普通高等学校“十三五”数字化建设规划教材
大学数学基础教材

新经度

高等数学

GAODENG SHUXUE

下

郝志峰　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等学校"十三五"数字化建设规划教材

大学数学基础教材

高等数学

（下）

郝志峰 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书主要面向地方应用型本科院校，涉及内容的深广度符合最新的高等学校理工科、经管类各专业对该课程的教学基本要求(2014)，也能达到全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的相应要求.内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数、微分方程.

本书以学生为本，力求通俗易懂、深入浅出，激发学生的兴趣；注意定理、定义、性质、例题的说明解释，及时归纳总结诸多理解、分析高等数学的理论与方法，强化解决问题和数学建模的能力；适应翻转课堂、慕课、微课等新时期的教学改革.为满足学习者的需求，公式、标号详尽便于查阅，精心设计习题，并附解答与证明提示.

本书适宜作为普通高等学校非数学理工科及经济、管理相关专业"高等数学"课程的教材或参考书，也可供需要高等数学知识的各类科技工作者学习或参考，并为准备考研的非数学专业学生及其他读者服务.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/郝志峰编著. —北京：北京大学出版社，2019.2
ISBN 978-7-301-30244-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郝… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 011120 号

书　　名　高等数学（下）
　　　　　GAODENG SHUXUE
著作责任者　郝志峰　编著
责 任 编 辑　曾琬婷
标 准 书 号　ISBN 978-7-301-30244-6
出 版 发 行　北京大学出版社
地　　址　北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址　http://www.pup.cn
电 子 信 箱　zpup@pup.cn
新 浪 微 博　@北京大学出版社
电　　话　邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62754819
印 刷 者　长沙超峰印刷有限公司
经 销 者　新华书店
　　　　　787 毫米×1092 毫米　16 开本　13.5 印张　330 千字
　　　　　2019 年 2 月第 1 版　2019 年 2 月第 1 次印刷
定　　价　45.00 元

本书配套云资源使用说明

本书配有网络云资源，资源类型包括：知识结构、名家简介、微课视频、演示动画和历年考研真题.

一、资源说明

1. 知识结构：对每章知识点以框图形式做系统总结，让学生提前了解本章讲述的大概内容，方便学生学完本章内容后做自我测评，加深学生对本章内容的理解.

2. 名家简介：提供相关科学家的简介，从而提高学生对数学的认识，以及学习数学的兴趣.

3. 微课视频：针对重要知识点，本书主编郝志峰教授进行系统讲解. 视频短小精练，方便学生学习，提高效率.

4. 演示动画：针对重要知识点、抽象内容，提供相关演示动画，便于学生理解和掌握.

5. 历年考研真题：提供一些历年的考研试题，对学有余力的学生提供考研帮助.

二、使用方法

1. 打开微信的“扫一扫”功能，扫描关注公众号（公众号二维码见封底）.

2. 点击公众号页面内的“激活课程”.

3. 刮开激活码涂层，扫描激活云资源（激活码见封底）.

4. 激活成功后，扫描书中的二维码，即可直接访问对应的云资源.

注：1. 每本书的激活码都是唯一的，不能重复激活使用.

2. 非正版图书无法使用本书配套云资源.

总 序

数学是人一生中学得最多的一门功课.中小学里就已开设了很多数学课程,涉及算术、平面几何、三角、代数、立体几何、解析几何等众多科目,看起来洋洋大观、琳琅满目,但均属于初等数学的范畴,实际上只能用来解决一些相对简单的问题,面对现实世界中一些复杂的情况则往往无能为力.正因为如此,在大学学习阶段,专攻数学专业的学生不必说了,就是对于广大非数学专业的大学生,也都必须选学一些数学基础课程,花相当多的时间和精力学习高等数学,这就对非数学专业的大学数学基础教材提出了迫切的需求.

这些年来,各种大学数学基础教材已经林林总总地出版了许多,但平心而论,除少数精品以外,大多均偏于雷同,难以使人满意.而学习数学这门学科,关键又在理解与熟练,同一类型的教材只需精读一本好的就足够了.这样,精选并推出一些优秀的大学数学基础教材,就理所当然地成为编辑出版这一丛书的宗旨.

大学数学基础课程的名目并不多,所涵盖的内容又大体上相似,但教材的编写不仅仅是材料的堆积和梳理,更体现编写者的教学思想和理念.同一门课程,应该鼓励有不同风格的教材来诠释和体现;针对不同程度的教学对象,也应该有不同层次的教材来使用和适应.特别是,大学非数学专业是一个相当广泛的概念,对分属工程类、财经管理类、医药类、农林类、社科类甚至文史类的众多大学生,不分青红皂白、一刀切地采用统一的数学教材进行教学,很难密切联系有关专业的实际,很难充分针对有关专业的迫切需要和特殊要求,是不值得提倡的.相反,通过教材编写者和相应专业工作者的密切结合和协作,针对该专业的特点编写出来的教材,才能特色鲜明、有血有肉,才能深受欢迎,并产生重要而深远的影响.这是专业类大学数学基础教材应有的定位和标准,也是大家的迫切期望,但却是当前明显的短板,因而使我们对这套丛书可以大有作为有了足够的信心和依据.

说得更远一些,我们一些教师往往把数学看成是定义、公式、定理及证明的堆积,千方百计地要把这些知识灌输到学生头脑中去,但却忘记了有关数学最根本的三件事.一是数学知识的来龙去脉——从哪儿来,又可以到哪儿去.割断数学与生动活泼的现实世界的血肉联系,学生就不会有学习数学持续的积极性.二是数学的精神实质和思想方法.只讲知识,不讲精神;只讲技巧,不讲思想,学生就不可能学到数学的精髓,不能对数学有真正的领悟.三是数

学的人文内涵.数学在人类认识世界和改造世界的过程中起着关键的、不可代替的作用，是人类文明的坚实基础和重要支柱.不自觉地接受数学文化的熏陶，是不可能真正走近数学、了解数学、领悟数学并热爱数学的.在数学教学中抓住了上面这三点，就抓住了数学的灵魂，学生对数学的学习就一定会更有成效.但客观地说，现有的大学数学基础教材，能够真正体现这三方面要求的，恐怕为数不多.这一现实为大学数学基础教材的编写提供了广阔的发展空间，很多探索有待进行，很多经验有待总结，可以说是任重而道远.从这个意义上说，由北京大学出版社推出的这套丛书实际上已经为一批有特色、高品质的大学数学基础教材的面世搭建了一个很好的平台，特别值得称道，也相信一定会得到各方面广泛而有力的支持.

特为之序.

李大潜

2015 年 1 月 28 日

李大潜简介

前　言

在科学技术飞跃发展的今天，人们越来越意识到高等数学（微积分）的重要．高等数学不仅在各领域中有广泛的应用，而且在培养具有创新思维、创业能力的人才方面，更具有重要作用．因此，高等数学课程与教材在大学本科教学中占有重要的地位，在理工科、经管类各专业的国内外专业认证中，是培养目标、毕业要求和课程体系中最基础的一个环节；同时，也是STEAM（Science，Technology，Engineering，Arts，Mathematics）教育、创客教育中重要的一门主干课程．本书正是在这一国内外教育教学改革的大背景下，积极适应教育部等三部委发布的《关于引导部分地方普通本科高校向应用型转变的指导意见》，针对地方院校创新创业应用型、技术技能型人才培养模式改革的需要，通过“高等数学”课程落实人才培养方案和课程体系的综合改革；同时，主动满足翻转课堂、微课和慕课等新时期的教学需要，提高学生的综合能力，更好地适应21世纪创新创业型人才和卓越计划对工程师教育、经管类教育的需求．

本书涉及内容的深广度符合最新的高等学校理工科、经管类各专业对该课程的教学基本要求（2014），也能达到全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的相应要求．一方面，综合地方应用型本科院校的实际情况，结合编者自身多年的教学实践与改革成果．由编者负责的“大学数学网络教育的研究与实践”获2005年国家优秀教学成果二等奖，“大学数学立体化教育资源与集成系统的研究和实践”获2009年国家优秀教学成果二等奖，本书为这两个项目的研究成果．另一方面，通过参与“我国大学数学课程建设与教学改革六十年课题组”的工作，理解并融入了六十多年来高等数学课程变革的精华．编写时比较注重教学法，并注意结合长期执教与研究这一课程教学的经验；基于对时代发展与高等教育大众化进程对高等数学课程提出新挑战的认识，在内容的展开、描述中，比较注意激发学生的学习兴趣，力求符合大多数学习者的认识规律．

全书共分十二章：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数、微分方程．

本书有如下特点：

一是可读性强．全书力求做到内容丰富、通俗易懂，力争突出每章教学重点，注重基本概

念、基本理论、基本运算的讲解，便于学生理解和掌握．在内容安排上，详略得当、循序渐进，逻辑严谨清晰，及时将一些性质（或结论、定理等）进行适当的归纳集中，并对部分性质加以证明，以便于在教学过程中生动活泼地详细讲解．

二是以学生为本．全书以学生的学习为中心，力求做到深入浅出、清楚易懂，激发学生的学习兴趣，注重定义、定理、性质、例题的说明解释，及时归纳总结诸多理解、分析高等数学的步骤和学习方法，在渗透数学思想和方法的同时，着力培养学生应用数学方法解决问题的能力，强化应用意识和数学建模能力的引导．

三是突出重点．全书适合本科生学习，并适合其他需要学习高等数学课程的各类人员．书中所有例题都经严格挑选，具有典型性、代表性、灵活性．在例题解答中，十分注重分析思路、拓宽思维，帮助学生更好地掌握解题要领和规律；对解题做适当说明和引申，注重理论联系实际，激发学生深入思考；例题和练习题的设计增强了层次感，鼓励学生通过跨越进步的台阶，勇于挑战．

本书由郝志峰编著．苏文华、赵子平构思并设计了全书在线课程教学资源的结构与配置，吴浪、邓之豪编辑了教学资源内容，并编写了相关动画文字材料，余燕、沈辉参与了动画制作及教学资源的信息化实现，袁晓辉、范军怀审查了全书配套在线课程的教学资源，苏文春、苏娟提供了版式和装帧设计方案．在此一并致谢．衷心感谢教育部数学与统计学教学指导委员会原主任委员李大潜院士为本系列教材欣然题序，并对内容的组织和编排做了详细的指导；尤其是其对数学知识、能力和素养相互统一的期盼，都为本套教材的编写明确了方向．

尽管编者有力求把此书编好的愿望，但限于客观条件与自身学识和能力的不足，此书中难免有不妥之处，恳请同行专家和读者们批评指正．若奉献给广大读者的这套高等数学教材能让读者有所收获，将感到莫大的荣幸．

编者

于佛山

2018 年 1 月

作者简介

目录

知识框图

第七章 空间解析几何与向量代数

平面解析几何的研究对于学习一元函数微积分是必要的；同样，空间解析几何的研究对于学习多元函数微积分也是不可缺少的.

本章首先讲述空间直角坐标系，其次讨论向量及其运算，最后介绍空间平面和直线、空间曲面和空间曲线.

§7.1 空间直角坐标系

一、空间中点的坐标

微课视频

动画视频

与平面解析几何一样，我们来引入空间直角坐标系. 在空间取一定点 O，过点 O 作三条相互垂直的有相同长度单位的有向直线 Ox，Oy，Oz，依次称为 x 轴、y 轴和 z 轴，统称为坐标轴. 这样就构成一个空间直角坐标系，记为 $Oxyz$，其中 O 称为坐标原点（简称原点）. 按一般习惯，规定空间直角坐标系中坐标轴的正向满足右手规则：以右手四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向. 通常把 x 轴和 y 轴放在水平面上，则 z 轴是竖轴，这时 x 轴的正向向前，y 轴的正向向右，z 轴的正向向上（见图 7.1）.

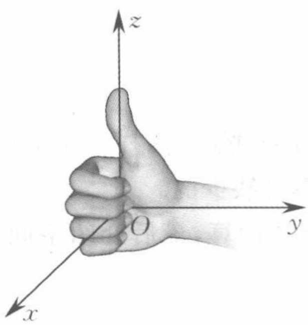

图 7.1

三条坐标轴的任意两条轴可以确定一个平面，该平面称为坐标平面，其中由 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 面；由 z 轴和 x 轴所确定的平面称为 zOx 面；由 y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yOz 面.

三个坐标平面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 第一至第四卦限对应 $z>0$，其中位于 x,y,z 轴正半轴的卦限称为第一卦限，并按逆时针方向依次称为第二、三、四卦限；第五至第八卦限对应 $z<0$，分别在第一至第四卦限的正下方. 这八个卦限分别用字母 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 表示（见图 7.2）.

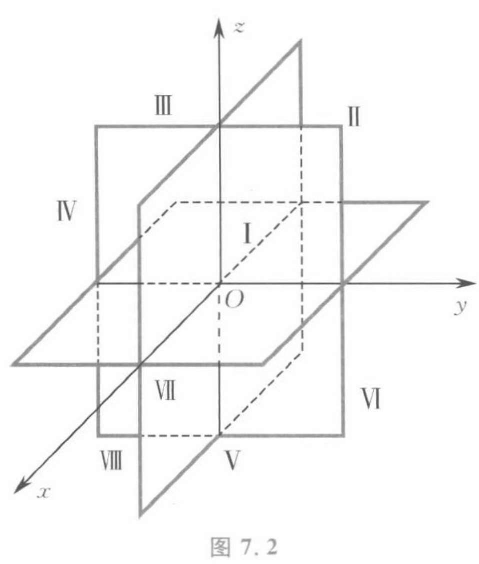

图 7.2

给出空间直角坐标系的概念后，我们就可以建立起空间的点与有序数组之间的对应关系.

设 M 为空间的一点，过点 M 作三个分别垂直于 x,y,z 轴的平面，且分别交于点 P,Q,R（见图 7.3）. 若线段 OP 的长度为 $|x|$，线段 OQ 的长度为 $|y|$，线段 OR 的长度为 $|z|$，则点 M 可唯一确定一个三元有序数组 (x,y,z). 反过来，三元有序数组 (x,y,z) 可确定空间点 M 的位置.

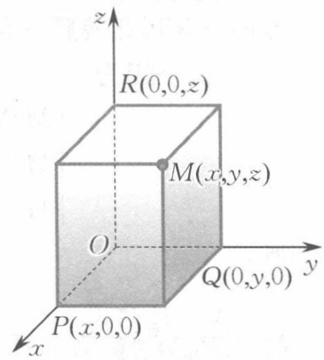

图 7.3

也就是说，空间中的点 M 与三元有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应的关系. 称三元有序数组 (x,y,z) 为点 M 的坐标，记为 $M(x,y,z)$. 依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

显然，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，x 轴上任意一点的坐标为 $(x,0,0)$，y 轴上任意一点的坐标为 $(0,y,0)$，z 轴上任意一点的坐标为 $(0,0,z)$.

二、空间任意两点间的距离

定理 1　设有空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则 M_1,M_2 两点间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

证　过点 M_1 和 M_2 分别作三个平面平行于三个坐标平面，则这六个平面围成一个长方体，此长方体的对角线为 M_1M_2，如图 7.4 所示. 由图形可知

$$\begin{aligned}d^2&=|M_1M_2|^2=|SM_2|^2+|M_1S|^2\\&=|SM_2|^2+|M_1N|^2+|NS|^2,\end{aligned}$$

而

$$|M_1N|=|x_2-x_1|,$$
$$|NS|=|y_2-y_1|,$$
$$|SM_2|=|z_2-z_1|,$$

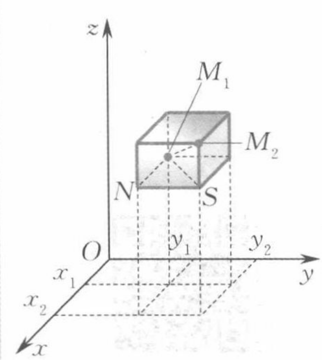

图 7.4

故

$$d^2=|M_1M_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2,$$

即

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

说明　(1) 这是空间解析几何的一个基本公式；

(2) 当 $z_1=z_2=0$ 时，上式成为平面解析几何中熟知的公式：

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

例 1　求点 $M(x,y,z)$ 和坐标原点 $O(0,0,0)$ 间的距离.

解　$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例 2　已知点 $M_1(5,3,2)$，$M_2(8,3,3)$，$M_3(6,2,4)$，求证：以点 M_1，M_2，M_3 为顶点的三角形是等腰三角形.

证　因为

$$|M_2M_3|^2=(6-8)^2+(2-3)^2+(4-3)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(5-6)^2+(3-2)^2+(2-4)^2=6,$$
$$|M_1M_2|^2=(8-5)^2+(3-3)^2+(3-2)^2=10,$$

所以

$$|M_2M_3|=|M_3M_1|.$$

故 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 3　求 x 轴上和两点 $M_1(-3,2,4)$，$M_2(4,6,-3)$ 等距离的点.

解　因为所求的点在 x 轴上，所以设该点为 $M(x,0,0)$. 由题意得

$$|M_1M|=|M_2M|,$$

即

$$\sqrt{[x-(-3)]^2+(0-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(0-6)^2+[0-(-3)]^2},$$

解得

$$x=\frac{16}{7},$$

故所求的点为 $M\left(\frac{16}{7},0,0\right)$.

§7.2　向量及其线性运算

微课视频

一、向量的概念

定义 1　既有大小，又有方向的一类量称为向量.

说明　在物理学中常遇到向量这一类量，例如，力、力矩、位移、速度、加速度等.

数学上，常用有向线段来表示向量，其长度表示向量的大小，方向表示向量的方向. 以 M_1 为始点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（见图 7.5）. 有时也用符号 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 或 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$ 来表示向量.

图 7.5

定义 2　向量的大小称为向量的模.

例如，向量$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$.

定义 3　模为 1 的向量称为单位向量. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$ 同向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$ 或 $\overrightarrow{a^0}$；模为 0 的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 规定零向量的方向可为任意方向.

定义 4　以坐标原点 O 为始点、M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 对点 O 的向径，记作 $\boldsymbol{r}$ 或 $\vec{r}$.

定义 5　对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若它们的方向相同或相反，则称这两个向量平行或共线，记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$. 规定零向量与任何向量都平行.

定义 6　若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

定义 6 说明，向量可以在空间中平行移动，所得向量与原向量相等. 所以也称这种向量为自由向量.

动画视频

二、向量的加减法

定义 7　设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$，取对角线$\overrightarrow{OC}$，记 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$（见图 7.6），则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

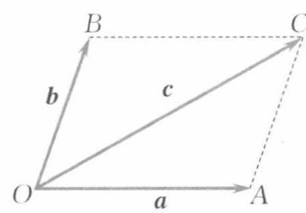

图 7.6

上述用平行四边形的对角线向量规定两个向量之和的方法称为向量加法的平行四边形法则.

设向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以$\overrightarrow{OA}$ 的终点为始点作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 OC，就得到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$. 这个方法称为向量加法的三角形法则（见图 7.7）.

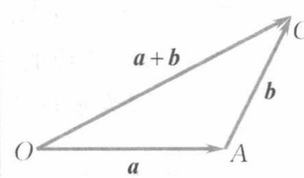

图 7.7

向量的加法满足下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

以(2) 为例来证明.

证　先做 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再与 $\boldsymbol{c}$ 相加，得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$（见图 7.8）. 由图 7.8 可见，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加得到同样的结果.

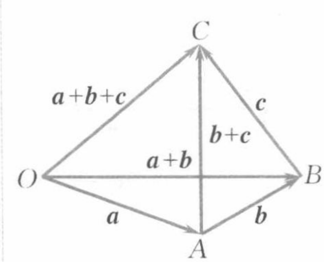

图 7.8

定义 8　与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

定义 9　如图 7.9 所示，两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差定义为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

说明　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

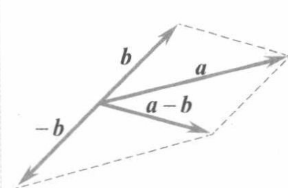

图 7.9

三、向量与数的乘法

定义 10　设 λ 为一实数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 表示一个向量，并规定：当 $\lambda>0$ 时，它的方向和 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 的 λ

倍，即$|\lambda \boldsymbol{a}| = \lambda|\boldsymbol{a}|$；当$\lambda = 0$时，它为零向量，即$\lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$；当$\lambda < 0$时，它的方向和$\boldsymbol{a}$的方向相反，模等于$|\boldsymbol{a}|$的$|\lambda|$倍，即$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$.

说明　向量$\boldsymbol{a}$乘以-1时，得$(-1)\boldsymbol{a}$，它与$\boldsymbol{a}$的方向相反，其模和$\boldsymbol{a}$的模相等，故有$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

向量与数量的乘法满足下列运算规律($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$)：

(1) 结合律 $\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = \mu(\lambda \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$.

以(1)为例来证明.

证　$\lambda(\mu \boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda \boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$为相互平行的向量，它们的方向也是相同的，且

$$|\lambda(\mu \boldsymbol{a})| = |\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$
$$|\mu(\lambda \boldsymbol{a})| = |\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$
$$|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$

故

$$\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = \mu(\lambda \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

说明　$\boldsymbol{a}^0$是与$\boldsymbol{a}$(非零向量)同向的单位向量，故

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0, \quad \boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

例 1　设$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，试用$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，其中$M$为平行四边形对角线的交点(见图7.10).

解　因为平行四边形的对角线互相平分，所以$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 2\overrightarrow{AM}$.故

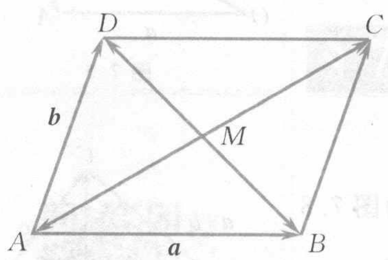

图 7.10

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}, \quad \overrightarrow{MA} = -\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}.$$

而

$$\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA},$$

故

$$\overrightarrow{MC} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}.$$

又

$$-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 2\overrightarrow{MD},$$

故

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

而

$$\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD},$$

故

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}).$$