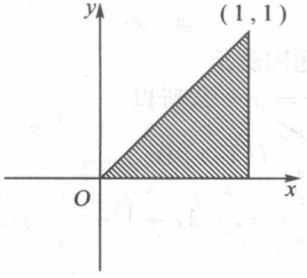
$$
\begin{aligned}
&-(a-\sqrt{R^2-(y-b)^2})^3\Big]\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{3\pi R^2}\Big[6a^2\int_{b-R}^{b+R}\sqrt{R^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}y\\
&\quad+2\int_{b-R}^{b+R}[R^2-(y-b)^2]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y\Big]\\
&=\frac{2a^2}{\pi R^2}\Big[\frac{y-b}{2}\sqrt{R^2-(y-b)^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{y-b}{R}\Big]\Big|_{b-R}^{b+R}\\
&\quad+\frac{2}{3\pi R^2}\Big\{\frac{y-b}{8}[5R^2-2(y-b)^2]\sqrt{R^2-(y-b)^2}\\
&\quad+\frac{3R^4}{8}\arcsin\frac{y-b}{R}\Big\}\Big|_{b-R}^{b+R}\\
&=\frac{2a^2}{\pi R^2}\cdot\frac{R^2}{2}\pi+\frac{2}{3\pi R^2}\cdot\frac{3R^4}{8}\pi\\
&=a^2+\frac{R^2}{4}
\end{aligned}
$$

同理有 $\dfrac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b^2+\dfrac{R^2}{4}$

于是 $I=a^2+b^2+\dfrac{R^2}{2}$.

在3916—3922题中，在二重积分$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中对于所指定的域$\Omega$，按照不同的顺序安置积分的上下限.

3916. Ω— 带有顶点$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$的三角形.



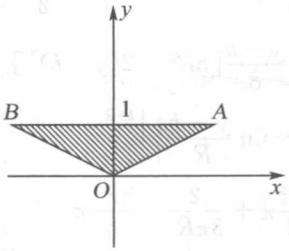
3916题图

解　为方便起见，以 I 记二重积 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

3917. Ω 为带有顶点 $O(0,0)$，$A(2,1)$，$B(-2,1)$ 的三角形.

解　如 3917 题图所示



3917 题图

OA 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$

OB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x$

于是
$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-2y}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-2}^0 \mathrm{d}x\int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y.$$

3918. Ω 为带有顶点 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,2)$，$C(0,1)$ 的梯形.

解　如 3918 题图所示

BC 的方程为 $y=x+1$，所以

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_{y-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

需要全本请访问 www.ertongbook.co