非光滑多目标规划最优性理论及方法

王金鹤　孟凡云　庞丽萍　著

Optimality Theory and Methods for Nonsmooth Multiobjective Programming

科学出版社

非光滑多目标规划最优性理论及方法

王金鹤　孟凡云　庞丽萍　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要研究非光滑多目标规划问题，借助广义函数集值映射，讨论广义函数的多目标优化问题，建立该问题的充分条件、必要条件以及对偶定理；针对参数变分不等式约束和二阶锥广义方程约束的多目标优化问题，利用变分分析，建立问题的最优性条件；对基于参数变分不等式约束的多目标优化问题，借助扰动分析，讨论问题的 KKT 点的渐近收敛性；提出求解非光滑均衡问题的近似束方法，进行算法的收敛性分析.

本书适合运筹学、经济学、计算机及其相关专业的高年级本科生、研究生和教学科研工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

非光滑多目标规划最优性理论及方法/王金鹤，孟凡云，庞丽萍著. —北京：科学出版社，2020.3

ISBN 978-7-03-064459-6

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①王…②孟…③庞… Ⅲ. ①多目标(数学)-数学规划-研究 Ⅳ. ①O221.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020) 第 028716 号

责任编辑：姜 红 常友丽／责任校对：杨聪敏

责任印制：吴兆东／封面设计：无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2020 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2020 年 3 月第一次印刷 印张：8 3/4

字数：176 000

定价：99.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

自法国经济学家 V. Pareto 提出多目标最优化概念以来, 经历一个多世纪的努力, 多目标最优化问题取得了巨大进展, 但仍存在诸多悬而未决的问题. 多目标规划已经成了运筹学中一个重要分支, 在经济、工程、生产调度等方面都有重要的应用. 例如, 生产企业在制订生产计划时, 要同时兼顾产品利润、生产工艺复杂度、市场占有率和投资计划等目标; 消费者在购买商品时, 要同时兼顾商品价格、颜色偏好、商品性能和商品急需性等目标; 开发者在规划软件系统时, 要同时兼顾软件系统的生命周期、开发成本、系统性能和系统可靠性等目标. 当需要在多个目标之间做出取舍决定时, 就应当采取最优决策. 考虑目标问题的角度不同, 采用的最优决策方法也不同, 研究快速有效地求解多目标规划问题的最优决策方法具有重要的理论意义和实用价值.

本书分析广义函数的多目标优化问题, 提出参数变分不等式约束和二阶锥广义方程约束的多目标优化问题, 讨论基于参数变分不等式约束的多目标优化问题 KKT 点的渐近收敛性, 提出求解非光滑均衡问题的近似束方法. 本书第 1 章和第 2 章分别给出了变分分析基础和多目标规划基础. 第 3 章研究了广义函数多目标规划的充分条件和必要条件, 讨论了广义函数多目标规划的对偶问题. 第 4 章和第 5 章分别提出了基于参数变分不等式约束和二阶锥广义方程约束的多目标优化问题的最优性条件. 第 6 章研究了基于参数变分不等式约束的随机多目标优化问题 KKT 点的渐近收敛性. 第 7 章提出了求解非光滑均衡问题的近似束方法. 在本书出版过程中, 感谢王培良、李祖欣、潘国祥等老师提出的宝贵意见, 王斌、李道全、张楠、巩玉玺等老师以及田玉铢、张明堃、肖泽昊、王帅等同学协助完成了书稿的文字编辑和校正工作, 在此表示感谢.

本书得到了国家自然科学基金项目"DNA 扩增反应室试管反应液热流状态规律及温度响应动态特性机理研究"（项目编号：31271077）、"基因循环扩增热传递机理研究"（项目编号：31070893）以及省市级科技项目"一类随机多目标优化问题(弱) Pareto 有效解集上的最优化方法研究"（项目编号：ZR2019BA014）、"基于 Agent 技术的智能制造过程计算机仿真关键技术研究"（项目编号：2019GGX104089）、"基于分布式光纤 SPR 传感技术的 PCR 反应计算机控制过程特征提取方法研究"（项目编号：J17KA061）、"分布式智能制造系统过程控制技术研究"（项目编号：2016GY03）的资助, 在此一并致谢.

由于作者水平有限, 本书难免存在不妥之处, 欢迎读者批评指正.

作　者

2019 年 1 月

主要符号和缩写

$\mathbb{R}^n$	n 维实数的空间
$\mathbb{R}^n_+$	n 维实数的空间的非负卦限
K°	闭凸锥 K 的极锥
x^{T}	向量 x 的转置
$\operatorname{conv} C$	集合 C 的凸包
$\operatorname{dom} f$	函数 f 的有效域
$\mathcal{J}F$	映射 F 的 Jacobian 矩阵
∇f	函数 f 的梯度列向量
∂f	凸函数 f 的次微分
$\operatorname{bd} \Omega$	集合 Ω 的边界
$\operatorname{int} \Omega$	集合 Ω 的内部
$\operatorname{ri} \Omega$	集合 Ω 的相对内部
$\operatorname{cl} \Omega$	集合 Ω 的闭包
$\delta(\cdot \mid C)$	凸集合 C 上的指示函数
$\mathcal{T}_C(x)$	凸集合 C 在 x 点处的切锥
$\mathcal{N}_C(x)$	凸集合 C 在 x 点处的法锥
$\mathbb{E}[\xi]$	随机变量 ξ 的数学期望
$\times_{i=1}^n C_i$	集合 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的笛卡儿积

目　录

第1章　变分分析基础

本章主要给出后续章节所需的凸分析和变分分析的基础知识. 其中, 凸分析基础主要给出了凸集和凸函数的相关理论, 主要用于多目标规划的转化; 变分分析基础主要给出了集值映射的极限等基本概念, 主要用于定义集合的切锥和法锥, 进而刻画一阶最优性条件.

1.1　凸分析基础

本节主要给出了凸分析中的一些重要概念及结论, 主要包括: 凸集、凸锥、凸集分离定理、凸函数及其基本性质、次微分等. 为方便起见, 这里主要引述 Rockafellar 等[1] 和冯德兴[2] 的定义和结论.

对于 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 经过 x 与 y 的直线可以表示为

$$(1-t)x + ty, t \in \mathbb{R},$$

连接 x 与 y 的线段, 记为 $[x, y]$, 可表示为

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty | t \in [0, 1]\}.$$

设 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是子集合, 若对任意 $x \in M, y \in M, t \in \mathbb{R}$, 均有 $(1-t)x + ty \in M$, 则称 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的一仿射集合.

设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是集合, 包含 C 的最小的仿射集合被称为 C 的仿射包, 记为 $\mathrm{aff}\, C$. 若 $C \subset \mathbb{R}^n$ 包含原点, 被 C 包含的最大的线性子空间被称为 C 的线空间, 记为 $\mathrm{lin}\, C$. 设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是集合, 如果对任意的 $x \in C, y \in C$, 均有 $[x, y] \subset C$, 则称 C 是凸集合. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是集合, 如果对任意的 $x \in K, t > 0$, 均有 $tx \in K$, 则称 K 是锥, 如果 K 还是凸集合, 则称 K 是凸锥.

设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是一凸集合, 则它的闭包、内部、相对内部、相对边界分别表示为

$$\begin{gathered}
\mathrm{cl} C = \bigcap_{\varepsilon > 0} (C + \varepsilon B), \\
\mathrm{int} C = \{x | \exists \varepsilon > 0, x + \varepsilon B \subset C\}, \\
\mathrm{ri} C = \{x \in \mathrm{aff} C | \exists \varepsilon > 0, (x + \varepsilon) B \cap \mathrm{aff} C \subset C\}, \\
\mathrm{rbd} C = (\mathrm{cl} C) \backslash (\mathrm{ri} C).
\end{gathered}$$

下面介绍两个凸锥的基本定理.

定理 1.1[2] 集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为凸锥的充分必要条件是

$$\lambda x + \mu y \in K, \forall \lambda, \mu > 0.$$

定理 1.2[2] 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是任一非空子集, M 为 K 的所有正线性组合 (即在线性组合 $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ 中诸系数 λ_i 都是正的) 构成的集合, 那么 M 是包含 K 的最小的凸锥.

凸集的分离是凸分析中重要的概念之一, 它所基于的基本事实是: $\mathbb{R}^n$ 中的一个超平面正好把 $\mathbb{R}^n$ 一分为二, 并且此超平面的补集恰好是与其关联的两个不相交的开凸集 (即两个半开空间) 之并.

$\mathbb{R}^n$ 上的任一线性泛函 f 对应于 $\mathbb{R}^n$ 中唯一点 x^*, 使得

$$f(x) = \langle x, x^* \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathbb{R}^n$ 中任一超平面 H 都可以表示成

$$H(x^*, \beta) := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, x^* \rangle = \beta\},$$

式中, $x^* \in \mathbb{R}^n$ 为非零元; $\beta \in \mathbb{R}$.

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的子集 A 和超平面 $H(f, \alpha)$, 我们称集合 A 位于超平面 $H(f, \alpha)$ 的一侧, 是指

$$f(x) \leqslant \alpha, \forall x \in A,$$

或者

$$f(x) \geqslant \alpha, \forall x \in A.$$

给定 $\mathbb{R}^n$ 中两个子集 A 和 B 以及一个超平面 $H = H(f, \alpha)$. 我们称 A 和 B 被超平面 H 所分离, 是指它们分别位于 H 的两侧, 确切地说, 就是

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y), \forall x \in A, \forall y \in B, \tag{1.1}$$

或者

$$f(x) \geqslant \alpha \geqslant f(y), \forall x \in A, \forall y \in B. \tag{1.2}$$

集合 A 和 B 被超平面 $H(f, \alpha)$ 真分离, 是指式 (1.1) 或者式 (1.2) 成立, 同时式 (1.1) 或者式 (1.2) 不可能总是等号成立; 集合 A 和 B 被超平面 $H(f, \alpha)$ 严格分离, 是指

$$f(x) < \alpha < f(y), \forall x \in A, \forall y \in B,$$

或者

$$f(x) > \alpha > f(y), \forall x \in A, \forall y \in B.$$

集合 A 和 B 被超平面 $H(f,\alpha)$ 强分离, 是指存在一实数 $\varepsilon>0$, 使得

$$f(x)\leqslant\alpha-\varepsilon<\alpha+\varepsilon\leqslant f(y),\forall x\in A,\forall y\in B,$$

或者

$$f(y)\leqslant\alpha-\varepsilon<\alpha+\varepsilon\leqslant f(x),\forall x\in A,\forall y\in B.$$

定理 1.3[2] 设 A 和 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非空子集. 那么 A,B 能用一个超平面分离的充分必要条件是存在一非零向量 $f\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$\inf\{\langle x,f\rangle|x\in A\}\leqslant\sup\{\langle y,f\rangle|x\in B\};\tag{1.3}$$

A,B 能用一个超平面真分离的充分必要条件是存在一非零向量 $f\in\mathbb{R}^n$ 满足式 (1.3)及

$$\sup\{\langle x,f\rangle|x\in A\}>\inf\{\langle y,f\rangle|x\in B\};$$

而 A,B 能用一个超平面强分离的充分必要条件是存在一非零向量 $f\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$\inf\{\langle x,f\rangle|x\in A\}>\sup\{\langle y,f\rangle|x\in B\}.$$

定理 1.4[2] 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非空相对开凸子集, M 是一个非空仿射集, 满足 $A\cap M=\varnothing$. 那么必定存在一个超平面 $H(f,\alpha)$ 使得 $M\subset H(f,\alpha)$, 并且 A 位于与超平面 $H(f,\alpha)$ 相关联的一个半开空间, 即

$$f(x)<\alpha,\forall x\in A,$$

或者

$$f(x)>\alpha,\forall x\in A.$$

设 $f:\mathbb{R}^n\to\bar{\mathbb{R}}$ 是增广实值函数, f 的上图定义为

$$\mathrm{epi}f=\{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^{n+1}|f(x)\leqslant\alpha\};$$

f 的有效域定义为

$$\mathrm{dom}f=\{x|f(x)<+\infty\}.$$

称函数 f 是正常的, 如果存在 $x\in\mathrm{dom}f$, 且对任意的 x, 均有 $f(x)>-\infty$. 若 f 不是正常的, 则称它是非正常的.

如果上图 epi f 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的凸子集, 则称函数 f 是凸函数.

命题 1.1[1] 设 $C\subset\mathbb{R}^n$ 是一凸集合, $f:C\to\bar{\mathbb{R}}$ 是一增广实值函数. 则 f 是 C 上的凸函数的充分必要条件是对任意的 $x\in C,y\in C$, 有

$$f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)f(x)+tf(y),0<t<1.$$

命题 1.2[1]　设 $f:\mathbb{R}^n\to\bar{\mathbb{R}}$ 是一增广实值函数, 则 f 是凸函数的充分必要条件是只要 $f(x)<\alpha, f(y)<\beta$, 必有

$$f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)\alpha+t\beta, 0<t<1.$$

设 $f:\mathbb{R}^n\to\bar{\mathbb{R}}$ 是增广实值函数, 称 f 在 x 处是下半连续的, 如果

$$f(x)\leqslant\liminf_{y\to x}f(y).$$

命题 1.3[1]　设 $f:\mathbb{R}^n\to\bar{\mathbb{R}}$ 是一增广实值函数. 则下述条件等价:

(1) f 在 $\mathbb{R}^n$ 上是下半连续的;

(2) 对每一 $\alpha\in\mathbb{R}$, $\{x|f(x)\leqslant\alpha\}$ 是闭集合;

(3) epi f 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的闭子集.

上图是 cl(epi$f$) 的函数, 记为 lsc$f$, 称为 f 的下半连续包, 即

$$\mathrm{epi}(\mathrm{lsc}f)=\mathrm{cl}(\mathrm{epi}f).$$

f 的闭包记为 cl$f$, 定义为

$$(\mathrm{cl}f)(x)=\begin{cases}(\mathrm{lsc}f)(x), & \text{若 } \mathrm{lsc}f>-\infty,\\ -\infty, & \text{否则}.\end{cases}$$

若 lsc$f$ 是正常函数, 则 $\mathrm{cl}f=\mathrm{lsc}f$.

设 $f:\mathbb{R}^n\to\bar{\mathbb{R}}$ 为凸函数, 称向量 $x^*\in\mathbb{R}^n$ 为 f 在 x 处的一个次梯度, 是指它满足

$$f(z)\leqslant f(x)+\langle x^*,z-x\rangle,\forall z\in\mathbb{R}^n.$$

这个条件称作次梯度不等式. 当 f 在 x 处存在次梯度 x^*, 并且 $f(x)$ 为有穷值时, 必有 $f(z)>-\infty,\forall z\in\mathbb{R}^n$, 这时它有简单的几何意义:

$$h(z)=f(x)+\langle z-x,x^*\rangle,$$

该仿射函数的图像 $\{(z,f(z))|z\in\mathbb{R}^n\}$ 是凸集 epi$f$ 在点 $(x,f(x))$ 处的一个非垂直的承托超平面.

f 在 x 的所有次梯度的集合称为 f 在 x 处的次微分, 记作 $\partial f(x)$, 即

$$\partial f(x)=\{x^*\in\mathbb{R}^n|f(z)\leqslant f(x)+\langle z-x,x^*\rangle,\forall z\in\mathbb{R}^n\}.$$

一般来说, $\partial f:x\to\partial f(x)$ 是一个多值映射, 称为 f 的次微分映射, 不难看出, $\partial f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭凸集. 由定义知, $x^*\in\partial f(x)$ 恰好是一簇线性不等式的解. 当然

对某些 x, $\partial f(x)$ 可以是空集, 也可以恰好含有一个向量. 如果 $\partial f(x)$ 不空, 则称 f 在 x 处是次可微的.

若 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有穷值凸函数, 则 f 在每一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 次可微, 并且 $\partial f(x)$ 是非空有界闭凸集.

命题 1.4[1] 设 $f: \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ 为正常凸函数, $x \in \mathrm{dom} f$. 如果 f 在 x 处可微, 则 $\nabla f(x)$ 是 f 在 x 处的唯一次梯度, 特别地, 有

$$f(z) \leqslant f(x) + \langle z - x, \nabla f(x) \rangle, \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

反之, 若 $\partial f(x) = \{x^*\}$, 则 f 在 x 处可微, 并且 $x^* = \nabla f(x)$.

下一个定理是凸函数和的次微分的基本定理.

定理 1.5[1] 设 $f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为正常凸函数, $k = 1, 2, \cdots, m$, 则

$$\partial(f_1 + f_2 + \cdots + f_m)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x) + \cdots + \partial f_m(x).$$

如果 $\mathrm{ri}(\mathrm{dom} f_1) \cap \cdots \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom} f_m) \neq \varnothing$, 那么 $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial(f_1 + f_2 + \cdots + f_m)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) + \cdots + \partial f_m(x).$$

1.2 变分分析相关结论

首先给出集值映射的内、外极限的概念.

定义 1.1[1] 集值映射 $S: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ 当 $x \to \bar{x}$ 时的外极限定义为

$$\limsup_{x \to \bar{x}} S(x) := \{u \in \mathbb{R}^m \mid \exists x^k \to \bar{x}, \exists u^k \in S(x^k), u^k \to u\},$$

内极限定义为

$$\begin{aligned}\liminf_{x \to \bar{x}} S(x) := \{u \in \mathbb{R}^m \mid \forall x^k \to \bar{x}, \exists N \in \mathcal{N}_\infty, \\ \exists u^k \in S(x^k)(k \in N), \text{ 使得} u^k \to u\},\end{aligned}$$

式中, $\mathcal{N}_\infty = \{N \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus N \text{ 是有限集合}\}$; $\mathbb{N}$ 表示自然数集合.

根据集值映射的内外极限, 定义集合的切锥与法锥.

定义 1.2[1] 设集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 在点 $\bar{x} \in \Omega$ 附近是局部闭的. 定义集合 Ω 在点 $\bar{x}$ 处的:

- 切锥

$$\mathcal{T}_\Omega(\bar{x}) := \limsup_{t \downarrow 0} \frac{\Omega - \bar{x}}{t};$$

- **内切锥**

$$\mathcal{T}^i_{\Omega}(\bar{x}) := \liminf_{t\downarrow 0} \frac{\Omega - \bar{x}}{t};$$

- Fréchet（或正则）法锥

$$\widehat{\mathcal{N}}_{\Omega}(\bar{x}) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \limsup_{x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}} \frac{\langle v, x - \bar{x} \rangle}{\|x - \bar{x}\|} \leqslant 0 \right\};$$

- （极限）法锥

$$\mathcal{N}_{\Omega}(\bar{x}) := \limsup_{x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}} \widehat{\mathcal{N}}_{\Omega}(x).$$

对于约束集合, 它的法锥有下述表达式.

命题 1.5 [1]　设 $C = \{x \in \Omega \mid F(x) \in D\}$, 其中, $\Omega \in \mathbb{R}^n, D \in \mathbb{R}^m$ 是两个闭集, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个光滑映射, 对于任意的 $\bar{x} \in C$, 有

$$\widehat{\mathcal{N}}_C(\bar{x}) \supset \widehat{\mathcal{N}}_{\Omega}(\bar{x}) + \mathcal{J}F(\bar{x})^* \widehat{\mathcal{N}}_D(F(\bar{x})).$$

若基本约束规范

$$\left.\begin{array}{r} y \in \mathcal{N}_D(F(\bar{x})) \\ 0 \in \mathcal{J}F(\bar{x})^* y + \mathcal{N}_{\Omega}(\bar{x}) \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 0 \tag{1.4}$$

成立, 则还有

$$\mathcal{N}_C(\bar{x}) \subset \mathcal{N}_{\Omega}(\bar{x}) + \mathcal{J}F(\bar{x})^* \mathcal{N}_D(F(\bar{x})).$$

进一步地, 若 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 且 $\mathcal{J}F(\bar{x})$ 是行满秩的, 则

$$\mathcal{N}_C(\bar{x}) = \mathcal{J}F(\bar{x})^* \mathcal{N}_D(F(\bar{x})).$$

下面给出集值映射的伴同导数.

定义 1.3 [1]　设 $S : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ 是一闭图的集值映射, $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathrm{gph}S$, 其中, $\mathrm{gph}S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid b \in S(a)\}$. 集值映射 S 在点 $(\bar{a}, \bar{b})$ 的正则伴同导数 $\widehat{D}^* S(\bar{a}, \bar{b}) : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ 定义为

$$\widehat{D}^* S(\bar{a}, \bar{b})(w) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, -w) \in \widehat{\mathcal{N}}_{\mathrm{gph}S}(\bar{a}, \bar{b})\}. \tag{1.5}$$

S 在点 $(\bar{a}, \bar{b})$ 的伴同导数 $D^* S(\bar{a}, \bar{b}) : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, 定义为

$$D^* S(\bar{a}, \bar{b})(w) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, -w) \in \mathcal{N}_{\mathrm{gph}S}(\bar{a}, \bar{b})\}. \tag{1.6}$$

定义 1.4 [1]　设 $S : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ 是一集值映射, 称 S 在 $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathrm{gph}S$ 附近具有 Aubin（类 Lipschitz）性质（$l \geqslant 0$）, 若存在 $\bar{a}$ 的邻域 U 和 $\bar{b}$ 的邻域 V, 使得

$$S(u') \cap V \subset S(u) + l\|u' - u\|\mathcal{B},\ \forall u',\ u \in U.$$

利用伴同导数, 可以刻画集值映射的 Aubin 性质, 即 Mordukhovich 准则: 设集值映射 $S:\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ 在点 $(\bar{a},\bar{b})\in \mathrm{gph}S$ 是局部闭图的, 则 S 在 $(\bar{a},\bar{b})$ 附近具有 Aubin 性质当且仅当

$$D^*S(a,b)(0)=\{0\}. \tag{1.7}$$

对于集值映射, 有一个比 Aubin 性质弱的性质, 即平稳性.

定义 1.5 [1] *设 $S:\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ 是一集值映射, 称 S 在 $(\bar{a},\bar{b})\in \mathrm{gph}S$ 是平稳的 (模为 $l\geqslant 0$), 若存在 $\bar{a}$ 的邻域 U 和 $\bar{b}$ 的邻域 V, 使得对所有的 $a\in U$, 有*

$$S(a)\cap V\subset S(\bar{a})+l\|a-\bar{a}\|\mathcal{B}.$$

Lipschitz 复合函数的次微分具有下面的性质.

引理 1.1 [3] *向量值函数 $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$ 在点 $(\bar{x},\bar{y})$ 处是严格 Lipschitz 的, 函数 $\psi:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$ 在 $f(\bar{x},\bar{y})$ 附近是 Lipschitz 连续的, 则*

$$\partial(\psi\circ f)(\bar{x},\bar{y})\subset \bigcup_{u^*\in\partial\psi(f(\bar{x},\bar{y}))}\partial\langle u^*,f\rangle(\bar{x},\bar{y}).$$

第 2 章　多目标规划基础

在线性规划和非线性规划中, 所研究的问题都只含有一个目标函数, 这类问题常称为单目标最优化问题, 简称单目标规划. 但是, 在工程技术、生产管理以及国防建设等中, 所遇到的问题往往需要同时考虑多个目标在某种意义下的最优问题, 我们称这种含有多个目标的最优化问题为多目标最优化问题, 简称多目标规划 (multiobjective programming, MP). 多目标规划的数学模型可以抽象为以下形式:

$$
\text{(MP)} \qquad \begin{aligned} &\min f(x) := (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)) \\ &\text{s.t. } x \in B, \end{aligned}
$$

式中, $B \subset \mathbb{R}^n$ 为约束集; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数.

多目标规划是单目标规划的深入和发展, 但它不同于单目标规划, 有其特有的内涵. 最重要的是多目标规划的"解"的概念与单目标规划中最优解的概念有着本质的区别, 它是均衡或平衡概念, 判别目标的"好"与"坏"的标准, 通常要按决策者的"偏好"选用不同意义下的关系或者序来进行比较. 多目标规划的理论研究和应用已有几十年的历史, 并取得了许多成果, 已经成为数学规划的一个新的学科分支.

2.1　向量值函数的凸性

向量值函数的凸性是多目标规划重要的理论研究成果之一. 向量值函数的凸性对建立多目标规划问题的最优性条件和对偶理论起着重要的作用. 1978 年, Carven[4] 将数值函数的凸性推广到向量值函数, 引入了向量值函数的锥凸性. 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是非空凸集, $C \subset \mathbb{R}^m$ 是凸锥, 称向量值函数 $f : S \to \mathbb{R}^m$ 是 C-凸的, 如果对 $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0,1]$, 有

$$
\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y) \in C.
$$

但在实际问题中很多函数都是非凸函数, 对于这种非凸多目标优化问题, 研究方法主要有两种. 第一种是弱化向量值函数的凸性, 即将向量值函数的凸性推广到广义凸性, 比如锥似凸[5]、锥次似凸[6]、广义锥次似凸[7]、邻近锥次似凸[8] 等.

定义 2.1[5]　设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是非空凸集, $C \subset \mathbb{R}^m$ 是凸锥, 称向量值函数 $f : S \to$

$\mathbb{R}^m$ 是 C-似凸的, 如果 $\lambda \in (0,1)$, $\forall x_1, x_2 \in S$, $\exists x_3 \in S$, 使得

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(x_3) \in C.$$

定义 2.2 [6] 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是非空凸集, $C \subset \mathbb{R}^m$ 是凸锥, 且 $\mathrm{int}C \neq \varnothing$, 称向量值函数 $f: S \to \mathbb{R}^m$ 是 C-次似凸的, 如果 $\exists \theta \in \mathrm{int}C$, $\lambda \in (0,1)$, $\forall x_1, x_2 \in S$, $\forall \varepsilon > 0, \exists x_3 \in S$, 使得

$$\varepsilon\theta + \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(x_3) \in C.$$

定义 2.3 [7] 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是非空凸集, $C \subset \mathbb{R}^m$ 是凸锥, 且 $\mathrm{int}C \neq \varnothing$, 称向量值函数 $f: S \to \mathbb{R}^m$ 是广义 C-次似凸的, 如果 $\exists \theta \in \mathrm{int}C$, $\lambda \in (0,1)$, $\forall x_1, x_2 \in S$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \rho \geqslant 0, x_3 \in S$, 使得

$$\varepsilon\theta + \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \rho f(x_3) \in C.$$

定义 2.4 [8] 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是非空子集, 称向量值函数 $f: S \to \mathbb{R}^m$ 是邻近 C-次似凸的, 如果 $\overline{\mathrm{cone}(f(S)+C)}$ 为凸集.

从上面的定义可以看出: C-似凸性 $\Rightarrow$ C-次似凸性 $\Rightarrow$ 广义 C-次似凸性 $\Rightarrow$ 邻近 C-次似凸性.

这些广义锥凸性都能够用函数的像集来判断, 从而可以根据这些广义向量值函数像集的凸性, 利用凸集分离定理, 建立相应凸性下多目标规划问题的最优性条件、对偶定理等. 对于多目标规划问题相关研究, 杨新民、黄南京等取得了一系列的研究成果, 参见文献 [9]~[13].

第二种主要是借助非线性标量化的方法对不具备任何凸性的多目标优化问题进行研究. 比较常用的非线性标量化函数有分离函数[14]、距离函数[15], 这方面的成果可参见文献 [16]~[18]. 对无穷维空间的多目标优化, 其最优性的概念一般由偏好关系给出, 例如广义序关系[19]、闭序关系[19]、正则序关系[20], 这种类型的多目标问题的最优性条件一般是借助极点原理来建立的, 见文献 [21]、[22].

2.2 多目标规划的解

本节给出了多目标规划的解. 设 Y 是赋范向量空间.

定义 2.5 [14] 设 K 是 Y 中的任意一个非空子集.

(1) K 是锥, 如果 $\lambda \geqslant 0$, 有 $\lambda K \subset K$;

(2) 称锥 K 是凸的, 如果 $K + K \subset K$;

(3) 称锥 K 是点的, 如果 $K \cap (-K) = \{0_Y\}$.