

Daxue

# 大学应用数学

Yingyong Shuxue

郑清平 张绪林 印德彬 主 编  
卢社军 秦少武 严中芝 副主编  
徐国洪 主 审



重庆大学出版社

<http://www.cqp.com.cn>

Daxue

# 大学应用数学

Yingyong Shuxue

郑清平 张绪林 印德彬 主 编

卢社军 秦少武 严中芝 副主编

杨金才 付晓军 张光勇 郭波涛 田德旭 参 编

徐国洪 主 审

重庆大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学应用数学/郑清平,张绪林,印德彬主编. —  
重庆:重庆大学出版社,2015. 1  
ISBN 978-7-5624-8803-3

I. ①大… II. ①郑…②张…③印… III. ①应用数  
学—高等职业教育—教材 IV. ①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 010556 号

大学应用数学

郑清平 张绪林 印德彬 主编  
策划编辑:章 可  
责任编辑:文 鹏 版式设计:章 可  
责任校对:费 梅 责任印制:赵 晟

\*

重庆大学出版社出版发行  
出版人:邓晓益  
社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号  
邮编:401331  
电话:(023) 88617190 88617185(中小学)  
传真:(023) 88617186 88617166  
网址:<http://www.cqup.com.cn>  
邮箱:[fxk@cqup.com.cn](mailto:fxk@cqup.com.cn) (营销中心)  
全国新华书店经销  
重庆紫石东南印务有限公司印刷

\*

开本:787×1092 1/6 印张:17.25 字数:430 千  
2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷  
ISBN 978-7-5624-8803-3 定价:35.00 元

---

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换  
版权所有,请勿擅自翻印和用本书  
制作各类出版物及配套用书,违者必究

# 前言

为了适应高等职业教育的迅速发展,满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要,本书依照教育部制定的《高职高专数学课程教学基本要求》,汲取国内高职数学教材的优点,从不同专业岗位对数学知识的需求出发,结合编者多年教学实践编写而成。本教材具有以下特色:

1. 淡化理论性和系统性,强化针对性和实用性。“以应用为目的,以必需、够用为原则”,既考虑到高等数学学科的系统性、逻辑性,又针对高职学生的接受能力及专业课程数学知识的需求,适当选取教材内容的深度和广度,舍去不必要的烦琐证明,注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养,使学生能够获得专业课程、职业岗位及终身学习所必需的数学知识,掌握基本的数学思想方法和必要的应用技能。

2. 知识编排新颖实用,强化专业个性化服务。本书面向高职专业岗位对数学的不同需求,将高等数学、工程数学、离散数学、概率统计等学科知识优化重组而成。全书共分 11 个章节,涵盖极限、导数、微分、积分、拉普拉斯变换、线性代数、离散数学、概率等方面,区别于传统高等数学教材内容,便于针对专业需求对内容有选择性地菜单式教学。如拉普拉斯变换、线性数适用于机械工程类专业,离散数学适用于计算机类专业,概率适用于财经类专业等。

3. 采用教、学、练一体化编写风格,突出易教、易学、易用的特点。本书每一个章节都配有“本节导学”,对授课内容和重点进行阐述,并以知识引入、新课讲授、例题分析、知识归纳、练习巩固、复习小结为序,采用了“教案式”“讲义式”编写风格。版面设计新颖,利用  $\frac{1}{4}$  的版面作注释,给出提示、点评、分析等,更适于学生做学习笔记,使教材、讲义与笔记三位一体,既便于教师教,又便于学生学,使学生解决“学什么?怎么学?学后怎么用?”的问题。

4. 内容呈现形式多样,强化科学人文教育。本书文字描述简洁明快流畅,图文并茂,使抽象的内容形象化,注重基本概念和基本定理的几何解释、物理意义和经济背景,通俗易懂,便于学生理解与掌握,同时还配有部分科学家的图文简介,强化人文教育。

本书由郑清平、张绪林、印德彬担任主编,由秦少武、卢社军、严中芝担任副主编,由郑清平、张绪林修改、统稿、定稿,杨金才、付晓军、张光勇、郭波涛、田德旭也参加了本书的编写。在本书的编写过程中,仙桃职业学院的领导和老师提出了许多宝贵的意见和建议,编者在此表示诚挚的谢意。

本书的所有素材文件可在重庆大学出版社网站下载,用户名和密码都为 cqup。限于编者水平,同时编写时间也比较仓促,书中难免有不足之处,敬请广大师生、读者批评指正。

编 者

2014年11月

# 目 录

第一章 极限与连续 .....	1
第一节 极 限 .....	1
第二节 极限的求法 .....	6
第三节 函数的连续性 .....	11
内容小结 .....	17
复习题 .....	18
第二章 导数及其应用 .....	20
第一节 导数的概念 .....	20
第二节 函数的求导法则 .....	25
第三节 隐函数的求导方法 .....	27
第四节 高阶导数 .....	29
第五节 微分及其近似计算 .....	30
第六节 洛必达法则 .....	33
第七节 函数的单调性 .....	37
第八节 极值与最值 .....	40
第九节 函数图像的描绘 .....	45
内容小结 .....	49
复习题 .....	50
第三章 不定积分 .....	52
第一节 不定积分的概念和性质 .....	52
第二节 换元积分法 .....	56
第三节 分部积分法 .....	62
内容小结 .....	65
复习题 .....	66
第四章 定积分及其应用 .....	68
第一节 定积分的概念和性质 .....	68
第二节 牛顿-莱布尼茨公式 .....	73
第三节 定积分的换元积分法 .....	74
第四节 定积分的分部积分法 .....	78
第五节 定积分的应用 .....	80
内容小结 .....	85

复习题	85
<b>第五章 常微分方程</b>	87
第一节 微分方程的基本概念	87
第二节 变量可分离的微分方程	91
第三节 一阶线性微分方程	94
内容小结	97
复习题	99
<b>第六章 多元函数微积分</b>	101
第一节 多元函数的极限与连续	101
第二节 偏导数	105
第三节 全微分及其近似计算	108
第四节 多元复合函数与隐函数的求导法则	110
第五节 多元函数的极值	114
第六节 二重积分的概念和性质	117
第七节 二重积分的计算	121
内容小结	126
复习题	127
<b>第七章 无穷级数</b>	129
第一节 常数项级数的概念与性质	129
第二节 常数项级数的判别法	132
第三节 幂级数	137
第四节 函数的幂级数展开式	142
内容小结	144
复习题	144
<b>第八章 拉普拉斯变换</b>	147
第一节 拉氏变换的概念与性质	147
第二节 拉氏逆变换及性质	153
第三节 拉氏变换的应用	156
内容小结	159
复习题	160
<b>第九章 线性代数初步</b>	161
第一节 行列式	161
第二节 矩阵的概念及计算	169
第三节 矩阵的初等变换和矩阵的秩	176

第四节	逆矩阵 .....	179
第五节	线性方程组 .....	183
	内容小结 .....	187
	复习题 .....	189
<b>第十章</b>	<b>离散数学 .....</b>	<b>191</b>
第一节	命题的概念 .....	191
第二节	命题联结词 .....	194
第三节	命题公式与真值表 .....	198
第四节	等价变换与蕴含式 .....	202
第五节	命题逻辑的推理理论 .....	206
第六节	图论 .....	213
第七节	图的路径、回路与连通性 .....	222
第八节	图的矩阵表示 .....	229
	内容小结 .....	234
	复习题 .....	236
<b>第十一章</b>	<b>随机事件及其概率 .....</b>	<b>239</b>
第一节	随机事件与样本空间 .....	239
第二节	概率与古典概型 .....	243
第三节	条件概率与事件的独立性 .....	247
第四节	随机变量与分布函数 .....	251
第五节	随机变量的数字特征 .....	258
	内容小结 .....	263
	复习题 .....	264

# 第一章 极限与连续

极限是高等数学中的一个重要概念. 极限概念的产生源于解决实际问题的需要, 极限理论的确立使微积分有了坚实的逻辑基础, 并使微积分在当今科学的各个领域得以更广泛、更合理、更科学地应用与发展. 本章主要介绍极限的基本概念和方法, 并用极限的方法讨论无穷小及函数的连续性.

## 第一节 极 限

### 一、引入

中国古代从先秦时期开始, 一直是取“周三径一”(即圆周周长与直径的比率为 $3:1$ )的数值来进行有关圆的计算. 我国魏晋时期伟大的数学家刘徽发现, 用“周三径一”计算出来的圆周长实际上不是圆的周长, 而是圆内接正六边形的周长, 其数值要比实际的圆周长小得多.

为了求出圆的精确面积, 刘徽发明了割圆术. 所谓割圆术, 其实就是极限的思想, 即用圆内接正多边形的面积来逼近圆的面积. 下面我们看一下刘徽割圆术的具体做法.

他从直径为 2 尺的圆内接正六边形开始割圆, 依次得正 12 边形、正 24 边形……割得越细, 正多边形面积和圆面积之差越小, 用他的原话说是“割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至于不可割, 则与圆周合体而无所失矣.”他割了 10 次, 计算了正 3072 边形的面积.

若把圆内接正 6 边形的面积记为  $S_1$ , 圆内接正 12 边形的面积记为  $S_2$ , 依此类推, 圆内接正  $6 \times 2^{n-1}$  边形的面积记为  $S_n$ , 圆的面积记为  $S$ , 则形成了一个数列  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  无限接近  $S$ .

本节导学

内容: 数列和函数的极限.

重点: ①极限的概念;  
②函数极限的判别方法.



刘徽(约 225—295).  
中国魏晋时期著名数学家.

观察数列变化方法:

①可从数字的变化规律上理解;②可从图形上点的位置变化规律上理解.

## 二、数列的极限

观察下列数列  $\{x_n\}$  的变化趋势.

$$\textcircled{1} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$\textcircled{2} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

$$\textcircled{3} 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \dots$$

$$\textcircled{4} 3, 3, 3, \dots, 3, \dots$$

发现当  $n$  趋近  $\infty$  (记为  $n \rightarrow \infty$ ) 时,

$$\textcircled{1} \text{式 } x_n = \frac{1}{n} \text{ 无限趋近 } 0 \text{ (记为 } x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{)};$$

$$\textcircled{2} \text{式 } x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0;$$

$$\textcircled{3} \text{式 } x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} \rightarrow 1;$$

$$\textcircled{4} \text{式 } x_n = 3 \rightarrow 3.$$

像这样,如果当  $n \rightarrow \infty$  时,有  $x_n$  无限趋近某一个常数  $A$ ,则称  $A$  为数列  $\{x_n\}$  的极限,或者称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $A$ ,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

$$\text{因此,} \textcircled{1} \text{式极限为 } 0, \text{可记为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\textcircled{2} \text{式极限为 } 0, \text{可记为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0;$$

$$\textcircled{3} \text{式极限为 } 1, \text{可记为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1;$$

$$\textcircled{4} \text{式极限为 } 3, \text{可记为 } \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3.$$

例 1.1.1 观察数列的变化趋势,写出极限.

$$(1) x_n = 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$(2) x_n = (-1)^n \frac{1}{n^n}$$

$$\text{解 } (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n^n} = 0$$

注意:数列的一般项  $x_n$  必须是趋近“唯一”的常数时,才有极限;但如果一般项  $x_n$  不是趋近常数(如  $\infty$ )或者变化趋势是几个常数时,数列都没有极限.如:

数列  $0, 1, 0, 1, \dots$

或数列  $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$

由于没有趋近“一个”确定的常数,所以这两个数列没有极限.

知识归纳:

①分母趋近无穷大,而分子为常数,则该分式的极限为 0;

②常数  $A$  的极限仍然为  $A$ .

## 练习 1.1.1

观察下列数列  $\{x_n\}$  当  $n \rightarrow \infty$  时的变化趋势, 写出极限.

(1)  $0, 1, 2, \dots, n-1, \dots$

(2)  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{n-1}{n+1}, \dots$

(3)  $x_n = 1 - \frac{1}{10^n}$       (4)  $x_n = \frac{2n}{1+3n}$

(5)  $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n!!}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n!}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

## 三、函数的极限

1. 当  $x \rightarrow \infty$  时, 函数的极限

观察图 1.1.1 中函数  $y = \frac{1}{x}$  的变化趋势.

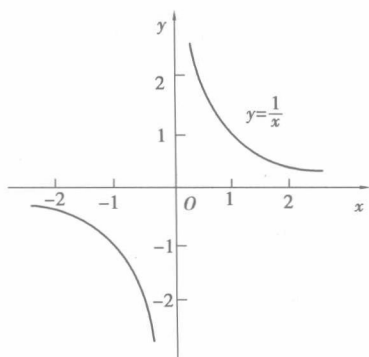


图 1.1.1

发现: 当  $x \rightarrow \infty$  时 (包括  $x \rightarrow +\infty$  和  $x \rightarrow -\infty$  两种情况), 函数  $y = \frac{1}{x}$  的变化趋势是无限趋近 0.

像这样, 当  $x \rightarrow \infty$  时, 函数  $y = f(x)$  的变化趋势是无限趋近某一个常数  $A$ , 则称  $A$  是函数  $y = f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的极限. 记为:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$$

如果当  $x \rightarrow +\infty$  时 (或  $x \rightarrow -\infty$  时), 函数  $y = f(x)$  的变化趋势是无限趋近某一个常数  $A$ , 则称  $A$  是函数  $y = f(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  时 (或  $x \rightarrow -\infty$  时) 的极限. 记为:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A)$$

例 1.1.2 观察函数  $y = \arctan x$  分别在当  $x \rightarrow +\infty$  和  $x \rightarrow -\infty$  时的变化趋势, 并求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ .

解 如图 1.1.2 所示.

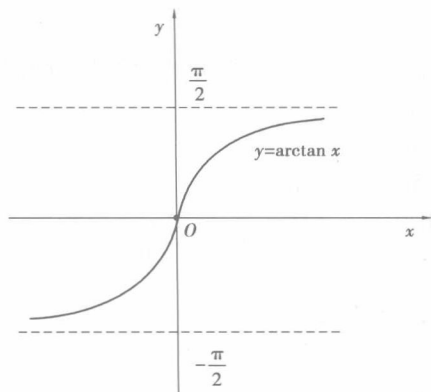


图 1.1.2

观察图形的变化趋势知：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

在这里,虽然  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$  与  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$  都存在,但它们并不相等,所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  不存在.

**练习 1.1.2**

观察函数的变化趋势,并写出极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$       (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}$

2. 当  $x \rightarrow x_0$  时,函数的极限

观察表 1.1.1 中,函数  $y=2x-1$  当  $x$  从 2 的左右两侧趋近 2 时,对应的函数值.

表 1.1.1

$x$	1	1.5	1.8	1.9	$\cdots \rightarrow$	2	$\leftarrow \cdots$	2.1	2.2	2.5	3
$y$	1	2	2.6	2.8	$\cdots \rightarrow$	3	$\leftarrow \cdots$	3.2	3.4	4	5

从函数值的变化趋势上可以看出:当  $x \rightarrow 2$  时,  $y \rightarrow 3$ .

如图 1.1.3 所示为函数  $y = \frac{x^2-1}{x-1}$  的图像.

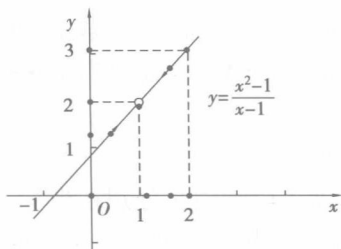


图 1.1.3

显然,当  $x$  从 1 的左右两侧趋近 1 时,  $\frac{x^2-1}{x-1}$  无限接近 2, 即当  $x \rightarrow 1$  时,  $y \rightarrow 2$ .

像这样,当  $x \rightarrow x_0$  时,函数  $y=f(x)$  的变化趋势是无限趋近某一个常数  $A$ , 则称  $A$  是函数  $y=f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限. 记为:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

例 1.1.3 观察图 1.1.3, 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ .

解 当  $x=1$  时,函数值不存在. 当  $x$  从 1 的左右两侧趋近于 1 时,而不是  $x=1$ , 此时,  $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$  都趋近于 2, 即  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ .

### 练习 1.1.3

画出函数的图形, 观察变化趋势, 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} |x|$$

### 3. 左极限与右极限

若当  $x$  从  $x_0$  的左侧趋近于  $x_0$  (记为  $x \rightarrow x_0^-$ ) 时, 函数  $y=f(x)$  无限趋近于某一个常数  $A$ , 则称  $A$  为函数  $y=f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的左极限. 记为:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-)$$

若当  $x$  从  $x_0$  的右侧趋近于  $x_0$  (记为  $x \rightarrow x_0^+$ ) 时, 函数  $y=f(x)$  无限趋近于某一个常数  $A$ , 则称  $A$  为函数  $y=f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的右极限. 记为:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$$

左极限与右极限也可分别记作  $f(x_0^-)$  与  $f(x_0^+)$ . 显然, 函数  $y=f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限存在的充要条件是: 当  $x \rightarrow x_0$  时, 函数  $f(x)$  的左右极限存在且相等, 即  $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ .

例 1.1.4 已知  $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

解 函数图像如图 1.1.4 所示.

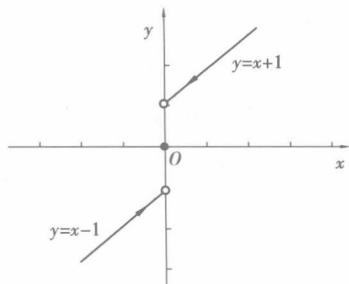


图 1.1.4

注意: 极限值是否存在与函数值是否存在并无关系.

例 1.1.3 解题说明: 本题是求  $f(x)$  的极限值, 不是求  $x=1$  的函数值, 因此求函数的极限与函数在  $x=1$  处是否有定义无关.

观察变化趋势可知:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1,$$

而  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

**练习 1.1.4**

$$\text{已知 } f(x) = \begin{cases} -x - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

**本节导学**

内容: ①极限的四则运算法则; ②两个重要极限; ③无穷小与无穷大.

重点: ①极限的四则运算法则的应用; ②会使用两个重要极限求解极限问题; ③利用等价无穷小的替换求解极限.

**注意:**

①参与运算的每个函数的极限必须存在; ②函数商的极限中, 分母的极限不能为零.

## 第二节 极限的求法

### 一、引入

由极限定义可知, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $3n - 1 \rightarrow \infty$ ,  $5n + 4 \rightarrow \infty$ , 因  $\infty$  不是一个确定的常数, 故  $3n - 1$ ,  $5n + 4$  的极限都不存在, 那么两者的商极限是不是也不存在呢? 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{5n + 4}$  是否存在?

### 二、极限的四则运算法则

若  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 则

$$\text{① } \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$$

$$\text{② } \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB.$$

$$\text{③ } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

说明: 极限的四则运算法则中的函数可以推广到有限个函数的情形.

例 1.2.1 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 3}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 3} \\ &= \frac{2 \times 1 + 1}{1^2 - 2 \times 1 + 3} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

例 1.2.2 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$ .

$$\text{解 原式} = \frac{1^2 + 2 \times 1 - 3}{1 + 1} = 0$$

例 1.2.3 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$ .

解 原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2+2x-1}{x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 0+2=2$

例 1.2.4 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ .

解 原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$

例 1.2.5 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{5n+4}$ .

解 原式 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{4}{n}} = \frac{3-0}{5+0} = \frac{3}{5}$

例 1.2.3 解题说明：  
约分化简，方法是展开分子。

例 1.2.4 解题说明：  
目的是约分化简，方法是分子有理化，分子分母同乘以某一项。

例 1.2.5 解题说明：  
目的是约分化简，方法是分子分母同时除以它们中  $n$  的最高次。

### 练习 1.2.1

1. 求下列极限。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 3)$                       (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$                       (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4-x}}$

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{3n^2 + n}$

2. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$ .

### 三、两个重要极限

1. 重要极限 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

例 1.2.6 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ .

解 原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$   
 $= 1 \times 1 = 1$

例 1.2.7 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ .

解 原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \times 1 = 3$

重要极限 1 的特点：

- ① 形状为  $\frac{0}{0}$  型；
- ② 含有三角函数；
- ③ 结构为  $\lim_{(\cdot) \rightarrow 0} \frac{\sin(\cdot)}{(\cdot)} = 1$ ，以含有  $(\cdot)$  为标准。

例 1.2.8 解题说明:  
利用三角函数倍角公式化简

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

练习(4)提示:

$$\sin x = -\sin(x - \pi)$$

重要极限 2 的特点:

① 形状为  $1^\infty$  型;

② 结构为

$$\lim_{() \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{()}\right)^{()} = e,$$

以含有 ( ) 的为标准.

解题方法:“倒倒抄”.

例 1.2.11 解题说明:  
极限的底数需要首先构造出“ $1 + ( )$ ”,然后再用“倒倒抄”.

归纳:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$  ( $k$  为常数)

例 1.2.8 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

练习 1.2.2

求下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

2. 重要极限 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

其中,  $e$  是一个无理数,  $e = 2.71828\dots$

例 1.2.9 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ .

分析: 这是  $1^\infty$  型. 应用重要极限 2, 用“倒倒抄”构造满足重要极限 2 的结构, 再计算极限.

$$\text{解 原式} = \lim_{-x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

例 1.2.10 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ .

$$\text{解 原式} = \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}} \right]^2 = e^2$$

归纳可得:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \text{ (} k \text{ 为常数)}$$

同理可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k \text{ (} k \text{ 为常数)}$$

例 1.2.11 求  $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{1-x}}$ .

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[1 + \left(\frac{2}{x+1} - 1\right)\right]^{\frac{1}{1-x}}$$

$$= \lim_{\frac{1-x}{x+1} \rightarrow 0} \left[ \left( 1 + \frac{1-x}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{1-x}} \right]^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{1}{2}}$$

例 1.2.12 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x$ .

解 原式 =  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-1}{x} \right)^x} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$

例 1.2.12 解题说明:

由于  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{x} \right) = e^k$

所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = e^{-1}$

### 练习 1.2.3

1. 求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$       (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{x+2}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{x} \right)^{3x}$       (4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x$

2. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{kx} = e^{-1}$ , 求常数  $k$ .

## 四、无穷小与无穷大

### 1. 无穷小

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ), 则称  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的

无穷小量, 简称无穷小.

说明: 无穷小一般情况下是一个绝对值无限变小的变量, 以常量形式出现的无穷小只有零这个数. 其他任何绝对值很小的常量都不能叫无穷小.

无穷小的性质:

- (1) 有限个无穷小的和仍然是无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积仍然是无穷小;
- (3) 有界函数与无穷小的乘积仍然是无穷小.

例 1.2.13 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ .

解 因为  $|\sin x| \leq 1$ , 且  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) 为无穷小, 由无穷小性质 3

可得:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \sin x \right) = 0$$

### 2. 无穷大

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ), 则称  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时

的无穷大量, 简称无穷大.

例 1.2.13 解题说明:

注意区别  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

和  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .