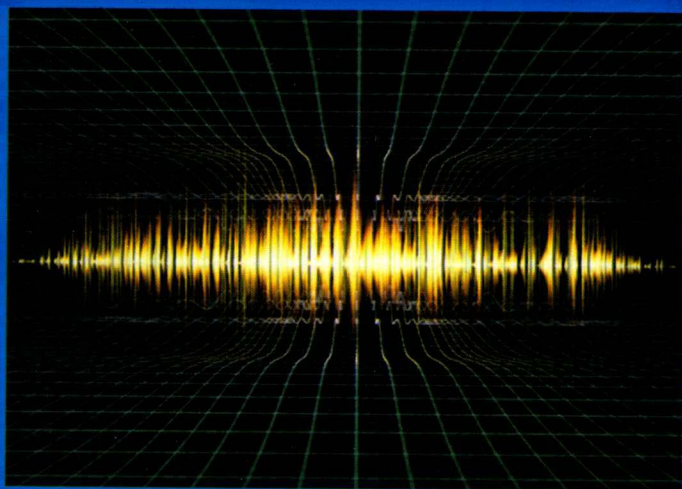


“十三五”普通高等教育规划教材

电磁场与电磁波

张成义 编著



含电子教案

<http://www.cmpedu.com>



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



“十三五”普通高等教育规划教材

电磁场与电磁波

张成义 编著



机械工业出版社

本书主要介绍电磁场和电磁波的基本规律。全书分 6 章编排, 内容包括电磁场的普遍规律、静态电磁场及其边值问题的解、时变电磁场、平面电磁波、平面波的反射与折射、电磁波的标量衍射理论等, 每章均含相应的例题和习题, 书末配有部分习题参考答案。

本书取材侧重于电磁波, 突出基本概念和基本规律的描述, 没有将数学知识单列一章, 而是把必备的数学工具融入教学中, 便于读者学习和掌握, 使内容更具可读性和普适性。

本书可作为电气信息类相关专业, 如光电信息科学与工程、电子信息工程、大气物理等专业的本科生教材, 同时也可作为上述相关专业研究生的参考资料。

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场与电磁波 / 张成义编著. —北京: 机械工业出版社, 2017.2
“十三五”普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-111-56241-2

I. ①电… II. ①张… III. ①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 042835 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 李馨馨 责任编辑: 李馨馨

责任校对: 张艳霞 责任印制: 李飞

北京玥实印刷有限公司印刷

2017 年 4 月第 1 版·第 1 次印刷

184mm×260mm·11.5 印张·276 千字

0001—2500 册

标准书号: ISBN 978-7-111-56241-2

定价: 36.80 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线: (010) 88379833

机工官网: www.cmpbook.com

读者购书热线: (010) 88379649

机工官博: weibo.com/cmp1952

教育服务网: www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网: www.golden-book.com

前 言

“电磁场与电磁波”是一门研究电磁场与电磁波的基本属性、描述方法、运动规律，以及与物质的相互作用及其应用的课程，它是电子、通信、微波、大气及生物医学等多学科的理论基础；同时也是光电信息科学与工程、电子信息工程、大气物理、电气工程与自动化、应用物理学等相关专业的核心主干课程。

从 20 世纪 90 年代起，我先后为本科生、研究生开设了“电磁场与电磁波”课程，在教学中，参考中外优秀教材和该学科的最新研究进展，形成了讲义并几易其稿。能编著一本深度与广度适当，又能反映这一领域教研成果的教材，是我一直以来的夙愿。

2013 年，《电磁场与电磁波》获南京信息工程大学重点建设教材（13JCLX012）立项，促使我潜心整理教学资料。在本书的编写过程中，考虑到这门课具有概念比较抽象、所用数学工具较多、与其他学科高度融合等特点，结合课内学时普遍压缩的实际情况，参考教育部 2012 版《普通高等学校本科专业目录》，做了如下尝试：

1. 取材侧重于电磁波，仅用第 2 章这一章的篇幅来研究静态电磁场及其边值问题；考虑到衍射既是电磁场重要的传播特征，也是电磁场基本方程的重要应用，而目前许多专业教学又不涉及衍射，因此，本书用第 6 章概括了电磁波的衍射与成像。

2. 将重要的数学公式列在正文中，并以此推演出相关的电磁场公式，最后再将这些数学公式按顺序列在附录中，以方便学生阅读。在电磁公式的推演过程中，力求物理意义明确、具有较强的可读性。

3. 突出基本概念和基本规律的描述，力求使本书更具普适性；加强了对极化状态的描述，以便大气物理、光电信息科学与工程等相关专业取舍。

4. 在书中安排了一定数量的插图、例题与习题，并在书末附有部分习题的参考答案。

5. 采用国际单位制，设计周学时为 3 学时或 4 学时。

学习本课程需要较多的数学知识，但它并非数学课，数学只是学习该课的工具，因此，本书没有将数学知识单列一章，而是把必备的数学工具融入各章节的教学中，便于学生学习和掌握，以增加本书的可读性。

在本书的编写过程中，得到了南京信息工程大学校内外许多同行给予的大力支持和帮助，与赵德林、顾斌、郑改革、徐林华、陈云云、刘玉柱、李金花等老师的多次教学讨论更使我受益匪浅；机械工业出版社的李馨馨老师组织、策划了本书的编辑工作，陈崇昱编辑的出色工作使本书增色不少；另外，我还得到了刘巧玲女士的支持和来自张修潼的鼓励；本书的出版还获得了南京信息工程大学重点教材建设立项支持，在此一并表示感谢！

由于笔者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

张成义

2016 年 9 月 20 日于南京

目 录

前言

第 1 章 电磁场的普遍规律	1
1.1 电荷与电场	1
1.1.1 库仑定律	1
1.1.2 电场与场强	2
1.1.3 静电场的通量与散度方程	2
1.1.4 静电场的旋度与旋度方程	4
1.2 电流与磁场	7
1.2.1 电流和电流密度	7
1.2.2 电荷守恒定律	8
1.2.3 安培定律	9
1.2.4 毕奥-萨伐尔定律	10
1.2.5 恒定磁场的通量与散度方程	11
1.2.6 恒定磁场的环流与旋度方程	12
1.3 麦克斯韦方程组	15
1.3.1 电磁感应定律	15
1.3.2 位移电流	16
1.3.3 真空中的麦克斯韦方程组	18
1.3.4 洛伦兹力公式	18
1.4 介质的电磁性质	19
1.4.1 介质的极化	19
1.4.2 介质的磁化	23
1.4.3 介质中的麦克斯韦方程组	26
1.4.4 介质中的本构方程	27
1.5 电磁场边值关系	28
1.5.1 法向边界条件	28
1.5.2 切向边界条件	29
1.6 电磁场的能量	31
1.6.1 场和电荷系统能量守恒定律的一般形式	31
1.6.2 电磁场能量密度和能流密度的表示式	32
1.7 习题	33
第 2 章 静态电磁场及其边值问题的解	36
2.1 边值问题的分类	36
2.2 标量格林定理和唯一性定理	37

2.2.1	标量格林定理	37
2.2.2	唯一性定理	37
2.3	稳恒电场分析	39
2.3.1	稳恒电场的位函数	39
2.3.2	稳恒电场的能量	42
2.3.3	求电场力的虚位移法	44
2.4	稳恒磁场分析	47
2.4.1	矢量磁位函数	47
2.4.2	库仑规范	47
2.4.3	标量磁位函数	48
2.4.4	稳恒磁场的能量	49
2.5	镜像法	50
2.5.1	点电荷对无限大平面的镜像	51
2.5.2	点电荷对无限大相交导体平面的镜像	53
2.5.3	点电荷对接地导体球面的镜像	54
2.5.4	线电荷对导体圆柱面的镜像	55
2.6	分离变量法	57
2.6.1	直角坐标系中的分离变量法	57
2.6.2	圆柱坐标系中的分离变量法	60
2.6.3	球坐标系中的分离变量法	61
2.7	习题	62
第3章	时变电磁场	65
3.1	时变电磁场的波动方程	65
3.1.1	麦克斯韦方程组	65
3.1.2	波动方程	66
3.2	时变电磁场的唯一性定理	69
3.3	时变电磁场的位函数	71
3.3.1	用位函数描述时变电磁场	71
3.3.2	位函数的微分方程	72
3.3.3	滞后位与超前位	75
3.4	时谐电磁场	76
3.4.1	场方程	76
3.4.2	时谐电磁场的能量及功率	79
3.4.3	时谐电磁场的位函数	80
3.5	习题	81
第4章	平面电磁波	83
4.1	理想介质中的均匀平面波	83
4.1.1	理想介质中的波方程	83
4.1.2	均匀平面波的传播特性	85

4.1.3	描述均匀平面波的物理参数	87
4.2	导电介质中的均匀平面波	90
4.2.1	导电介质中的电荷分布	91
4.2.2	导电介质中的波方程	91
4.2.3	导电介质中平面波的传播特性	93
4.2.4	描述导电介质中均匀平面波的物理参数	94
4.2.5	良介质与良导体	97
4.3	均匀平面波的极化特性	100
4.3.1	极化的概念	100
4.3.2	椭圆极化波	100
4.3.3	圆极化波	102
4.3.4	直线极化波	102
4.3.5	电磁波极化特性的工程应用	104
4.4	极化波的合成与分解	104
4.4.1	极化波的表示	104
4.4.2	用琼斯矢量表示极化态	106
4.4.3	极化波的合成与分解	107
4.5	相速和群速	109
4.6	习题	111
第5章	平面波的反射与折射	114
5.1	电磁波反射与折射的基本规律	114
5.1.1	反射定律 折射定律	115
5.1.2	反射波与折射波的电磁场矢量表示	116
5.1.3	反射系数与透射系数	117
5.2	均匀平面波对平面边界的垂直入射	122
5.2.1	相关描述	122
5.2.2	均匀平面波对理想导体的垂直入射	125
5.2.3	均匀平面波对一般导电介质的垂直入射	127
5.2.4	均匀平面波对理想介质的垂直入射	128
5.3	均匀平面波对分层介质平面的垂直入射	132
5.3.1	输入波阻抗	132
5.3.2	均匀平面波在多层介质中的传播	132
5.3.3	三层介质的重要应用	135
5.4	均匀平面波对不同介质分界的斜入射	136
5.4.1	垂直极化波的反射与折射	136
5.4.2	平行极化波的反射与折射	137
5.4.3	反射情况分析	138
5.5	平面波对理想导体表面的斜入射	139
5.5.1	折射定律的修正	139

5.5.2	垂直极化平面波对理想导体表面的斜入射	141
5.5.3	平行极化平面波对理想导体表面的斜入射	143
5.6	等离子体中的平面波	146
5.7	铁氧体中的平面波	146
5.8	习题	146
第 6 章	电磁波的标量衍射	149
6.1	亥姆霍兹-基尔霍夫衍射定理	150
6.1.1	电磁场的波动方程	150
6.1.2	从矢量衍射理论到标量衍射理论	151
6.1.3	亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理	152
6.2	平面衍射屏的基尔霍夫公式	154
6.2.1	积分定理的应用	154
6.2.2	基尔霍夫边界条件	155
6.2.3	菲涅耳-基尔霍夫衍射公式	156
6.3	瑞利-索末菲衍射公式	158
6.3.1	格林函数的其他选择	158
6.3.2	瑞利-索末菲衍射理论	160
6.3.3	基尔霍夫理论与瑞利-索末菲理论的比较	160
6.3.4	基尔霍夫公式的进一步分析	161
6.4	菲涅耳衍射与夫琅禾费衍射	162
6.4.1	初步的近似处理	163
6.4.2	菲涅耳衍射	163
6.4.3	夫琅禾费衍射	164
6.5	习题	166
附录		168
附录 A	矢量基本运算公式	168
A.1	常用的基本运算公式	168
A.2	各章中出现的基本运算公式	168
附录 B	常用函数	169
B.1	狄拉克 (Dirac) δ 函数	169
B.2	几个初等函数	169
附录 C	基本数学公式	170
C.1	傅里叶变换	170
C.2	卷积的定义及傅里叶变换	170
C.3	常用傅里叶变换公式	170
附录 D	常用物理常数	170
附录 E	部分习题参考答案	171
参考文献		176

第 1 章 电磁场的普遍规律

电磁场的三大实验定律，即库仑定律、安培定律和法拉第电磁感应定律的提出，预示着人类对电磁现象的认识从定性阶段走向了定量阶段。以三大定律为基础，麦克斯韦提出了两个基本假设：有旋电场和位移电流，进而归纳出麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组描述了宏观电磁现象，预示了变化的电磁场互相激发，形成电磁波，其后的赫兹实验支持了电磁波理论。

本章首先介绍电磁场的源量，即电荷与电流；再从基本实验定律出发，引入场量并讨论其旋度和散度；最后基于麦克斯韦的有旋电场和位移电流假设，概括出麦克斯韦方程组。

1.1 电荷与电场

1.1.1 库仑定律

自然界存在着两种性质的电荷，一种与用丝绸摩擦过的玻璃棒上的电荷相同，叫正电荷；另一种与用毛皮摩擦过的火漆棒上的电荷相同，叫负电荷。同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引，将异种电荷放在一起，它们的电荷量有互相抵消的效果。

1785 年，法国科学家库仑经扭秤实验总结出：真空中静止点电荷 Q 对另一静止点电荷 q 的作用力 F 满足如下规律

$$F = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r \quad (1-1)$$

式中， r 是两点电荷的间距； ϵ_0 为真空电容率； e_r 是由 Q 指向 q 的单位矢量。

当真空中存在多个静止点电荷 $Q_i (i=1, 2, \dots)$ 时，因各点电荷 $Q_i (i=1, 2, \dots)$ 对 q 的作用具有独立性，依据叠加原理，点电荷 q 受到的作用力 F 满足如下规律

$$F = \sum_i F_i = q \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} e_{r_i} \quad (1-2)$$

式中， r_i 是 Q_i 与静止点电荷 q 的间距； e_{r_i} 是由 Q_i 指向 q 的单位矢量，不同 Q_i 指向 e_{r_i} 是不同的。

对连续分布电荷 Q ，可将其视为元电荷 dQ 的积分，即 $Q = \int dQ = \int_V \rho dV'$ ，而每一元电荷 dQ 可看成是点电荷，于是，式 (1-2) 可改写为

$$F = \int dF = q \int \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r \quad (1-3)$$

1.1.2 电场与场强

按照电场的观点, 将点电荷 q 视为检验电荷, q 所受到的作用力来源于电场, 而检验电荷所在位置的电场是由其他电荷产生的, 我们将产生电场的电荷称为源电荷。定义源电荷所产生的电场的电场强度为

$$\mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (1-4)$$

其物理意义是, 场点处单位正电荷所受的电场力。按照这个定义, 可分别写出场源电荷是点电荷源、分立电荷源和连续电荷源三种情况下, 检验电荷 q 所在场点处的电场强度为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{e}_{ri} = \sum_i \frac{Q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \\ \int_{V'} \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r = \int_{V'} \frac{\rho dV' \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases} \quad (1-5)$$

式 (1-5) 给出了三种静态场源产生的电场, 称为静电场。依据两点间的距离公式, 场源电荷 Q 到场点的距离 r 为

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (1-6)$$

场源电荷 Q_i 到场点的距离 r_i 为

$$r_i = \sqrt{(x-x'_i)^2 + (y-y'_i)^2 + (z-z'_i)^2} \quad (1-7)$$

式中, (x, y, z) 为场点的坐标; (x', y', z') 为源电荷 Q 的坐标; (x'_i, y'_i, z'_i) 为源电荷 Q_i 的坐标。

如图 1-1 所示, 用矢量 \mathbf{R} 表示场点 P 对某参考点的位矢, 用 \mathbf{R}' 表示源点对某参考点的位矢, 则场点 P 对源点的相对位矢 \mathbf{r} 满足

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}' \quad (1-8)$$

静电场是一个矢量场, 基本物理量是电场强度 \mathbf{E} 。场论指出, 一个矢量场可由它的散度和旋度来确定。下面先讨论静电场的散度, 再讨论静电场的旋度。

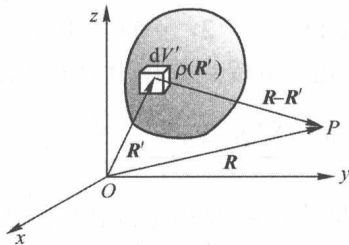


图 1-1 源电荷对检验电荷的作用

1.1.3 静电场的通量与散度方程

场论中将矢量 \mathbf{f} 对某曲面 S 的面积分 $\int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$, 叫作该矢量对曲面的通量, 同样, 对某

封闭曲面 S , 定义面积分 $\oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ 为矢量场对于该闭合曲面的通量。将 \mathbf{f} 换成电场强度矢量 \mathbf{E}

即可定义电场强度的通量, 该通量简称电通量。下面给出电通量满足的规律。

依据数学中的高斯公式, 对某封闭曲面 S , 任意矢量 \mathbf{f} 的通量满足

$$\oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV \quad (1-9)$$

式中, V 是该封闭曲面 S 所围空间体积; ∇ 为梯度算符; $\nabla \cdot \mathbf{f}$ 表示对矢量 \mathbf{f} 取散度。

用 \mathbf{E} 取代高斯公式中的矢量 \mathbf{f} 可得电通量满足的高斯公式

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV \quad (1-10)$$

由电通量的高斯公式, 可求静电场中电场强度的散度 $\nabla \cdot \mathbf{E}$, 从而获得静电场的高斯定理。下面进行具体分析。

将式 (1-5) 代入 $\nabla \cdot \mathbf{E}$, 可求得电场强度的散度 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 。注意到梯度算符为

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-11)$$

在直角坐标系下, 电场强度可表达如下

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x + \mathbf{e}_y E_y + \mathbf{e}_z E_z$$

因此, 电场强度的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

由式 (1-5), 得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ \nabla \cdot \left(\sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{e}_{ri} \right) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right) \\ \nabla \cdot \left(\int_{V'} \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \right) = \int_{V'} \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \end{cases}$$

可见, 仅需计算出形如 $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$ 的结果, 然后代入上式即可求得静电场的散度。依据场论, 对任意矢量 \mathbf{f} 及任意标量 φ , 恒有

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{f}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{f} + (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{f} \quad (1-12)$$

于是

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right)$$

即

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \right)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) = \frac{3}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r})(-3)}{|\mathbf{r}|^5} \quad (1-13)$$

当 $|\mathbf{r}| = |\mathbf{R} - \mathbf{R}'| \neq 0$ 时, 上式为零; 而当 $|\mathbf{r}| = |\mathbf{R} - \mathbf{R}'| = 0$, 即源点与场点趋于重合时, 上式趋于无限大, 没有确定的数值, 上述特征符合 δ 函数的特点。注意到

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (1-14)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} \right)$$

将上式代入连续电荷分布时的 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 中, 得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \int_{V'} \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \int_{V'} \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} \right) \right]$$

但是

$$-\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} \right) = (4\pi)\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \quad (1-15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{R}') dV' (4\pi)\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \frac{\rho(\mathbf{R})}{\epsilon_0}$$

即

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-16)$$

将式 (1-16) 代入电场强度的高斯公式, 得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1-17)$$

式 (1-16) 为微分形式的高斯定理, 它从微观角度反映了静电场特征; 式 (1-17) 为积分形式的高斯定理, 它从宏观角度反映了静电场的特征。

1.1.4 静电场的旋度与旋度方程

在场论中, 将矢量 \mathbf{f} 沿着某曲线的线积分 $\int_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$ 叫作该矢量对曲线的环流, 对某闭合曲线 L , 定义线积分 $\oint_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$ 为矢量场对于该闭合曲线的环流。现将 \mathbf{f} 换成静电场的电场强度 \mathbf{E} , 即可定义电场强度 \mathbf{E} 的环流, 由于 \mathbf{E} 是作用于单位电荷上的力, 所以环流就是对单位电荷所做的功。

下面讨论静电场对闭合曲线的环流所满足的规律。

依据数学上的斯托克斯公式, 对某闭合曲线 L , 任意矢量 \mathbf{f} 的环流满足

$$\oint_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1-18)$$

式中, S 是以该闭合曲线 L 为边的任意曲面; ∇ 为梯度算符; $\nabla \times \mathbf{f}$ 表示对矢量 \mathbf{f} 取旋度。用 \mathbf{E} 取代式 (1-18) 中的矢量 \mathbf{f} , 即为静电场的斯托克斯公式, 即

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1-19)$$

由此可见, 只要求得电场强度的旋度 $\nabla \times \mathbf{E}$ 与场源电荷的关系, 即可获得静电场的旋度方程。下面进行具体的分析。

由式 (1-5), 考虑到梯度算符仅对场点坐标进行运算, 有

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{cases} \nabla \times \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ \nabla \times \left(\sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{e}_{ri} \right) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right) \\ \nabla \times \left(\int_{V'} \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \right) = \int_{V'} \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \end{cases}$$

考虑到式 (1-14), 即 $\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$, 上式可以改写成

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{cases} \nabla \times \left[-\nabla \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \right] \\ \nabla \times \left[-\nabla \left(\sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right) \right] \\ \nabla \times \left[-\nabla \left(\int_{V'} \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \right] \end{cases}$$

$$\text{令 } \varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \\ \int_{V'} \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0 r} \end{cases} \quad (1-20)$$

$\nabla \times \mathbf{E}$ 可以写成 $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (-\nabla \varphi)$ 的形式, 依据场论, 对任意标量 φ 恒有

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \mathbf{0} \quad (1-21)$$

所以, 有

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1-22)$$

将式 (1-22) 代入式 (1-19), 得到

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-23)$$

式(1-22)为微分形式的环路定理,它从微观角度反映了静电场特征;式(1-23)为积分形式的环路定理,它从宏观角度反映了静电场的特征。

这里强调指出,式(1-20)给出的标量 φ 依次称为点电荷的电位函数、点电荷系的电位函数、连续分布电荷系的电位函数。

从上面的讨论不难看出,电场强度 \mathbf{E} 与电位函数的关系是

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (1-24)$$

即电场强度可以表为电位函数的负梯度。

例题 1.1 如图 1-2 所示,一对电量相等的正、负电荷相距为 l ,构成一个电偶极子系统,系统到场点 P 的距离远大于系统的尺度,试求该系统的电场分布规律。

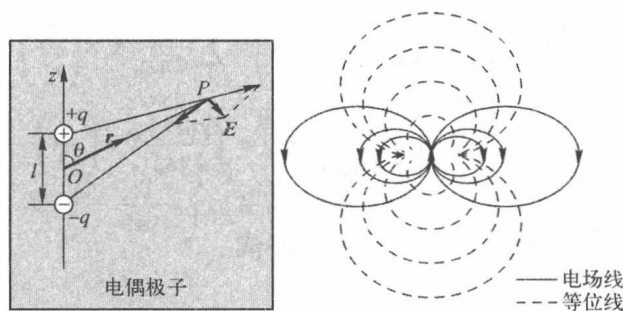


图 1-2 电偶极子及其电场分布

解 定义电偶极矩矢量为

$$\mathbf{p} = ql\mathbf{e}_z$$

该矢量是一个大小等于 ql ,方向由负电荷指向正电荷的矢量,取该方向为坐标 z 轴,根据式(1-20),电偶极子的电势可表为

$$\varphi = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$r_- - r_+ \approx l \cos\theta$$

$$\varphi = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{ql \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

在球坐标系下,梯度算符为

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

根据式(1-24),结合上式,得

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta)$$

1.2 电流与磁场

1.2.1 电流和电流密度

带电粒子的定向运动形成电流，提供电流的带电粒子称为载流子，金属导体中的载流子就是自由电子，电解液中的载流子就是正、负离子，而电离气体中的载流子是正、负离子和电子。

为了描述电流的强弱，定义单位时间内通过某截面的电荷量为电流，用符号 I 表示。

考虑如图 1-3 所示的某闭合空间。现考虑右侧的平面，设在 dt 时间内通过该面的电量为 dq ，按电流的定义，通过该截面的电流为

$$I = \frac{dq}{dt}$$

电流是一个宏观量，经常遇到在导电体的不同部位具有不同电流分布的情况，如在图 1-3 中，左、右两面的电流相同，但因面积的大小不同，故电流的分布不同；另外，在导电体内各个不同点，电荷的流动方向也不同。可见，用电流还是不能完整地描述电荷流动的实际情况，需要引入某一微观量来对其进行更加细致地描述，而这一微观物理量就是电流密度矢量 \mathbf{J} 。定义该矢量在导电体中各点的方向代表该点的正电荷运动方向，数值上等于通过该点垂直于正电荷运动方向的单位横截面的电流。

在图 1-3 中，在导电体中的某点取一面元 $d\mathbf{S}$ ，该面元所在位置的电流密度矢量用 \mathbf{J} 表示，设 \mathbf{J} 与 $d\mathbf{S}$ 间的夹角为 α ，通过该面元的电流为 $dI = \frac{dQ}{dt}$ ，由电流密度矢量 \mathbf{J} 的定义，有

$$\mathbf{J} = \frac{dI}{dS \cos \alpha} \quad (1-25)$$

$$dI = \mathbf{J} dS \cos \alpha = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-26)$$

上式表示电流密度与电流的关系为通量关系。在大块导电体中，各点电流密度 \mathbf{J} 有不同的大小和方向，构成了电流密度场 \mathbf{J} ，简称电流场。对如图 1-4 所示的导电体中任意面积 S ，通过的电流 I 和电流密度矢量 \mathbf{J} 的关系为

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-27)$$

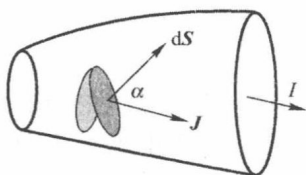


图 1-3 电流

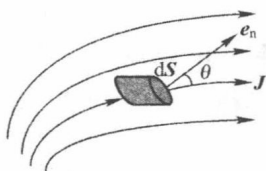


图 1-4 电流密度通量

1.2.2 电荷守恒定律

电流场 \mathbf{J} 的一个基本性质就是它的连续性, 该性质可用连续方程表示, 下面将会看到, 连续方程的实质就是电荷守恒定律。

设想图 1-3 是一个封闭曲面所围体积, 则由式 (1-27), 通过该封闭曲面的电流为

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

该积分表示对封闭曲面的积分。注意到电流密度的通量是一个代数量, 可取正值、负值和零, 而通常情况下, 闭合曲面向外的法向为正。因此该积分的物理意义是: 单位时间内通过该闭合曲面向外流出的电荷。依据电荷守恒定律, 单位时间内通过该闭合曲面向外流出的电荷应等于同一时间段闭合曲面里减少的电荷。按数学习惯, 用 $\frac{dQ}{dt}$ 表示单位时间内电荷的增加, 那么, 单位时间内电荷的减少就应该表为 $-\frac{dQ}{dt}$ 。于是, 单位时间内通过该闭合曲面向外流出的电荷等于同一时间段内闭合曲面内减少的电荷, 可表示为

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (1-28)$$

式 (1-28) 就是积分形式的电流场 \mathbf{J} 的连续性方程, 即积分形式的电荷守恒定律。

就图 1-3 所示的闭合曲面 S 所围的空间体积 V 而言, V 内的电荷体密度 ρ 一般是位置和时间的函数, 某一时刻 V 内的总电荷 Q 应等于 ρ 的体积分, 即满足

$$Q = \int_V \rho dV$$

再考虑式 (1-9), 即

$$\oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV$$

用 \mathbf{J} 取代上式中的 \mathbf{f} 并应用式 (1-28), 得

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV = -\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right)$$

在非相对论情况下, 交换上式右端对空间和对时间的运算次序, 不影响计算结果; 再考虑到 ρ 既依赖于时间坐标又依赖于空间坐标, 而交换次序后, 仅需对 ρ 进行时间运算, 故将直接导数变成偏导, 于是有

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

使上式对任意体元 dV 均成立, 必有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (1-29)$$

式(1-29)就是微分形式的电流场 \mathbf{J} 的连续性方程, 即微分形式的电荷守恒定律。

若闭合曲面 S 所围空间体积 V 内的电荷不随时间而变化, 即式(1-28)、式(1-29)对时间的微分项为零, 则可得

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1-31)$$

设闭合曲面 S 由 S_1 和 S_2 两部分构成, 则式(1-30)可改写为

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

对闭合曲面 S 而言, 若将流出的电流视为正, 流入的电流视为负, 那么 S_1 对应流出的电流, S_2 对应流入的电流, 流入和流出相抵, 恰好反映了恒定电流的特征, 因此, 式(1-30)反映了积分形式的恒定电流。类似地, 式(1-31)反映了微分形式的恒定电流。

1.2.3 安培定律

19世纪20年代前, 对电和磁的研究是独立发展的。1820年丹麦科学家奥斯特发现了电流的磁效应, 揭开了电与磁的联系。同一时期, 安培提出了运动电荷产生磁, 而磁又对运动着的电荷发生作用。

前已提及, 在电现象的研究中, 有人曾经指出: 电荷之间的相互作用是通过电场实现的; 同样, 在磁现象的研究中, 科学家认为: 运动的电荷, 即电流将激发磁场, 而磁作用是通过磁场来实现的。

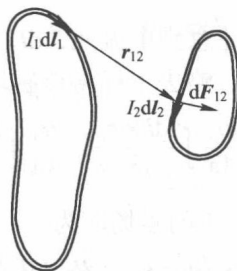


图 1-5 两载流线圈互作用

安培于 1820 年通过实验给出了载流回路 1 对载流回路 2 作用规律的安培公式, 后经多位科学家修正、加工, 得到现在的安培定律, 即

$$\mathbf{F}_{12} = \oint d\mathbf{F}_{12} = \oint I_2 d\mathbf{l}_2 \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{(I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{12})}{r_{12}^2} \right] \quad (1-32)$$

安培定律中出现的物理量可参考图 1-5 说明。该图中, 我们在载流线圈 1 上取电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$, 在载流线圈 2 上取电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$, 让 $d\mathbf{l}_1$ 和 $d\mathbf{l}_2$ 指向其所在处的电流方向, μ_0 为真空磁导率, 且 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$, \mathbf{e}_{12} 表示由电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 指向电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的单位矢量, $d\mathbf{F}_{12}$ 表示电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 对电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的作用力。

按照力的叠加原理, 载流线圈 2 受到的作用力是它上面所有电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 所受作用力的