

# 多元调和分析的前沿

陆善镇文集

LUSHANZHENWENJI

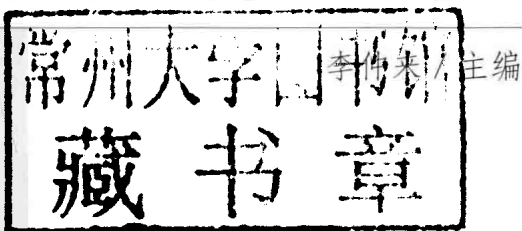



北京师范大学出版集团  
北京师范大学出版社



陆善镇文集

# 多元调和分析的前沿



 北京师范大学出版集团  
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP  
北京师范大学出版社

2014 · 北京

---

图书在版编目(CIP)数据

陆善镇文集：多元调和分析的前沿 / 陆善镇著，李仲来主编.  
—北京：北京师范大学出版社，2014.12  
(北京师范大学数学家文库)  
ISBN 978-7-303-18037-0

I. ①陆… II. ①陆… ②李… III. ①多元—调和分析—文集 IV. ①O177.5-53

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第236821号

---

营销中心电话 010-58802181 58805532  
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com>  
电子信箱 beishida168@126.com

---

出版发行：北京师范大学出版社 [www.bnup.com](http://www.bnup.com)  
北京新街口外大街19号  
邮政编码：100875

印刷：北京易丰印捷科技股份有限公司  
经销：全国新华书店  
开本：155 mm × 235 mm  
印张：35.5  
插页：6  
字数：545千字  
版次：2014年12月第1版  
印次：2014年12月第1次印刷  
定价：90.00元

---

策划编辑：岳昌庆  
美术编辑：王齐云  
责任校对：李 菡  
责任编辑：岳昌庆  
装帧设计：王齐云  
责任印制：陈 涛

**版权所有 侵权必究**

反盗版、侵权举报电话：010—58800697

北京读者服务部电话：010—58808104

外埠邮购电话：010—58808083

本书如有印装质量问题，请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话：010—58800825

谨以此书祝贺

陆善镇教授 75 寿辰！

---

▶ 1980 年在美国 St. Louis 华盛顿大学做访问学者时的照片。



◀ 1980 年在美国 St. Louis 华盛顿大学数学系办公室。

▶ 1981 年在美国 St. Louis 的 G. Weiss 家中同 G. Weiss 合影。





◀ 1994年《Approximation Theory and Its Applications》杂志部分编委在广州合影，左起（下同）：郑维行、陆善镇、程民德、龙瑞麟、苏维宜。

▶ 1990年博士生刘和平（左四）和张严（左一）答辩后，孙永生（左二）和陆善镇同他们合影。



◀ 2000年同刘继志（左一）和博士生燕敦验（左三）合影。

► 1994年在广州举行的逼近论和调和分析学术讨论会上作报告。



► 1995年在北京师范大学校长室的工作照。

► 1998年1月24日，率领北京师范大学代表团访问美国加州大学(Berkeley)的合影：徐汝梅、王蕾、金盛华、陆善镇、美方接待人员、包华影、杨志峰。





◀ 2002年在杭州举行的国际数学家大会调和与分析卫星会议开幕式的主席台上：陆善镇、G. Weiss、张俊生（浙江大学党委书记）、丘成桐、L. Caffarelli。



◀ 2008年在福州举行的国际调和与分析会议的晚宴上部分代表合影：陈杰诚、杨大春、范大山、陆善镇、丁勇、颜立新。



▲ 2007年在日本北海道大学举行的国际调和与分析会议的代表合影。  
 第1排：K. Yabuta(日本)、彭立中、陆善镇、S. Igari(日)、C. Perez(西班牙)、L. Ephremidze(日)；  
 第2排：刘和平、丁勇、燕敦验、K. Saka(日)、H. Schmeisser(德国)、K. Tachizawa(日)；  
 第3排：N. Tomita(日)、M. Sugimoto(日)、谏稳固、S. Sato(日)、M. Uchiyama(日)、M. Okada(日)、杨大春、M. Hayashi(日)、A. Miyachi(日)、李俊峰、E. Nakai(日)；  
 第4排：H. Wadade(日)、M. Izuki(日)、Y. Tsutsui(日)、李中凯、Kei Morii(日)、H. Tanaka(日)、N. Fujii(日)、T. Yoneda(日)、Y. Sawano(日)。



▲ 2009年5月29日，在北京师范大学举行的调和分析和偏微分方程及其应用国际会议晚宴上，祝贺陆善镇教授70华诞，我校当时健在的全部5位校长：袁贵仁(1999～2001, 现任教育部部长)、王梓坤(1984～1989)、陆善镇(1995～1999)、方福康(1989～1995)和钟秉林(2001～2012)第1次合影。



◀ 2012年在南京举行的国际调和分析会议期间部分代表合影：苏维宜、陆国震、陆善镇、王斯雷。



▲ 2013年在山东省临沂市举行的调和分析研讨会期间，同部分学生合影。  
 第1排：马柏林、江寅生、丁勇、刘智新、陆善镇、刘和平、杨大春、刘宗光、胡国恩；  
 第2排：李俊峰、徐景实、唐林、刘明菊、默会霞、林燕、夏霞、伍火熊、傅尊伟、赵发友；  
 第3排：陈冬香、陶双平、燕敦验、张璞、湛稳固、薛庆营、司增艳、喻晓、石少广。



▲ 2011年陆善镇被任命为数学与复杂系统教育部重点实验室学术委员会主任，学术委员会成立时在北京师范大学的合影。

前排：周坚、陈木法、严加安、文兰、陆善镇、陈光巨；

后排：魏炜、胡永建、王恺顺、杨大春、唐梓洲、保继光、陆国震、李仲来、李建华、戴杰。



▲ 应浙江省温州市政府的邀请担任温州肯恩大学（中美合作大学）校长，这是2012年在聘任仪式上，穿校长袍同美国肯恩大学常务副校长 P. Connelly 的合影。



▲ 2013年在温州肯恩大学校长室的工作照。

▶ 1994年在兰州举行的第4届国家自然科学基金委员会数学评审组会议合影。徐中玲、兼聘人员、殷慰萍、周作领、陈志杰、伍卓群、堵丁柱、刘应明、陆善镇、周学光、潘承彪、王兴华、丁石孙、马吉溥、陈天权、郭柏灵、汪嘉冈、石钟慈、陈希孺、李训经、岳忠厚、许忠勤。



▲ 2005年在北京举行的第5届国务院学位委员会数学学科评议组会议合影。

前排：陈木法、马志明、洪加兴、陆善镇、张恭庆、杨乐、李大潜、刘应明、文兰；

后排：吴微、陈叔平、徐宗本、袁亚湘、李尚志、彭实戈、史宁中、樊恽、王建磐、文志英、尹景学。

▶ 1991年在新疆参加第7届全国政协委员视察活动。





▲ 1998年出席第9届全国人民代表大会第1次会议。



▲ 1994年同夫人刘本慧在宁夏大学访问。



▲ 1987年全家福(摄于温州)：陆臻华(长子)、刘本慧(夫人)、陆善镇、陆臻全(次子)。

# 序言

陆善镇教授是著名的数学家、教育家，为我国数学科学事业的进步，特别是调和分析学科的发展做出了卓越贡献，也为我国教育事业的发展做出了重要贡献。作为陆老师的学生，在陆老师的文集出版之际，我们非常高兴和荣幸地为之写几句话，并衷心感谢陆老师的培养之恩。

陆老师 1939 年 11 月出生于浙江省温州市。1961 年 7 月毕业于华东师范大学，同年 9 月起在北京师范大学数学系任教。1980~1982 年，赴美国圣路易斯华盛顿大学做访问学者，并被聘为该校数学系教授。1983 年 5 月被北京师范大学越级由讲师晋升为教授。1984 年 1 月经国务院学位委员会批准担任博士生导师。1992~1994 年，任北京师范大学数学与数学教育研究所所长。1995~1999 年，由国务院任命为北京师范大学校长。陆老师是第 7, 8 届全国政协委员，第 9, 10 届全国人大代表兼全国人大教科文卫委员会委员。2012 年 9 月，陆老师应温州市政府的邀请，担任温州肯恩大学(中美合作大学)校长。

陆老师是第 4 届国务院学位委员会委员，第

5 届国务院学位委员会学科评议组成员，曾先后担任《中国科学》《科学通报》《数学学报》《数学前沿》以及多种国外数学杂志的编委，《数学进展》副主编、《理论数学》主编。陆老师还担任了 1999 年国际分析、计算及其应用协会第 2 届代表大会（日本福冈）调和分析分会主席，2002 年国际数学家大会组织委员会委员兼资助委员会主席，调和分析及其应用卫星会议学术委员会主席。2002 年起，任教育部“高校数学中心”学术委员会委员。2011 年起，任教育部重点实验室“数学与复杂系统”学术委员会主任。陆老师 1988 年获国家教委科技进步奖一等奖，1989 年获国家自然科学奖四等奖，1990 年获国家级有突出贡献的中青年专家和全国高校先进科技工作者称号，1991 年获政府特殊津贴。2002 年获教育部自然科学奖二等奖。陆老师曾应邀在 1993 年秋季日本数学会年会上作一小时特别演讲，是被日本数学会邀请的 7 位外国数学家之一。

以下我们从学生的角度来介绍我们所了解的陆老师。

### 一、创立北京师范大学调和分析研究群体

20 世纪 60 年代初陆老师到北京师范大学数学系任教，开始从事调和与分析领域的研究。他于 1966 年在《数学学报》上发表了关于用二重奇异积分表示二元可积函数的研究成果，是北京师范大学调和与分析研究工作的开端。最初陆老师是跟随苏联学派开展调和与分析研究的，当发现调和与分析的国际研究前沿在美国时，便逐渐将研究方向转向美国学派。在现代调和与分析的发展中，特别是从 20 世纪 50 年代初到 80 年代初，在美国先后形成了享誉世界的三大学派：以 A. Zygmund 和 A. P. Calderón 为首的芝加哥大学学派，他们创立了著名的 Calderón-Zygmund 奇异积分理论，被公认为现代调和与分析的开端；以 E. M. Stein 和 C. Fefferman 为首的普林斯顿大学学派，他们在 Bochner-Riesz 平均、Hardy 空间的实变理论、振荡积分等方面做出了关键性和开创性的研究工作，极大地影响了现代调和与分析的面貌和发展进程；以 G. Weiss 和 R. R. Coifman 为首的圣路易斯华盛顿大学学派，他们建立了 Hardy 空间的分解结构理论，被誉为“圣路易斯精神”。陆老师的研究工作，从独自奋斗到创立和领导北京师范大学调和与分析研究群体，一直同美国的这三大学派有密切的关系。坚持在现代调和与分析的主流方向上开展前沿课题的研究是陆老师研究工作的最突出的特点。陆老师从

20 世纪 60 年代中期开始关注普林斯顿大学学派, 研究工作转向临界阶的 Bochner-Riesz 平均. 20 世纪 80 年代初陆老师到圣路易斯华盛顿大学进修两年, 深受该学派影响. 然而一直到 20 世纪 80 年代中期, 陆老师主要还是个人独自开展研究工作. 1984 年陆老师担任博士生导师, 开始指导博士生. 此后陆老师带领他的学生, 在临界阶的 Bochner-Riesz 平均、实 Hardy 空间的逼近、振荡奇异积分算子、Herz 型 Hardy 空间、粗糙核积分算子、高维 Hardy 算子等现代调和分析研究的前沿课题上做出一系列具有重要影响的开创性成果, 形成了独具特色的北京师范大学调和分析研究群体, 为国内培养了调和分析领域中各个方向的学术带头人和研究骨干, 在国际上的影响越来越大. 现在在北京师范大学工作的陆老师的学生中, 杨大春是国内调和分析学科第一个国家杰出青年基金获得者和教育部长江学者特聘教授, 曾在 1999 年国际分析、计算及其应用协会第 2 届代表大会上获杰出研究贡献奖. 丁勇是国家自然科学基金调和分析重点项目的负责人, 曾应邀在 2006 年国际数学家大会调和分析卫星会议上作 50 分钟大会报告. 有专家评价道: “目前, 以陆善镇为首的北京师范大学数学系调和分析研究集体, 关于经典调和分析的工作, 不仅在国内数学界处于领先水平, 而且在国际上也有相当的影响. 陆善镇在经典调和分析研究方面, 已被公认为国内的领头人.” (见胡毓达主编《数学家之乡》一书, 上海科学技术出版社, 2011).

## 二、代表性学术研究成果

在此我们简单介绍陆老师的一些代表性学术研究成果.

### (一) 二元可积函数的表示

用奇异积分表示可积函数的问题同 Fourier 级数的求和密切相关. 对于一元情形, 此问题已于 1936 年为 D. Faddeef 所解决, 并被写进 E. Natanson 的名著《实变函数论》(下册)中. 正如人们所知, 分析中的问题从一元向二元推广, 往往有着本质的困难. 苏联学者 K. Gaharia 和 O. Gabisonia 曾分别于 1951 年和 1957 年研究过这个问题的二元情形, 但始终未能完全解决. 陆老师发现, 该问题的实质与 Lebesgue 点的定义方式密切相关. 陆老师在《数学学报》(1966, 16(3): 314—327) 中引进了一类广义 Lebesgue 点, 最终完全解决了用二重奇异积分表示二元可积函数的问题. 上述结果发表后, 引起了国际学术界的关注, 美

国《数学评论》曾用长达半页的篇幅予以介绍。陆老师的这项重要成果也标志着北京师范大学调和分析研究工作的开端。

## (二) 临界阶 Bochner-Riesz 平均

收敛与求和是 Fourier 分析的经典问题。1966 年 Lusin 猜想(一元周期平方可积函数的 Fourier 级数几乎处处收敛)被国际著名数学家、Abel 奖得主 L. Carleson 证实, 之后多元 Fourier 级数的 Bochner-Riesz 平均成为人们特别关注的焦点。关于临界阶 Bochner-Riesz 平均的研究是陆老师所有研究工作中最突出的也最受国际上赞誉的成果, 其中大部分成果是陆老师独自研究完成的。陆老师关于临界阶 Bochner-Riesz 平均的研究工作中最有影响的成果有:

### 1. 高维 Salem 收敛定理

为研究多元 Fourier 级数临界阶 Bochner-Riesz 平均的几乎处处收敛性, 陆老师在《数学学报》(1980, 23(4): 609—623)中提出了球形积分的概念, 最终建立了高维的 Salem 型收敛定理, 定理中的条件被国内外同行学者称为 Salem-Lu 条件。这是“文化大革命”结束后国内关于多元 Fourier 分析的第一个重要研究成果。

### 2. R. Fefferman 猜想

1961 年, 国际著名数学家、沃尔夫奖得主 E. M. Stein 证明: 存在  $L^1$  可积函数, 其多元 Fourier 级数的临界阶 Bochner-Riesz 平均几乎处处发散, 在  $L^1$  空间的子空间中, Dini 函数类的临界阶 Bochner-Riesz 平均几乎处处收敛。此后, 这一重要问题很长时间没有进展。1978 年, 美国著名数学家 R. Fefferman 引入一类新的函数空间, 称为熵类, 熵类也是  $L^1$  空间的子空间, 但包含 Dini 函数类。R. Fefferman 提出了一个著名的猜想: “熵类应同 Fourier 级数的几乎处处收敛性有密切关系”。1982 年, 陆老师, M. H. Taibleson 与 G. Weiss 在《Lecture Notes in Math.》(1982, 908: 311—318)中证明了熵类中函数的临界阶 Bochner-Riesz 平均几乎处处收敛。迄今为止, 该结果仍是有关多元 Fourier 级数几乎处处收敛的最佳结果。这项工作被 E. M. Stein, Y. Meyer, F. Soria 等许多国际著名数学家肯定和引用。

### 3. 局部化收敛问题

早在 1936 年, 大数学家 S. Bochner 就证明了临界阶 Bochner-

Riesz 平均的局部化收敛定理对  $L^1$  空间中的函数不成立. 替代地, 可以考虑临界阶 Bochner-Riesz 平均的  $q$  次强求和. 1948 年, S. Bochner, K. Chandrasekharan 对  $q=2$  的情形证明了  $q$  次强求和的局部化收敛定理, 但其方法对  $q>0$  的情形并不适用. 此后, 这方面长期没有进展. 直到 1985 年, 陆老师在《Scientia Sinica》(1985, 28A(1): 1-13) 中用极大函数的方法, 对任意的  $q>0$  证明了  $q$  次强求和的局部化收敛定理. 这一结果被 R. Fefferman 评价为: “一个深刻的结果, 这个问题自 1948 年 S. Bochner 和 K. Chandrasekharan 的工作以来一直未能解决达 36 年之久.” 已故程民德院士曾做出如下评价: “陆善镇教授在多元调和分析理论研究中的重要贡献已为国际所公认, 他首先考虑了临界阶指标下的收敛情形, 突破了过去一般考虑大于临界阶时的收敛情形. 这一突破在方法上要有深刻的创建, 他在这方面的工作深得国际同行的高度评价与广泛引用.” 已故的国际著名数学家 J. L. Rubio de Francia 生前给陆善镇写信称: “你已经在这方面(指 Bochner-Riesz 平均)取得了引人注目的成果, 望你继续从事下去.”

上述三个研究成果之外, 陆老师和他的学生还对 Bochner-Riesz 平均的收敛速度与函数光滑性的关系、Bochner-Riesz 平均的交换子、Bochner-Riesz 平均的加权估计、广义 Bochner-Riesz 平均等问题做出了一系列有价值的研究成果.

### (三) 多元实 Hardy 空间的逼近

1984 年德国数学家 P. Oswald 使用复变与实变相结合的方法, 在一维情形下建立了 Hardy 空间逼近的正定理和逆定理, 由于其方法严重依赖于函数的解析性质, 对多元情形完全不适用. 为此, P. Oswald 在其文中提出如下的问题: “仅由实方法建立逼近的正定理将是饶有兴趣的, 特别地, 对  $H^p(\mathbf{R}^n)$  和  $H^p(\mathbf{T}^n)$ ,  $p \leq 1$  建立逼近正定理的  $N$  维类比以及在逼近论中应用的可能性尚属未知.” 对此问题, 陆老师和他的学生刘智新在《Lecture Notes in Math.》(1991, 1494: 119-129) 中引进了一类非常广泛的逼近算子(齐次  $H^p$  乘子算子), 给出了齐次  $H^p$  乘子算子在多元实 Hardy 空间逼近的特征刻画, 并利用这个特征刻画建立了高维  $H^p$  空间逼近的正定理和逆定理, 从而完全解决了上述 P. Oswald 提出的问题. L. Pick 在美国《数学评论》中指出: (陆的工作) “不像