

有限单元法基本原理

王焕定 王 伟 戴鸿哲 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书从杆系有限元入手,较全面地介绍了有限单元法的基本原理。全书共分7章,作为教材,内容除最基本的弹性力学有限单元法外,还简单介绍了广义变分原理及其应用、加权余量、广义协调、半解析、样条元和边界单元法等基本知识。

本书可作为高等学校土木、水利、道路与桥涵及机械等专业高年级学生和研究生教材,也可供相关专业工程设计和研究人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法基本原理/王焕定,王伟,戴鸿哲编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016. 11

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6288 - 5

I. 有… II. ①王… ②王… ③戴… III. 有限元法—高等学校—教材 IV. ①O241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 268858 号

责任编辑 贾学斌 张 荣

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.25 字数 400 千字

版 次 2016 年 11 月第 1 版 2016 年 11 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 6288 - 5

定 价 35.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

现行的结构分析软件由前处理、核心计算和后处理三部分组成。随着可视技术的不断发展,软件的前处理功能更加方便使用者,按照说明书填写即可完成;后处理功能的图形化方便了计算结果分析,使得计算结果一目了然;但是核心计算部分却相当于黑匣子,这部分内容主要由有限元方法的程序实现,只有掌握有限单元法基本原理才能理解黑匣子里的核心内容,进而为分析计算结果的正确性提供帮助。因此,在使用结构分析软件之前一定要学习和掌握有限单元法基本原理。这就是本书的重要性。

本书作者讲授有限单元法课程已有二十多年了,其方法和原理发展变化不大,而软件的发展变化却很大。从着手编教学软件的配书光盘已经发展到了通用软件的极大普及,特别是各种通用软件教材为读教使用软件提供了帮助。为了适应发展变化,作者已将有限元方法课程分解为有限元方法原理和有限元分析软件两门课程。在有限元分析软件课程中取消了配书光盘中自编软件的内容,重点介绍通用软件建模、计算、分析及各种功能。要求学生在掌握有限元方法基本原理的前提下,能够使用一种通用软件进行简单的结构分析。

本书由王焕定、王伟、戴鸿哲共同撰写,全书由王伟教授主持统稿,参加编写修订的人员有戴鸿哲(第1章)、周春圣(第2章)、张博一(第3章)、赵威(第4章)、李泓昊(第5章)、李亮(第6章)和王伟(第7章)。

由于作者水平所限,书中难免存在不妥及疏漏之处,望广大读者给予指正。

作 者
2016年7月
于哈尔滨工业大学

011	元类高亮部	章 2 第
011	(元单 daolsM.l.H)元单曲管对薪进强型由自	1.2
051	元单曲管对薪进前三测由自	2.2
131	元单曲管对薪进前	2.3
141	元单曲管对薪进	2.4
141	元单曲管对薪进	2.2
741	元单曲管对薪进	2.2
第 1 章	预备知识		1
1.1	引言		1
1.2	矩阵符号约定		1
1.3	弹性理论有关方程矩阵表示		2
1.4	虚位移原理与势能原理		6
1.5	里兹法		15
	习题		20
第 2 章	杆系有限元分析		22
2.1	平面等直杆的单元分析		22
2.2	近似分析中虚位移原理的实质		28
2.3	平面杆系结构的整体分析		32
2.4	本章内容小结		39
	习题		39
第 3 章	弹性力学平面问题		41
3.1	引言		41
3.2	常应变三角形单元		42
3.3	有限元分析中的误差及收敛性		49
3.4	矩形双线性单元		50
3.5	单元的形函数及高阶单元		54
3.6	等参数单元的单元分析		66
3.7	有限元分析中一些应注意的问题		81
	习题		85
第 4 章	空间与轴对称问题		89
4.1	空间问题		89
4.2	轴对称问题		105
4.3	轴对称问题的等参元分析		110
4.4	非轴对称荷载		112
	习题		117

第 5 章 板壳有限元	119
5.1 12 自由度矩形薄板弯曲单元(R. J. Melosh 单元)	119
5.2 9 自由度三角形薄板弯曲单元	129
5.3 弹性地基板的分析	137
5.4 SAP 薄板弯曲单元	141
5.5 建立薄板弯曲协调元方法简介	147
5.6 考虑横向剪切影响的薄板弯曲单元	149
5.7 平面壳体单元	155
5.8 考虑横向剪切变形影响的壳体单元(曲面壳元)	164
5.9 轴对称变形的旋转壳体单元	173
5.10 广义协调元简介	177
习题	181
第 6 章 广义变分原理及其在有限元分析中的应用	183
6.1 虚力原理与余能原理	183
6.2 泛函的变换格式	185
6.3 含可选参数的广义变分原理	188
6.4 基于 Reissner 原理的混合元分析	190
6.5 薄板弯曲问题的混合元分析	192
6.6 放松边界连续性要求的变分原理及杂交元	199
6.7 本章的几点补充说明	205
习题	206
第 7 章 其他数值方法简单介绍	207
7.1 加权余量法的基本概念	207
7.2 离散型加权余量法	211
7.3 弹性力学平面问题的加权余量法	216
7.4 加权余量有限元及平面稳定温度场计算	218
7.5 广义协调元简介	223
7.6 半解析法	229
7.7 样条有限元	236
7.8 边界单元法的基本概念	240
7.9 弹性力学边界元间接法	244
7.10 弹性力学边界元直接法	246
参考文献	251

第 1 章 预备知识

1.1 引言

有限元法(Finite Element Method)是随着电子计算机的广泛应用而产生的一种计算方法。它是近似求解一般连续体问题的数值方法。

从物理方面看:它是用仅在单元结点上彼此相连的单元组合体来代替待分析的连续体,也即将待分析的连续体划分成若干个彼此相联系的单元,通过单元的特性分析,来求解整个连续体的特性。

从数学方面看:它是使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题,使问题大大简化,或者说使不能求解的问题能够求解。一经求解出单元未知量,就可以利用插值函数确定连续体上的场函数。显然,随着单元数目的增加,即单元尺寸的缩小,解的近似程度将不断得到改进。如果单元是满足收敛要求的,近似解将收敛于精确解。

有限元法借助于两个重要工具:在理论推导上采用了矩阵方法,在实际计算中采用了计算机技术。

本章将介绍学习有限元法的必要预备知识。下面介绍的弹性理论有关方程的矩阵表示以及虚位移原理与势能原理是建立有限元方程的重要理论基础。

1.2 矩阵符号约定

为书写方便,无论是一般矩阵,还是行阵、列阵均采用黑斜体字母来标记。例如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ 记为 } \mathbf{A}; [F_{s1} \ F_{s2} \ \cdots \ F_{sn}] \text{ 记为 } \mathbf{F}_s。$$

单位矩阵以特定符号记为 \mathbf{I} 或 \mathbf{I}_n , 后者的脚标 n 用以表示单位矩阵的阶数。

对角线矩阵以普通矩阵符号标记加脚标 diag 来表示,例如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ 记为 } \mathbf{A}_{\text{diag}}。$$

块对角矩阵采用如下方式来标记

$$\begin{bmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_n \end{bmatrix} \text{ 记为 } K_{\text{bdia}} \text{ 或 } \text{diag}[K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]。$$

1.3 弹性理论有关方程矩阵表示

以笛卡儿坐标三维问题为例来说明弹性理论有关方程矩阵的表示方式。

1.3.1 运动方程(内力与体积力的关系方程)

由弹性理论可知,在体积 V 内任意一点的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bx} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{by} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.3.1)$$

当记
$$\begin{cases} \mathbf{d} = [u \ v \ w]^T \quad (\text{位移列阵}) \\ \mathbf{F}_b = [X \ Y \ Z]^T \quad (\text{体积力列阵}) \\ \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T \quad (\text{应力列阵}) \end{cases} \quad (1.3.2)$$

时,若引入如下微分算子矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \quad (1.3.3)$$

则根据矩阵乘法规则不难证明,体内一点的运动方程可用如下矩阵方程来表示

在 V 内
$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} \quad (1.3.4)$$

当物体在外力作用下处于平衡状态时,上式变为平衡方程

在 V 内
$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b = \mathbf{0} \quad (1.3.5)$$

1.3.2 几何方程(应变与位移的关系方程)

由弹性理论可知,在微小变形情况下一点的六个应变分量可用位移表示,即

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \quad (1.3.6)$$

当记应变列阵为 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T$ (1.3.7)

时,由矩阵乘法不难验证几何方程可用如下矩阵方程表示 (1.3.20)

在 V 内 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{d}$ (1.3.8)

式中 \mathbf{A}^T ——微分算子 \mathbf{A} 的转置矩阵。

1.3.3 本构关系(物理方程——应力与应变的关系方程)

对于各向同性均质线弹性体,由弹性理论可知,应力与应变之间存在如下本构关系

在 V 内
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] & \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx} \end{cases} \quad (1.3.9)$$

当记

$$\mathbf{a} = \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \quad \text{对称} \quad (1.3.10)$$

时,式(1.3.9)的本构关系可用如下矩阵方程表示

在 V 内 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ (1.3.11)

或 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ (1.3.12)

上式中 \mathbf{D} 为弹性矩阵,由 \mathbf{a} 矩阵求逆可知

$$\mathbf{D} = \text{diag}[\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2] \quad (1.3.13)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1 = \frac{E(1-\mu)}{6(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_2 = \frac{E}{2(1+\mu)} \mathbf{I}_3 \end{cases} \quad (1.3.14)$$

当以拉梅系数表示本构关系时,有

$$D_1 = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G \end{bmatrix} \quad (1.3.15)$$

$$D_2 = GI_3$$

式中的拉梅系数为

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \\ G = \frac{E}{2(1+\mu)} \end{cases} \quad (1.3.16)$$

1.3.4 变形协调方程

当以应力作为基本未知量求解弹性力学方程时,通过本构关系所得的应变尚须在体积内满足如下变形协调方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{cases} \quad (1.3.17)$$

在 V 内

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

引入协调算子矩阵

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \\ -2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \\ 0 & -2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \end{bmatrix} \quad (1.3.18)$$

变形协调方程可用如下矩阵方程表示

$$\text{在 } V \text{ 内} \quad C\varepsilon = 0 \quad (1.3.19)$$

1.3.5 边界条件

1.3.5.1 应力边界条件

在已知表面力的边界面 S_σ 上,体内的应力与表面力之间存在如下应力边界条件

$$\begin{cases} F_{S_x} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ F_{S_y} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ F_{S_z} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (1.3.20)$$

式中 F_{S_x} 、 F_{S_y} 、 F_{S_z} ——已知表面力 x 、 y 、 z 方向分量;

l 、 m 、 n ——表面外法线方向余弦。

当记表面力矩阵为

$$\mathbf{F}_S = [F_{S_x} \quad F_{S_y} \quad F_{S_z}]^T \quad (1.3.21)$$

时,表面外法线方向余弦矩阵为

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix} \quad (1.3.22)$$

则应力边界条件可用矩阵方程表示如下

$$\text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad \mathbf{F}_S - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (1.3.23)$$

1.3.5.2 位移边界条件

在已知位移的边界面 S_u 上,体内的位移满足如下位移边界条件

$$\text{在 } S_u \text{ 上} \quad \begin{cases} u = \bar{u} \\ v = \bar{v} \\ w = \bar{w} \end{cases} \quad (1.3.24)$$

式中 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} ——已知位移沿坐标 x 、 y 、 z 的分量。

$$\text{若记} \quad \bar{\mathbf{d}} = [\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}]^T \quad (1.3.25)$$

为已知位移矩阵,则式(1.3.24)在 S_u 上可改写为

$$\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (1.3.26)$$

1.3.6 小结

综上所述,线弹性微小变形弹性理论全部方程和边界条件的矩阵表示为

$$\text{在 } V \text{ 内} \quad \text{运动方程} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2}$$

$$\text{平衡方程} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b = \mathbf{0}$$

$$\text{几何方程} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{d}$$

$$\text{本构关系} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\text{变形协调方程} \quad \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$$

$$\text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad \text{应力边界条件} \quad \mathbf{F}_S - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

$$\text{在 } S_u \text{ 上} \quad \text{位移边界条件} \quad \mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$$

1.4 虚位移原理与势能原理

不少书籍、资料中把虚位移原理表述成必要性命题,也即“若平衡,则对一切虚位移虚功方程恒成立”,根本不提原理充分性。个别书籍只证明原理的必要性,却将原理叙述成充要性命题,也即“若对一切虚位移虚功方程恒成立,则变形体必处于平衡状态”。我们曾对变形体虚位移原理的合理表述及证明进行过研究,本节仅就将变形体分割成无限个微元体集合的情况加以介绍。

1.4.1 变形体虚位移原理

1.4.1.1 外力总虚功的计算(无限分割情况)

下面以二维问题来说明外力总虚功的计算,对于三维问题读者可仿此自行建立相应算式。

1. 体内微元体上外力的总虚功计算

由图 1.1(a) 可见,以 A 点 x 方向负坐标面为例,面上应力的合力分别为

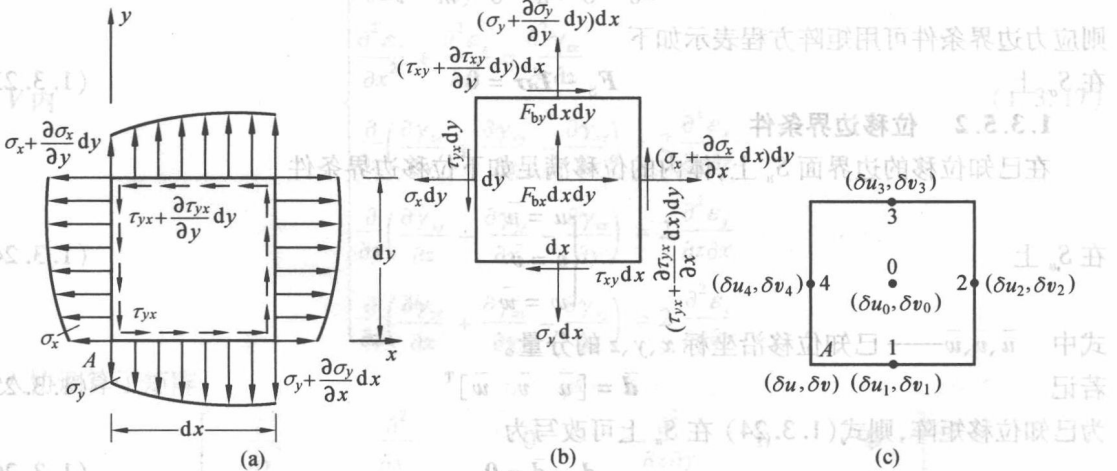


图 1.1 矩形微元体受力、虚位移示意图

$$\frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) \cdot dy + \text{高阶小量(曲线面积)} \approx \sigma_x dy$$

$$\frac{1}{2} \left(\tau_{yx} + \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot dy + o(dy^3) \approx \tau_{yx} dy$$

其他面上合力均可仿此获得,从而微元体各面所受合力如图 1.1(b) 所示,其中 F_{bx} 、 F_{by} 为微元体上的坐标方向体积力密度。图 1.1(c) 所标各点虚位移是对应图 1.1(b) 各合力作用点选取的。由虚位移的连续性可知,图 1.1(c) 上点 0 至点 4 的虚位移可由基点 A 的虚位移 $(\delta u, \delta v)$ 表示如下(基点可任意取,基点不同则各点的虚位移也不同)

$$\begin{cases} \delta u_0 = \delta u + \frac{1}{2}d(\delta u) & \delta v_0 = \delta v + \frac{1}{2}d(\delta v) \\ \delta u_1 = \delta u + \frac{1}{2}\frac{\partial \delta u}{\partial x}dx & \delta v_1 = \delta v + \frac{1}{2}\frac{\partial \delta v}{\partial x}dx \\ \delta u_2 = \delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial \delta u}{\partial y}dy & \delta v_2 = \delta v + \frac{\partial \delta v}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial \delta v}{\partial y}dy \\ \delta u_3 = \delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial \delta u}{\partial x}dx & \delta v_3 = \delta v + \frac{\partial \delta v}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial \delta v}{\partial x}dx \\ \delta u_4 = \delta u + \frac{1}{2}\frac{\partial \delta u}{\partial y}dy & \delta v_4 = \delta v + \frac{1}{2}\frac{\partial \delta v}{\partial y}dy \end{cases} \quad (1.4.1)$$

因此,微元体上的外力在微元体虚位移上所做的总虚功为

$$\begin{aligned} dW_{\text{四}} = & F_{\text{bx}}dx dy \delta u_0 + F_{\text{by}}dx dy \delta v_0 - \sigma_x dy \delta u_4 - \tau_{xy} dy \delta v_4 - \\ & \sigma_y dx \delta v_1 - \tau_{xy} dx \delta u_1 + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \delta u_2 + \\ & \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) dy \delta v_2 + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx \delta v_3 + \\ & \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \delta u_3 \end{aligned}$$

将式(1.4.1)代入上式,公式右端的虚位移均可由 $\delta u, \delta v$ 表示,经整理并略去高阶微量后
可得

$$dW_{\text{四}} = \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_{\text{bx}} \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_{\text{by}} \right) \delta v + \right. \\ \left. \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (1.4.2)$$

将如下矩阵引入式(1.4.2)

$$\text{虚位移列阵} \quad \delta \mathbf{d} = [\delta u \quad \delta v]^T \quad (1.4.3(a))$$

$$\text{体积力列阵} \quad \mathbf{F}_b = [F_{\text{bx}} \quad F_{\text{by}}]^T \quad (1.4.3(b))$$

$$\text{应力列阵} \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \quad (1.4.3(c))$$

$$\text{虚应变列阵} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = [\delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \gamma_{xy}]^T \quad (1.4.3(d))$$

微分算子矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.4.3(e))$$

由几何方程有

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \delta \mathbf{d} \quad (1.4.4)$$

所以式(1.4.2)的矩阵可表示为

$$dW_{\text{四}} = [(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b)^T \delta \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}] dx dy \quad (1.4.5)$$

(1) 从推导过程可以看出:

① $(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b)^T \delta \mathbf{d} dx dy$ 是微元体上全部外力在微元体刚性虚位移上所做的总虚功,记为 $dW_{\text{四,刚}}$ 。

② $\sigma^T \delta \epsilon dx dy = \sigma^T (A^T \delta d) dx dy$ 是微元体上全部外力在微元体变形虚位移上所做的总虚功的主部(略去了高阶微量), 记为 $dW_{变}$ 。

③ $F_0^T \delta d dx dy$ 是微元体上外荷载在虚位移上所做的总虚功的主部, 记为 $dW_{体}$ 。

④ $[\sigma^T \delta \epsilon + (A\sigma)^T \delta d] dx dy = [(A\sigma)^T \delta d + \sigma^T A^T \delta d] dx dy$ 是微元体上切割面力在虚位移上所做的总虚功的主部, 记为 $dW_{切}$ 。

(2) 当如上标记不同的微元体上有外力虚功时, $dW_{四}$ 有以下两种表示方法, 即

$$dW_{四} = dW_{四,刚} + dW_{变} \quad (\text{虚位移分成刚体与变形时})$$

$$dW_{四} = dW_{体} + dW_{切} \quad (\text{外力分成体积力与切割面力时})$$

因为表达的均为 $dW_{四}$ (微元体上外力总虚功), 因此

$$dW_{四,刚} + dW_{变} = dW_{体} + dW_{切}$$

2. 表面微元体上外力的总虚功计算

图 1.2 给出了表面三角形微元体受力及虚位移示意, 其中斜边长为 dS , F_{sx} 、 F_{sy} 为微元上的表面力, 微元体上各点的虚位移与微元体各面受力作用点相对应。由虚位移的连续性可知, 图 1.2(b) 中 0 点至 3 点的虚位移可由基点 A 的虚位移 $(\delta u, \delta v)$ 表示, 即

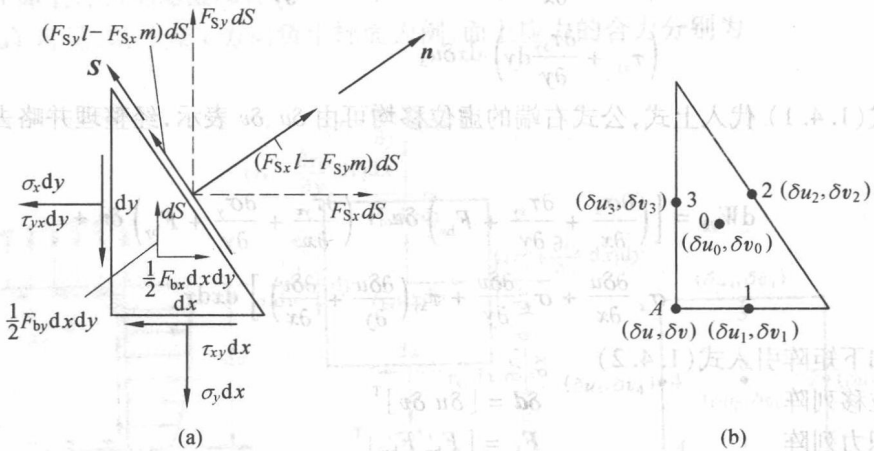


图 1.2 三角形微元体受力、虚位移示意图

$$\delta u_0 = \delta u + \frac{1}{3}d(\delta u) \quad \delta v_0 = \delta v + \frac{1}{3}d(\delta v)$$

$$\delta u_1 = \delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx \quad \delta v_1 = \delta v + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta v}{\partial x} dx$$

$$\delta u_2 = \delta u + \frac{1}{2}d(\delta u) \quad \delta v_2 = \delta v + \frac{1}{2}d(\delta v)$$

$$\delta u_3 = \delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta u}{\partial y} dy \quad \delta v_3 = \delta v + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta v}{\partial y} dy$$

微元体上的外力所做的总虚功, 经整理且略去高阶项后为

$$dW_{三} = \{ [F_{sx} - (\sigma_x l + \tau_{xy} m)] \delta u + [F_{sy} - (\tau_{xy} l + \sigma_y m)] \delta v \} dS \quad (1.4.6)$$

其矩阵表示为

$$dW_{三} = (F_s - L\sigma)^T \delta d dS \quad (1.4.7)$$

式中 $F_s = [F_{sx} \quad F_{sy}]^T$, 为表面力矩阵;

$$(1.4.8(a))$$

$$L = \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix}, \text{为方向余弦矩阵。} \quad (1.4.8(b))$$

从推导可见, $dW_{\text{三}}$ 是边界微元体上全部外力在微元体刚性虚位移上所做的总虚功的主部, 记为 $dW_{\text{三,刚}}$ 。

$F_s^T \delta d dS$ 是微元体上外荷载在虚位移上所做的总虚功的主部, 记为 $dW_{\text{表}}$ 。

$-(L\sigma)^T \delta d dS$ 是微元体上切割面力在虚位移上所做的总虚功的主部, 记为 $dW_{\text{切}}$ 。

同矩形微元体一样, 有

$$dW_{\text{三}} = dW_{\text{三,刚}} = dW_{\text{表}} + dW_{\text{切}}$$

3. 变形体上外力的总虚功

由式(1.4.5)和式(1.4.7)可得变形体上外力的总虚功 $W_{\text{外}}$ 为

$$W_{\text{外}} = \int_A [(A\sigma + F_b)^T \delta d + \sigma^T \delta \epsilon] dA + \int_{S_\sigma} (F_s - L\sigma)^T \delta d dS \quad (1.4.9(a))$$

在虚位移和微元体上外力作分解时, 上式也可表为

$$W_{\text{外}} = \int_A dW_{\text{体}} + \int_{S_\sigma} dW_{\text{表}} + \int_A dW_{\text{切}} = \int_A dW_{\text{四,刚}} + \int_{S_\sigma} dW_{\text{三,刚}} + \int_A dW_{\text{变}} = \int_A [(A\sigma + F_b)^T \delta d + \sigma^T \delta \epsilon] dA + \int_{S_\sigma} (F_s - L\sigma)^T \delta d dS \quad (1.4.9(b))$$

式(1.4.9)虽然是由二维问题推出的, 但只要所有矩阵都用三维问题情况代替, 即可变成三维的外力总虚功算式。

1.4.1.2 变形体虚位移原理(无限分割情况)

由上述分析可得, 任何变形连续体处于平衡状态的必要和充分条件是: 对任意虚位移, 外力所做的总虚功恒等于变形体所接受的总虚变形功, 也即恒满足如下虚功方程

$$W_{\text{外}} \equiv W_{\text{变}}$$

$$\text{或} \quad \int_V F_b^T \delta d dV + \int_{S_\sigma} F_s^T \delta d dS \equiv \int_V \sigma^T \delta \epsilon dV \quad (1.4.10)$$

1. 必要性证明

如果变形体处于平衡状态, 则由外力的总虚功可知

$$W_{\text{外}} = \int_V dW_{\text{四}} + \int_{S_\sigma} dW_{\text{三}}$$

设虚位移为刚性虚位移和变形虚位移时, 则

$$W_{\text{外}} = \int_V (dW_{\text{四,刚}} + dW_{\text{变}}) + \int_{S_\sigma} dW_{\text{三,刚}}$$

由刚体虚位移原理知

$$\int_V dW_{\text{四,刚}} + \int_{S_\sigma} dW_{\text{三,刚}} = 0$$

所以有

$$W_{\text{外}} = \int_V dW_{\text{变}} = W_{\text{变}} = \int_V \sigma^T \delta \epsilon dV$$

若将作用在微元体上的外力分为体积力、表面力和切割面外力, 则

$$W_{\text{外}} = \int_V (dW_{\text{体}} + dW_{\text{切}}) + \int_{S_\sigma} (dW_{\text{表}} + dW_{\text{切}})$$

因为变形是连续的, 相互作用力(切割面上的外力)所做的虚功相互抵消, 即

$$\int_V dW_{\text{切}} + \int_{S_\sigma} dW_{\text{切}} = 0$$

所以有

$$W_{\text{外}} = \int_V dW_{\text{体}} + \int_{S_\sigma} dW_{\text{表}} = \int_V \mathbf{F}_b^T \delta \mathbf{d} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{F}_s^T \delta \mathbf{d} dS$$

由此可得,变形体平衡时,有如下虚功方程成立

$$\int_V \mathbf{F}_b^T \delta \mathbf{d} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{F}_s^T \delta \mathbf{d} dS \equiv \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

2. 充分性证明

作为充分性证明的已知条件是对任意微小虚位移恒有

$$\int_V \mathbf{F}_b^T \delta \mathbf{d} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{F}_s^T \delta \mathbf{d} dS \equiv \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (1)$$

成立。假设变形体不平衡,则按达朗贝尔原理加上惯性力 $-\rho \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} dV$ 后,微元体在瞬时 t 处于

“动平衡”。因为 $-\rho \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} dV$ 属体积力,则根据必要性命题,在此 t 时刻必有

$$\int_V \left(\mathbf{F}_b - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} \right)^T \delta \mathbf{d} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{F}_s^T \delta \mathbf{d} dS \equiv \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (2)$$

由式(1)减式(2)可得

$$\int_V \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} \right)^T \delta \mathbf{d} dV \equiv 0 \quad (3)$$

式(3)所表示的是:若不平衡,在式(1)前提下变形体所应满足的条件。将式(3)展开成代数式,则有

$$\int_V \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV \equiv 0$$

因为虚位移 $\delta u, \delta v, \delta w$ 的任意性和独立性,因此在 V 内

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

也即微元体上每一点的加速度均为零,这表明在式(1)恒成立情况下,假设不平衡是不可能的(充分性证毕)。

另一种偏数学的充分性证明是如下进行的,根据格林公式中的虚功方程(1)可改为

$$\int_V \mathbf{F}_b^T \delta \mathbf{d} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{F}_s^T \delta \mathbf{d} dS \equiv \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_S (\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{d} dS - \int_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{d} dV$$

因为体积 V 的全部表面分为 $S_\sigma + S_u$, 而虚位移是满足位移约束的一种任意位移,所以在 S_u 上 $\delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$, 由此上式可改写为

$$\int_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b)^T \delta \mathbf{d} dV + \int_{S_\sigma} (\mathbf{F}_s - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{d} dS \equiv 0 \quad (4)$$

为避免应用尚不熟悉的格林公式,式(4)也可由如下说明获得。不管变形体是否平衡,变形体上全部外力在虚位移上所做的总虚功为

$$W_{\text{外}} \equiv \int_V [(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b)^T \delta \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}] dV + \int_{S_\sigma} (\mathbf{F}_s - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})^T \delta \mathbf{d} dS \quad (5)$$

充分性命题前提条件是

$$W_{\text{外}} = W_{\text{变}} = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (6)$$

因此,式(5)在式(6)的条件下即变为式(4)。自式(4)在 $\delta \boldsymbol{d}$ 的元素任意、独立的情况下,可得在 V 内

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{F}_b = \mathbf{0}$$

在 S_σ 上

$$\boldsymbol{F}_s - \boldsymbol{L}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

因而每个微元体(无论矩形还是三角形)均处于平衡状态。

1.4.1.3 几点说明

(1) 由于在证明虚位移原理过程中没有涉及变形体的本构关系,因此原理可适用于任何可变形物体。

(2) 变形体虚功原理(散度定理)与变形体虚位移原理不是一回事,前者表述为:

对于任意平衡的外力、应力体系 $(\boldsymbol{F}_b, \boldsymbol{F}_s, \boldsymbol{\sigma})$ 和任意协调、连续的可能位移场 $(\boldsymbol{d}, \bar{\boldsymbol{d}}, \boldsymbol{\varepsilon})$,均存在如下恒等关系:外力在可能位移上所做的总虚功恒等于变形体所接受的总虚变形功。

对于三维问题此关系可用如下虚功方程表示

$$\int_V \boldsymbol{F}_b^T \boldsymbol{d} dV + \int_{S_u} (\boldsymbol{L}\boldsymbol{\sigma})^T \bar{\boldsymbol{d}} dS + \int_{S_\sigma} \boldsymbol{F}_s^T \boldsymbol{d} dS = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (1.4.11)$$

— 必须注意,虚功方程中各量间满足如下关系

在 V 内

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{F}_b = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{d}$$

在 S_u 上

$$\boldsymbol{d} - \bar{\boldsymbol{d}} = \mathbf{0}$$

在 S_σ 上

$$\boldsymbol{F}_s - \boldsymbol{L}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

在此条件下力系和位移均可以是任意一个。

(3) 我们证明的是变形体分割成无限个微元体的情况,此时变形体上各点的虚位移 $\delta \boldsymbol{d}$ 均是独立、任意的,因此,所得的结论为虚位移原理等价于平衡条件。但若变形体上各点的虚位移并不具有独立性和任意性(如本书后面在单元分析等的应用中那样),这一命题先决条件的改变,必将导致原理结论的改变。所以在应用虚位移原理时,必须注意 $\delta \boldsymbol{d}$ 的任意性能达到什么程度,不可轻易地说变形体平衡。

(4) 平面杆系结构虚位移原理的虚功方程为

$$W_{\text{外}} = \sum \int_0^l (M\delta\kappa + F_Q\delta\gamma + F_N\delta\varepsilon) dx = W_{\text{变}} \quad (1.4.12)$$

式中 $\delta\kappa$ ——虚曲率;

$\delta\gamma$ ——虚剪切角;

$\delta\varepsilon$ ——虚轴向应变。

1.4.2 势能驻值原理

1.4.2.1 几个基本概念

I. 可能位移 \boldsymbol{d}_k

可能位移 \boldsymbol{d}_k 为满足位移边界条件和几何方程的位移。而真实位移除满足上述条件外,还要满足平衡方程和应力边界条件,因此真实位移是可能位移的特例。