

陈文灯 黄先开 朱庆宇◎主编

2019 考研 数学 复习指南 (数学二)

助力千万考生勇创人生辉煌成就

二十二年经典对接移动互联网时代

网络增值版

本书使用说明



名师点
题答疑

哪里不会
扫哪里

重难点视频讲解

下载慧升考研APP扫
书中二维码

超级服务

使用陈文灯考研数学
图书可获免费网络答
疑服务

超值赠送

《课后习题答案详解》
便携本

增值服务网址: www.wendeng.com.cn



中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

2019 考研数学复习指南 (数学二)

陈文灯 黄先开 朱庆宇 主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

2019 考研数学复习指南. 数学二 / 陈文灯, 黄先开, 朱庆宇主编. —北京: 中国财政经济出版社, 2017. 6

ISBN 978-7-5095-7541-3

I. ①2… II. ①陈… ②黄… ③朱… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 122525 号

责任编辑: 张 军

责任校对: 胡永立

封面设计: 陈宇琰

中国财政经济出版社出版

URL: <http://www.cfeph.cn>

E-mail: cfeph@cfeph.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100142

营销中心电话: 88190406 北京财经书店电话: 64033436 84041336

北京富生印刷厂印刷 各地新华书店经销

787×1092 毫米 16 开 27 印张 655 000 字

2017 年 6 月第 1 版 2017 年 6 月北京第 1 次印刷

定价: 68.00 元

ISBN 978-7-5095-7541-3

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

本社质量投诉电话: 010-88190744

打击盗版举报电话: 010-88190414 QQ: 447268889

前言

本书从1995年出版以来,历经二十二年的再版和修订,集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握以及众多考研学子的复习心得、实战体会,已成为广大考研读者的良师诤友,同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编,成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中,本书帮助许许多多考研学子圆了梦想,帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得了丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题,编者和一些数学同仁专门在本书配套App为本书开设答疑讨论专区,以更好地和同学们交流互动。从您购书开始一直到考试,文登名师将一直伴随着您!许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息,我们曾数次认真商讨、仔细揣摩,对本书再次做了修订,希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外,在App答疑平台的基础上,我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课,建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。同时本书选取了一部分例题进行了二维码讲解,扫码分享后即可免费观看。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南,效果将事半功倍!

此次再版,我们做了以下修订。

(1) “变繁为简,变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结,使考生得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧,并给出了详细的分析,使同学们了解这些方法的由来,让“玄妙”变得顺理成章。例如,连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明,尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的做法,经过我们的分析,原题将变得非常“初等”,非常简单,只要仿效,即可自行解答。

(2) 例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应对考试很有用,根据题型特点,能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”,以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3) 修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容,修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助,再版力求尽量做到完美。为了精益求精,恳请朋友们指正。

(4) 增加了二维码讲解。用95后学生学习数学的视角,对本书例题和习题进行了重新讲解,以便更好地贴合当前考生学习数学的方法。

(5) 更加突出数学思维的训练。在本书的配套讲解中,注重知识的引入和数学模型的建

立,例题讲解联系实际,加强应用。

最后回答考生们的问题:“如何有效地利用您的书提高复习效果?”“考好数学,书要看几遍?”

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看,对基础部分要多下点工夫,做到概念、定理能用自己的语言叙述,习题应全部都做。高数的基础:极限、导数与微分、不定积分;线性代数的基础:矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量;概率论与数理统计的基础:事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、伯努利概型、随机变量及其分布(特别是二维连续型)、随机变量的数字特征[期望 $E(X)$ 、方差 $D(X)$ 、协方差 $\text{cov}(X,Y)$,相关系数 ρ_{XY}]。如果是自学,应先仔仔细细地把本书看一遍,然后再详细看二三遍,对重点知识点着重理解、揣摩;如果是参加强化班,最好应该与上课“同步”进行,课后再看一遍即可。

这里尤为强调的是,在本书学习过程中,大家至少准备三个大笔记本,做题之前尽量不要看答案,先自己在空白本子上完整地做一遍,时时模拟考场在答题纸上做题的样子。如果某个题目自己不会做,也尽量根据已知条件找点有帮助的转化,即便是写了“解”“证明”之后毫无思路,这种方法也便于您迅速找到自己的卡壳点。数学学习过程中的提升大致有两类:一是把自己会的做得更熟练,二是把自己的卡壳点做会做熟。要知道数学常规题解答时靠条件反射立马做出,稍微有难度的题目,是观察题目之后,列出已知条件和根据已知转化出来的条件进行排列组合得到最后的答案。见题就做这个习惯将会最大程度地让您避免眼高手低这种情况。

送给考研朋友一首诗:

数学基础树的根,
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺,
功到高分自然成。



目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限和连续 1

第一节 重要概念、定理和公式的剖析 1

一、函数的基本性质 1

二、分段函数 6

三、反函数 6

四、复合函数 7

五、初等函数 10

六、函数的极限及其连续性 10

七、重要公式和定理 16

第二节 重要题型的解题方法和技巧 23

题型一 未定式的定值法 23

题型二 类未定式的计算 27

题型三 数列的极限 28

题型四 极限式中常数的确定(重点) 33

题型五 函数连续或间断点的判定 36

第三节 思维定势及综合题解析 38

一、思维定势 38

二、综合题解析 42

习题一 43

第二章 导数与微分 47

第一节 重要概念、定理和公式的剖析 47

一、导数与微分的定义 47

二、重要定理 51

三、导数与微分的运算法则 51

四、基本公式 51

五、弧微分与曲率 52

六、高阶导数的定义与基本公式 53

第二节 重要题型的解题方法和技巧 53

题型一 求复合函数的导数或微分 53

题型二 求参数方程的导数或微分 55

题型三 求隐函数的导数或微分 56

题型四 求幂指函数的导数或微分 56

题型五 求表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分 57

题型六 求分段函数的导数或微分 57

题型七 求高阶导数 58

第三节 思维定势及综合题解析 62

一、思维定势 62

二、综合题解析 62

习题二 65

第三章 不定积分 68

第一节 重要概念、定理和公式的剖析 68

一、不定积分的基本概念 68

二、基本性质 68

三、基本公式 69

四、基本积分法 70

第二节 重要题型的解题方法和技巧 87

题型一 有理函数的不定积分 87

题型二 简单无理函数的不定积分	88	习题四	139
题型三 三角有理式的不定积分	89	第五章 微分中值定理	143
题型四 含有反三角函数的不定积分	93	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	143
题型五 抽象函数的不定积分	93	第二节 重要题型的解题方法和技巧	144
题型六 分段函数的不定积分	94	题型一 闭区间上连续函数命题的证明	144
第三节 思维定势及综合题解析	95	题型二 证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	147
一、思维定势	95	题型三 证明某个函数恒等于一个常数的命题	148
二、综合题解析	96	题型四 命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明	149
习题三	98	题型五 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	150
第四章 定积分及反常积分	102	题型六 欲证结论:在 (a,b) 内至少存在两点 $\xi, \eta (\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式	153
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	102	第三节 思维定势及综合题解析	154
一、基本性质	102	一、思维定势	154
二、定理和公式	105	二、综合题解析	156
三、定积分的计算法	108	习题五	157
四、反常积分的基本概念	112	第六章 常微分方程	160
第二节 重要题型的解题方法和技巧	113	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	160
题型一 分段函数的定积分	113	一、基本概念	160
题型二 被积函数带有绝对值符号的定积分	115	二、二阶线性微分方程解的结构	160
题型三 被积函数中含有“变限积分”的定积分	116	三、二阶常系数线性微分方程	162
题型四 对称区间上的定积分	118	四、 n 阶常系数线性微分方程	162
题型五 被积函数的分母为两项,而分子为其中一项的定积分	119	第二节 重要题型的解题方法和技巧	165
题型六 由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的定积分	120	题型一 一阶微分方程的计算	165
题型七 已知一定积分,求另一一定积分	121	题型二 可降阶的高阶方程的求解	171
题型八 定积分等式的证明	122	题型三 计算二阶线性微分方程	173
题型九 定积分不等式的证明	130	题型四 微分方程的应用	176
题型十 计算反常积分	135		
题型十一 反常积分的判敛	136		
第三节 思维定势及综合题解析	137		
一、思维定势	137		
二、综合题解析	138		

第三节 思维定势及综合题解析	179		220
一、思维定势	179	题型一 简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的	
二、综合题解析	179	微分法	220
习题六	181	题型二 复合函数微分法	221
第七章 一元微积分的应用	184	题型三 隐函数微分法	224
第一节 重要概念、定理和公式的剖析		题型四 求无条件极值	227
.....	184	题型五 求条件极值	228
一、函数的单调增减性定理	184	题型六 求最值	229
二、函数的极值与最值	185	第三节 思维定势及综合题解析	231
三、函数凹凸性的判别与函数的拐点		一、思维定势	231
.....	186	二、综合题解析	231
四、微元法及其应用	188	习题八	232
第二节 重要题型的解题方法和技巧		第九章 重积分	234
.....	190	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	
题型一 求函数的极值	190		234
题型二 求函数的最值	191	一、基本概念	234
题型三 关于方程根的讨论	192	二、性质	234
题型四 函数渐近线的求解	197	三、公式	236
题型五 函数作图	198	四、二重积分的解题技巧	237
题型六 求平面图形的面积	199	第二节 重要题型的解题方法和技巧	
题型七 求立体的体积	201		239
题型八 求平面曲线的弧长	202	题型一 更换二重积分的积分次序	
题型九 求旋转体的侧面积	203		239
题型十 变力做功、引力、液体的静压力		题型二 选择二重积分的积分次序	
.....	204		241
第三节 思维定势与综合题解析	207	题型三 二重积分坐标系的选择	243
一、思维定势	207	题型四 分段函数的二重积分的计算	
二、综合题解析	208		244
习题七	211	题型五 二重积分等式的证明	247
第八章 多元函数微分学	214	题型六 二重积分不等式的证明	249
第一节 重要概念、定理和公式的剖析		第三节 思维定势及综合题解析	251
.....	214	一、思维定势	251
一、二元函数的定义	214	二、综合题解析	252
二、二元函数的极限及连续性	215	习题九	253
三、偏导数、全导数及全微分	216	第十章 函数方程与不等式证明	256
四、基本定理	217	第一节 函数方程	256
五、多元函数的极值	219	一、利用函数表示法与用何字母表示	
六、条件极值与无条件极值	220	无关的“特性”求解方程	256
第二节 重要题型的解题方法和技巧		二、利用极限求解函数方程	257

三、利用导数的定义求解方程	258
四、利用变上限积分的可导性求解方程	258
五、利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解	259
六、利用解微分方程的方法求解 $f(x)$	260
第二节 不等式的证明	262
一、引入参数法	262
二、利用微分中值定理	263
三、利用函数的单调增减性(重点)	265
四、利用函数的极值与最值	267
五、利用函数图形的凹凸性	268
六、利用泰勒展开式	269
七、杂例	270
习题十	271

第二篇 线性代数

第一章 行列式	274
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	274
一、排列与逆序	274
二、 n 阶行列式的定义	275
三、行列式的基本性质	277
四、行列式按行(列)展开定理	279
五、重要公式与结论	281
第二节 重要题型的解题方法和技巧	282
题型一 抽象行列式的计算	282
题型二 低阶行列式的计算	282
题型三 n 阶行列式的计算	284
第三节 思维定势与综合题解析	289
一、思维定势	289
二、综合题解析	290
习题一	291
第二章 矩阵	294
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	294
一、矩阵的概念	294

二、矩阵的运算	295
三、逆矩阵的概念	297
四、利用伴随矩阵求逆矩阵	298
五、矩阵的初等变换与求逆	299
六、分块矩阵及其求逆	300
七、矩阵的秩及其求法	300
第二节 重要题型的解题方法和技巧	300
题型一 求逆矩阵	300
题型二 求矩阵的高次幂 A^m	303
题型三 有关初等矩阵的命题	305
题型四 解矩阵方程	306
题型五 求矩阵的秩	308
题型六 关于矩阵对称、反对称命题的证明	310
题型七 关于方阵 A 可逆的证明	310
题型八 与 A 的伴随阵 A^* 有关联的命题的证明	311
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	312
第三节 思维定势与综合题解析	314
一、思维定势	314
二、综合题解析	315
习题二	316
第三章 向量	322
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	322
一、向量的概念与运算	322
二、向量间的线性关系	322
三、向量组的秩和矩阵的秩	323
四、向量空间	324
五、重要定理与公式	326
六、小结	326
第二节 重要题型的解题方法和技巧	327
题型一 讨论向量组的线性相关性	327
题型二 有关向量组线性相关性命题的证明	331

题型三 判定一个向量是否可由一组 向量线性表示	337
题型四 有关向量组线性表示命题的 证明	338
题型五 求向量组的极大线性无关组	340
题型六 有关向量组或矩阵秩的计算 与证明	341
题型七 与向量空间有关的命题	345
第三节 思维定势与综合题解析	347
一、思维定势	347
二、综合题解析	347
习题三	349
第四章 线性方程组	352
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	352
一、克莱姆法则	352
二、线性方程组的基本概念	352
三、线性方程组解的判定	353
四、非齐次线性方程组与其导出组的解 的关系	354
五、线性方程组解的性质	354
六、线性方程组解的结构	354
第二节 重要题型的解题方法和技巧	355
题型一 基本概念题(解的判定、性质、 结构)	355
题型二 含有参数的线性方程组解的 讨论	359
题型三 讨论两个方程组的公共解	365
题型四 有关基础解系的证明	366
第三节 思维定势与综合题解析	368
一、思维定势	368
二、综合题解析	368
习题四	373
第五章 特征值和特征向量	378
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	378

一、矩阵的特征值和特征向量的概念	378
二、相似矩阵及其性质	378
三、矩阵可相似对角化的充要条件 ...	379
四、实对称矩阵及其性质	379
五、重要公式与结论	380
第二节 重要题型的解题方法和技巧	381
题型一 求数值矩阵的特征值与特征 向量	381
题型二 求抽象矩阵的特征值、特征 向量	382
题型三 特征值、特征向量的逆问题	383
题型四 相似的判定及其逆问题	386
题型五 判断 A 是否可对角化	388
题型六 有关特征值与特征向量的 证明题	391
第三节 思维定势与综合题解析	393
一、思维定势	393
二、综合题解析	393
习题五	399
第六章 二次型	402
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	402
一、二次型及其矩阵表示	402
二、化二次型为标准型	402
三、配方法和正交变换法	403
四、二次型和矩阵的正定性及其判别法	404
第二节 重要题型的解题方法和技巧	407
题型一 二次型所对应的矩阵及其性质	407
题型二 化二次型为标准形	408
题型三 已知二次型通过正交变换化 为标准形,反求参数	412
题型四 有关二次型及其矩阵正定性	

一、综合题判定与证明	414
第三节 思维定势与综合题解析	416
一、思维定势	416

二、综合题解析	417
习题六	418

第一篇 高等数学

整个高等数学知识点多,学生感觉难学,主要是因为它具有以下特点:

1. 更高抽象性,抽象是全部数学的本质. 因为数学只保留了客观具体事物的数量关系和空间形式,去除了其他属性;高等数学的抽象是经过一系列的抽象化阶段逐步完成的;就好比极限这个概念完整严格的形成,经历过几百年,当年大数学家牛顿和莱布尼茨都不能很好理解,我们刚开始学习时不理解,也不是什么可耻的事情.

2. 精确性. 无论是数学推理还是证明,都要求有严格精密的根基. 学生学习专业课中可能遇到一种情况,社会生产实践活动并没有数学要求的那么严格,是的,工程科学或经济类社会科学的建立沿用了数学的严格精确性,但实际生活中,有些理想化的数学模型是不可能产生的,如冲激函数、不满足傅里叶级数展开的信号(函数).

3. 广泛性. 各种事物的发展变化具有数学形式上的统一性,因此数学就有了广泛的应用性. 比如,研究完定积分,为了符合生产实际,拓展出来反常积分;因为积分区域发生了变化,又延伸出来多重积分和曲线曲面积分. 但是,其本质都是在定积分之上延伸出来的,都满足线性、可加性等等. 数学首先描绘的肯定是自然界中最普遍的一种现象,而线性是普遍存在的,我们在形成一个统一的度量衡世界时,线性是必然要被刻画的.

4. 工程性. 我们在高等数学学习微分方程这一工具时,学习一些常见且简单的微分方程,实际上很多微分方程是不能用这种方法的,我们可能还要去寻求数值解,数值解的工具那就是级数. 一元函数不能满足我们实际中变量数量的要求,我们又拓展出来多元函数的相关知识. 一部分专业在学习专业课时还要用到场论的相关知识,所以要专门学习曲线曲面积分以及场论. 信息的表达或者函数的表达要统一,所以又在级数里面学了泰勒级数和傅里叶级数等,这些都是在生产实践中,根据生产力发展需要,不断被抽象,不断被后天赋予的各种数学知识,各种数学美都应运而生.

看完以上,您是不是觉得生无可恋,这么难的东西怎么学. 耐得住寂寞,经得住诱惑,多思考,勤动手,唯有练习才能功夫高.

所有的奋斗,都会有艰苦的环境、捉襟见肘的窘迫和焦虑不安的心境. 那时我们都以为,成功的那一天才会幸福. 但事实上,那些在奋斗之路上,让你内心获得力量的人和事,才是你绵长的生命里,最值得珍惜的幸福.

第一章 函数、极限和连续

第一节 重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

- (1) 奇函数的代数和仍为奇函数, 偶函数的代数和仍为偶函数;
- (2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数, 奇数个奇函数的积为奇函数;
- (3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|, \cos x, x^{2n} (n \text{ 为正整数}), e^{|x|}, e^{x^2}, \dots$.

常见的奇函数: $\sin x, \tan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \dots$.

提示 判别给定函数的奇偶性, 主要是根据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质.

注 (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点不对称, 则该函数就不是奇函数或偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性:

$$(1) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) y = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为奇函数};$$

$$(3) y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, F(x) \text{ 为奇函数}.$$

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

$$(2) \text{ 令 } F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

$$\begin{aligned}
 F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u)(-du) \\
 &= -\int_0^x f(-t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 为奇函数}) \\
 &= F(x),
 \end{aligned}$$

故 $y = \int_0^x f(t) dt$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$, 则

$$g(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数, 又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$ 为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于任一 $x \in X$, 恒有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$;

(2) 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数;

(3) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 T_1, T_2 ($T_1 \neq T_2$) 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数, 主要是根据周期函数的定义, 有时也用其运算性质.

【例 1.2】 设对一切实数 x , 有 $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为 _____ 的周期函数.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \frac{1}{4} - f(x) + f^2(x) - \sqrt{f(x) - f^2(x)}} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\
 &= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x) \quad \left(\text{由题设知 } f(x) \geq \frac{1}{2}\right),
 \end{aligned}$$

即 $f(1+x) = f(x)$, 故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数,



(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 也是以 T 为周期的周期函数;

(2) 如果 $\int_a^T f(x)dx \neq 0$, 则函数 $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证】(1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$\begin{aligned} F(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_T^{x+T} f(t)dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 0 + \int_0^x f(t)dt = F(x), \end{aligned}$$

所以, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k , 有

$$G(x) = \int_a^x [f(t) - k + k]dt = \int_a^x [f(t) - k]dt + k(x - a).$$

因为 $k(x - a)$ 是线性函数, 所以, 只需证明当 k 取某一值时, $g(x) = \int_a^x [f(t) - k]dt$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \int_a^{x+T} [f(t) - k]dt = \int_a^x [f(t) - k]dt + \int_x^{x+T} [f(t) - k]dt \\ &= g(x) + \int_0^T f(t)dt - kT. \end{aligned}$$

取 $k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$, 有 $g(x+T) = g(x)$, 即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界; 若不存在这样的 M , 则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

【注】函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数: $ \sin x \leq 1,$	$ \cos x \leq 1,$	$x \in (-\infty, +\infty);$
$ \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$	$ \arccos x \leq \pi,$	$x \in [-1, 1];$
$ \arctan x < \frac{\pi}{2},$	$ \operatorname{arccot} x < \pi,$	$x \in (-\infty, +\infty)$

【提示】判别函数的界, 一般首先将函数取绝对值, 然后用不等式放缩法求解; 或借助导数利用求最大(小)值法处理.

【例 1.4】函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界, 且 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

(D) 有界且 $-2 \leq f(x) \leq 2$.

【 】

【解】 $|f(x)| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$ (因为 $1+x^2 \geq 2|x|$),

故 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, 可知(C)入选.

【例 1.5】 函数 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界且 $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$.

(D) 有界且 $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq -\frac{1}{4}$.

【 】

【解】 $f(x) = \frac{\lg x}{x}, f'(x) = \frac{x \frac{1}{x \ln 10} - \lg x}{x^2} = \frac{1}{x^2}(\lg e - \lg x)$.

因为 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ “ $\uparrow$ ”.

因此, $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \lg 1$, 即 $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$, 可知, 该选(C).

4. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

提 示 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知可导, 则其单调性的判别用定义; 若 $f(x)$ 在区间 X 上可导, 则利用导数判别更为简便.

【例 1.6】 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, $x_1 > 0, x_2 > 0$. 求证:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

【证】 (1) 设 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 且 $x_1 < x_2$. 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow x_1 f(x_2) \leq x_2 f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2) \Rightarrow f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2);$$

(2) 证明略.

【例 1.7】 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 令

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

证明: $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

【分析】 只需证明 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内 $F'(x) > 0$ 即可.



【证】因为 $f(x) > 0$, 所以, 当 $x > 0$ 时, $F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 连续.

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf(x)}{f(x)} = 0 = F(0),$$

即 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处右连续, 所以, $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

$$\begin{aligned} \text{当 } x > 0 \text{ 时, } F'(x) &= \frac{xf(x) \int_0^x f(t)dt - f(x) \int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \\ &= \frac{f(x) \left[x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \right]}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}. \end{aligned}$$

令 $g(x) = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$, 有

$$g'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt > 0,$$

所以, 当 $x > 0$ 时, $g(x)$ 单调增加, 即有 $g(x) > g(0) = 0$. 故当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$, 所以, $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

二、分段函数

如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达形式, 则该函数称为分段函数.

常见的分段函数:

$$(1) \text{ 符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

(2) y 是 x 的整数部分, 记为 $y = [x]$.

(3) 狄利克莱(Dirichlet) 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

注 一般而言, 分段函数不是初等函数.

三、反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f , 如果对于 Z_f 中任一 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值, 则称变量 x 为变量 y 的函数, 记为

$$x = \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 习惯上把 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

注 (1) $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图像重合; $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y =$