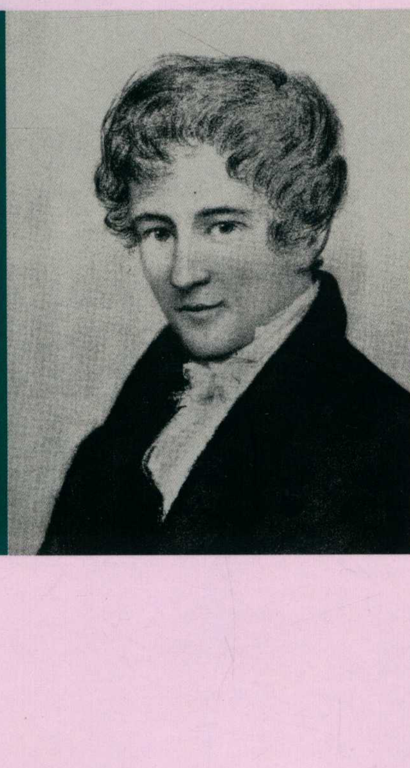
从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理

细说五次方程无求根公式

第二版

冯承天◎著



Niels Henrik Aabel

1802 年 -1829 年

华东师范大学出版社

从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理

细说五次方程无求根公式

第二版

冯承天◎著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理：细说五次方程无求根公式/冯承天著. —2版. —上海：华东师范大学出版社，2019
ISBN 978-7-5675-8739-7

Ⅰ.①从… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①高次方程—求解
Ⅳ.①O122.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第019492号

从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理

——细说五次方程无求根公式(第二版)

著　　者　冯承天
策划组稿　王　焰
项目编辑　王国红
特约审读　石　岩
责任校对　王丽平
封面设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟市文化印刷有限公司
开　　本　787×1092　16开
印　　张　8.75
字　　数　117千字
版　　次　2019年10月第2版
印　　次　2019年10月第1次
书　　号　ISBN 978-7-5675-8739-7
定　　价　38.00元

出 版 人　王　焰

献给热爱研读数学的朋友们

总　序

早在20世纪60年代，笔者为了学习物理科学，有幸接触了很多数学好书. 比如：为了研读拉卡(G. Racah)的《群论和核谱》①，研读了弥永昌吉、杉浦光夫的《代数学》②；为了翻译卡密里(M. Carmeli)和马林(S. Malin)的《转动群和洛仑兹群表现论引论》③、密勒(W. Miller. Jr)的《对称性群及其应用》④及怀邦(B. G. Wybourne)的《典型群及其在物理学上的应用》⑤等，仔细研读了岩堀长庆的《李群论》⑥……

学习的过程中，我深深感到数学工具的重要性. 许多物理科学领域的概念和计算，均需要数学工具的支撑. 然而，很可惜：关于群的起源的读物很少，且大部分科普读物只有结论而无实质性内容，专业的伽罗瓦理论则更是令普通读者望文生"畏"；如今，时间已过去半个多世纪，我也年逾古稀，得抓紧时机提笔，同广大数学爱好者们重温、分享这些重要的数学知识，一起体验数学之美，享受数学之乐.

深入浅出地阐明伽罗瓦理论是一个很好的切入点，不过，近世代数理论比较抽象，普通读者很难理解并入门. 这就要求写作者必须尽可能考虑普通读者的阅读基础，体会到初学者感到困难的地方，尽量讲清楚每一个数学推导的细节. 其实，群的概念正是从数学家对根式求解的探索中诞生的，于是，我想就从历史上数学家们对多项式方程的根式求解如何求索讲起，顺势引出群的概念，帮助读者了解不仅在物理学领域，而且在化学、晶体学等学科中的

---

① 梅向明译，高等教育出版社，1959.

② 熊全淹译，上海科学技术出版社，1962.

③ 栾德怀，张民生，冯承天译，华中工学院，1978.

④ 栾德怀，冯承天，张民生译，科学出版社，1981.

⑤ 冯承天，金元望，张民生，栾德怀译，科学出版社，1982.

⑥ 孙泽瀛译，上海科学技术出版社，1962.

应用也十分广泛的群论的起源.

2012 年,我的第一本——《从一元一次方程到伽罗瓦理论》出版. 从一元一次方程说起,一步步由浅入深、循序渐进,直至伽罗瓦——一位极年轻的天才数学家,详述他是如何初创群与域的数学概念,如何完美地得出一般多项式方程根式求解的判据. 图书付梓之后,承蒙读者抬爱,多次加印,这让笔者受到很大鼓舞.

于是,我写了第二本——《从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理——细说五次方程无求根公式》. 这本书的起点稍微高一些,需要读者具备高中数学的基础. 仍从多项式方程说起,但是,期望换一个角度,在"不用群论"的情况下,介绍数学家得出"一般五次多项式方程不可根式求解"结论(也即"阿贝尔不可能性定理")的过程. 在这本书里,我把初等数论、高等代数中的一些重要概念与理论串在一起详细介绍. 比如:为了更好地诠释阿贝尔理论,使之可读性更强一些,我用克罗内克定理来推导出阿贝尔不可能性定理等;为了向读者讲清楚克罗内克方法,引入了复共轭封闭域等新的概念,同时期望以一些不同的处理方法,对第一本书《从一元一次方程到伽罗瓦理论》所涉及的内容作进一步的阐述.

写作本书的过程中,我接触到一份重要的文献——H. Dörrie 的 *Triumph der Mathematik: hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kulture*, Physica-Verlag, Würzburg, Germany, 1958. 其中的一篇,论述了阿贝尔理论. 该书的最初版本为德文,而该文的内容则过于简略,已经晦涩难懂,加上中译本系在英译本的基础上译成,等于是在英译德的错误基础上又添了中译英的错误,这就使得该文成了实实在在的"天书". 在笔者的努力下,阿贝尔理论终于有了一份可读性较强的诠释. 衷心期望广大数学爱好者,除了学好数学,也多学一点外语,这样,碰到重要的文献,能够直接查询原版,读懂弄通,此为题外话.

写成以上两本之后,仍感觉需要进一步补充和提高,于是写了第三本——《从代数基本定理到超越数——一段经典数学的奇幻之旅》. 本书在写作方式上,继续沿用前两本的方式,从普通读者知晓的基本的代数知识出发,循序渐进地阐明数学史上的一系列重要课题,比如:数学家们如何证明代数基本定理,如何证明 π 和 e 是无理数,并继而证明它们是超越数,期望使读者在阅读本书的过程中,掌握多项式理论、域论、尺规作图理论等;也期望在这本书里,对第一本、第二本未讲清楚的地方继续进行补充.

借这三本书再版的机会，我对初版存在的印刷错误进行了修改，对正文的内容进行了补充与完善，使之可读性更强，力求自成体系.

另外，借"总序"作一个小小的新书预告. 关于本系列，笔者期望再补充两本：第四本是《从矢量到张量》，第五本是《从空间曲线到黎曼几何》. 笔者认为"矢量与张量""空间曲线与黎曼几何"都是优美而且有重大应用的数学理论，都应该而且能够被简洁明了地介绍给广大数学爱好者.

衷心期望数学——这一在自然科学和人文科学中都有重大应用的工具，能得到更大程度的普及，期望借本系列出版的机会，与更多的数学、物理学工作者，数学、物理学爱好者，普通读者分享数学的知识、方法及学习数学的意义，期望大家学习数学的同时，能体会到数学之美，享受数学！

冯承天

2019 年 4 月 4 日

于上海师范大学

前　言

半亩方塘一鉴开，天光云影共徘徊.
问渠那得清如许？为有源头活水来.
——［宋］朱熹《观书有感》

数学家曾坚持不懈地求索多项式方程的根式求解. 事实上，早在公元前2000多年，古巴比伦人已经知道如何去解一些二次方程了. 成书于公元一世纪前后的《九章算术》就编入了三元一次方程的题目. 意大利数学家费罗(Scipione del Ferro，1465—1526)、塔尔塔利亚(Nicolo Tartaglia，约1499—1557)和费拉里(Ferrari Lodovico，1522—1565)在16世纪分别研究得出了一般三次和四次方程的根式求解方法. 他们的成果进而由费拉里的老师，意大利数学家卡尔达诺(Girolamo Cardano，1501—1576)进一步完善，并发表在他1545年出版的著作《大术》(*Ars Magna*)之中.

这样，二次、三次和四次方程的堡垒就相继被攻克了. 因此有充分的理由相信，只要有足够的努力与聪明才智，人们也一定能根式求解五次方程，即会得出一个"求根公式"，使人们只要把方程的各已知系数代入，经过若干次"＋"、"－"、"×"、"÷"以及开方运算，便能得出方程的各个根.

然而，在随后的近300年中，尽管数学大师们一代接一代地竭尽全力，一般五次方程的根式求解仍无法解决. 直到19世纪20年代初，年仅19岁的挪威数学家阿贝尔(Niels Henrik Abel，1802—1829)最终较完整地证明了"一般五次方程不可根式求解"——这就是著名的"阿贝尔不可能性定理".

一个困惑数学家们长达约3个世纪的难题就以"不可能性"而划上了句号. 这是代数史上的一座里程碑. 为了能与广大热爱研读的朋友们分享这一

优美的理论，笔者撰写的这本书起点较低，从数系、整数运算以及多项式等的一些基础理论和定理谈起，尽量写得深入透彻而详尽；书中包括有许多实例可供读者消化、推敲和练习，而且尽力达到前后呼应；对用到的各种理论和定理都加以严谨地详述. 为了克服论述此专题的各文献中的种种晦涩难懂，以及叙述过简与不清、存在错误或漏洞的毛病，我们采用了一种“细说”的方式. 这样可以使本书在数学内容上达到最大程度的“自封”.

不过，笔者还是在书后列出了自己在研读阿贝尔定理和撰写本书时读过的部分好书和文献，希望对那些想继续深入研究的读者有用.

一系列的数学实践使笔者深信：一位掌握复数概念与运算的读者，只要勤于思考，就一定能掌握书中的(在其他数学分支中也很有用的)一些基础数学知识和定理，从而大大提高自己的数学修养；只要乐于思考，就一定能掌握“阿贝尔不可能性定理”证明的精髓，同时给自己带来数学之美的享受.

最后，感谢首都师范大学栾德怀教授的长期的关心、教导和鞭策. 感谢上海师范大学周才军教授和陈跃副教授，他们仔细阅读了全书，并提出了许多宝贵意见和建议. 感谢上海考试院的牟亚萍女士和上海师范大学的吴俊老师认真地打出了一稿又一稿的修改稿件，为本书的出版作出了巨大的努力. 感谢华东师范大学出版社的编辑，他们为本书的出版给予了宝贵的支持、促进和帮助.

希望本书成为广大的数学爱好者学习证明“阿贝尔不可能性定理”的一本可读性较强的读物. 衷心期望得到读者的批评与指正.

冯承天

2014 年 5 月于上海师范大学

内 容 简 介

本书分六个部分，共十六章，是阐述一般五次多项式方程无根式求解的阿贝尔定理的一本入门读物.

在第一部分中，从多项式方程的求解和数系的扩张谈起，详述了一次、二次、三次以及四次方程的根式求解. 在第二、第三以及第四部分中，论述了关于整数、数域以及数系上多项式的一些概念和理论，其中包括了有重要应用的算术基本定理、欧几里得算法、贝祖等式、艾森斯坦不可约判据、多项式的可除定理与唯一因式分解定理、实系数多项式实数根的根数的斯图姆定理以及对称多项式基本定理等等. 在第五部分中，证明了阿贝尔引理、阿贝尔不可约定理，也讨论了一些重要的扩域：n 型纯扩域以及复共轭封闭域. 在最后的第六部分中，阐明了多项式方程根式求解的含义及其数学表达，论证了克罗内克定理，并最终严格证明了“阿贝尔不可能性定理”.

本书还有四个附录，它们分别是：关于代数基本定理的定性说明、复数的表示及运算、韦达(François Vièta，1540—1603)用三角函数解简化的三次方程的方法，以及斯图姆定理的证明.

全书起点低，叙述详尽，论证严格，例子丰富，前后呼应，是一本深入浅出，可供数学爱好者学习新知识和方法，扩展视野，同时又能得到美的享受的可读性较强的读物.

目　录

第一部分　多项式方程的求解与数系的扩张

第一章　多项式方程的求解和数系的扩张 …… 3

§1.1　从自然数到有理数 …… 3

§1.2　实数和复数 …… 3

§1.3　代数基本定理 …… 4

§1.4　1 的 n 次方根 …… 5

§1.5　纯方程的解 …… 6

§1.6　复数系的运算性质和法则 …… 6

第二章　二次、三次、四次方程的求解 …… 8

§2.1　n 次方程的简化 …… 8

§2.2　二次方程的求解 …… 8

§2.3　三次方程的求解 …… 10

§2.4　卡尔达诺公式与复数 …… 12

§2.5　四次方程的求解 …… 13

§2.6　一般五次方程有公式解吗? …… 15

第二部分　整数的一些基本概念、定理与理论

第三章　算术基本定理 …… 21

§3.1　正整数的可除定理 …… 21

§3.2　素数和合数 …… 22

§3.3　算术基本定理 …… 22

第四章　欧几里得算法 …… 25
§4.1　最大公因子 …… 25
§4.2　欧几里得算法 …… 25
§4.3　贝祖等式 …… 26

第三部分　数域、扩域与代数扩域的一些基本理论

第五章　数域的概念 …… 31
§5.1　数域的定义 …… 31
§5.2　子域和扩域 …… 32
第六章　代数添加和扩域 …… 33
§6.1　添加与扩域 …… 33
§6.2　代数添加时的扩域结构 …… 34
§6.3　添加 2 个代数元的情况 …… 35

第四部分　多项式的一些基本概念、定理与理论

第七章　可约和不可约多项式 …… 39
§7.1　数系上的多项式 …… 39
§7.2　多项式的可约和不可约 …… 40
§7.3　**Z** 上和 **Q** 上的多项式的可约性问题 …… 41
§7.4　高斯引理 …… 41
§7.5　艾森斯坦不可约判据 …… 42
第八章　多项式的整除理论 …… 45
§8.1　多项式的整除性 …… 45
§8.2　多项式的可除定理 …… 45
§8.3　剩余定理 …… 47
第九章　多项式的最大公因式 …… 48
§9.1　公因式和最大公因式 …… 48
§9.2　多项式的欧几里得算法 …… 48
§9.3　多项式的贝祖等式 …… 50
§9.4　多项式的互素 …… 51

§9.5 多项式的唯一因式分解定理 …… 52
第十章 多项式的导数和多项式的根 …… 53
§10.1 函数的变化率和导数 …… 53
§10.2 形式导数 …… 54
§10.3 多项式的根 …… 55
§10.4 重根问题 …… 56
§10.5 根与系数的关系 …… 57
第十一章 实系数多项式的根 …… 59
§11.1 实系数多项式的实根和复根 …… 59
§11.2 实数序列的变号次数 …… 59
§11.3 没有重根的实系数多项式的斯图姆组 …… 60
§11.4 斯图姆定理 …… 61
第十二章 多元多项式 …… 64
§12.1 多元多项式和字典式排列法 …… 64
§12.2 对称多项式和初等对称多项式 …… 65
§12.3 对称多项式基本定理 …… 65

第五部分 阿贝尔引理、阿贝尔不可约定理以及一些重要的扩域

第十三章 阿贝尔引理与阿贝尔不可约定理 …… 73
§13.1 $x^2-c\in\mathbf{N}^*[x]$ 在 $\mathbf{N}^*$ 上可约吗? …… 73
§13.2 x^n-c 在 $\mathbf{N}^*$ 上的可约性问题 …… 74
§13.3 阿贝尔引理 …… 74
§13.4 不可约多项式的基本定理——阿贝尔不可约性定理 …… 76
第十四章 单代数扩域的结构,纯扩域和复共轭封闭域 …… 78
§14.1 不可约多项式的根给出的单代数扩域 …… 78
§14.2 单代数扩域的结构定理 …… 79
§14.3 n 型纯扩域 …… 80
§14.4 复共轭封闭域 …… 81

第六部分 多项式方程的根式求解、克罗内克定理与鲁菲尼—阿贝尔定理

第十五章 关于 F 上不可约多项式在 F 的扩域上可约的两个定理 ········ 87

§15.1 关于 F 上不可约多项式在 F 的扩域上可约的第一个定理 ········ 87

§15.2 关于 F 上不可约多项式在 F 的扩域上可约的第二个定理 ········ 89

第十六章 多项式方程的根式求解 ········ 91

§16.1 多项式方程根式可解的含意 ········ 91

§16.2 多项式方程根式可解的精确定义和对讨论情况的一些简化 ········ 92

§16.3 $f(x)$根式扩链的加细 ········ 93

§16.4 $f(x)$达到可约的两种情况 ········ 95

§16.5 证明“阿贝尔不可能性定理”的思路 ········ 96

§16.6 $f(x)$可约给出的一些结果 ········ 96

§16.7 多项式 $\psi(x, \lambda_v)$的两个性质 ········ 97

§16.8 $f(x)$在 E_m 上分解为线性因式的乘积 ········ 99

§16.9 $f(x)$的根在 E_m 中的表示 ········ 100

§16.10 对情况 A 的讨论 ········ 101

§16.11 对情况 B 的讨论 ········ 102

§16.12 克罗内克定理和鲁菲尼—阿贝尔定理 ········ 105

§16.13 尾声 ········ 106

附录 ········ 109

附录1 关于代数基本定理的定性说明 ········ 111

附录2 复数的表示及运算 ········ 113

附录3 韦达用三角函数解简化的三次方程的方法 ········ 116

附录4 斯图姆定理的证明 ········ 118

参考文献 ········ 122

后记 ········ 124

第一部分
多项式方程的求解与数系的扩张

在这一部分中，我们从解多项式方程讲起，讨论了数系的扩张：从自然数、整数、有理数、实数一直到复数，而且阐明了代数基本定理，以及复数系是代数封闭的，并最后回顾了复数系的运算性质和法则. 与此同时，也讨论了在后文中有重大应用的 1 的 n 次方根和纯方程的解.

在这一部分中，我们还详细地讨论了用几何（或配方）法解二次方程，用变量代换法解三次方程，以及用因式分解法解四次方程. 这些方程都是有"求根公式"的. 最后讲述了数学家对"解一般五次方程"这一课题的不懈努力.

第一章

多项式方程的求解和数系的扩张

§1.1　从自然数到有理数

人类最早使用的数是正整数系 $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$，后来又发现了负数和零. 零是大约在公元 600 年，由印度数学家发现的，而负数则是欧洲文艺复兴的成果. 人们把集合 $0, 1, 2, 3, \cdots$，称为自然数系，记作 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，而把集合 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，称为整数系，记作 $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$.

在整数系 $\mathbf{Z}$ 中，对于"$+$"、"$-$"这两种运算而言，是封闭的，也即如果 z_1，$z_2 \in \mathbf{Z}$，则 $z_1 \pm z_2 \in \mathbf{Z}$. 由此，方程

$$x + p = 0,\ p \in \mathbf{Z} \tag{1.1}$$

有解 $x = -p \in \mathbf{Z}$. 不过，一般一次方程

$$px + q = 0,\ p, q \in \mathbf{Z},\ p \neq 0 \tag{1.2}$$

的解 $x = -\dfrac{q}{p}$ 一般不属于 $\mathbf{Z}$，这就使得我们要把我们所讨论的数系，由 $\mathbf{Z}$ 扩张为有理数系 $\mathbf{Q} = \left\{\dfrac{q}{p} \,\middle|\, q, p \in \mathbf{Z}, p \neq 0\right\}$. 有理数系 $\mathbf{Q}$ 的特点是它对于四则运算"$+$"、"$-$"、"$\times$"和"$\div$"(0 不为除数)是封闭的，而且它还是稠密的：在任意两个不同的有理数 $\dfrac{q_1}{p_1}$ 和 $\dfrac{q_2}{p_2}$ 之间都有无数个有理数. 例如，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q_1}{p_1} + \dfrac{q_2}{p_2}\right)$就是其中的一个. 这是不同于整数系 $\mathbf{Z}$ 的，例如，在 21、22 这两个整数之间就没有任意整数了.

§1.2　实数和复数

在公元前 500 年左右，古希腊人已经发现了无理数. 就解方程而言，我们