火焰锋、浅水波与传输特征值问题的数值方法

张俊　安静/著

科学出版社

火焰锋、浅水波与传输特征值问题的数值方法

张 俊 安 静／著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书针对火焰锋、浅水波与传输特征问题，在介绍谱方法预备知识的基础上，讨论了求解这三类问题的数值方法，主要包括数值格式的构造、稳定性分析、基函数的构造、误差分析和数值模拟等，将数值结果与相关文献和理论的结果进行对比，证实了本书讨论的数值方法的有效性和稳定性。

本书适合计算数学等相关专业的研究人员和高校师生阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

火焰锋、浅水波与传输特征值问题的数值方法/张俊，安静著. —北京：科学出版社，2020. 3

ISBN 978-7-03-064636-1

Ⅰ. ①火… Ⅱ. ①张… ②安… Ⅲ. ①浅水波–数值计算 Ⅳ. ①O643.2 ②TV131.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 044516 号

责任编辑：郭勇斌 邓新平 / 责任校对：王萌萌
责任印制：张 伟 / 封面设计：众轩企划

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2020 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2020 年 3 月第一次印刷 印张：12 1/2
字数：238 000

定价：88.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

火焰锋方程是燃烧学中一类重要的数学方程，它涉及流体力学、反应动力学和其他物理化学方程。因为所描述现象的复杂性，很难用解析方法分析解的定量特征，所以借助数值方法来研究该问题。浅水波方程可以应用到海洋洋流、大气流、洪水漫滩等实际问题，这类方程及实际问题的建模方法在流体力学中越来越受到重视，我们可以通过数值方法更加深入地了解这些传播现象，揭示传播规律。传输特征值问题在逆散射理论中有着极其重要的应用，这主要是基于散射物体的材料特性可以用特征值问题来描述，该问题的研究主要体现在理论和数值计算方面。

目前，这三类问题的数值方法大多是低阶方法，需要重新构造一系列高阶方法。同时，作者在多年讲授偏微分方程数值解的教学实践中，发现大部分学生对偏微分方程数值方法的研究经常有迷惑不解或者误解。因此，我们对上述三类问题提出了高阶数值方法，并讨论了误差估计，主要包括数值格式的构造、稳定性分析、基函数的构造、误差分析和数值模拟实验等。任何对计算数学 (偏微分方程数值解方向) 不熟悉或者希望了解如何应用数值方法来求解方程的读者，他们均能从本书系统化及基础化的方法中受益。

本书具体结构如下。第 1 章介绍研究的几类问题的一些背景、研究现状及相关的预备知识。第 2 章介绍火焰锋方程的数值格式的构造、稳定性分析、误差估计及数值实验。第 3 章介绍几种较为流行的离散 K-S 方程的数值方法。第 4 章讨论两类浅水波方程的稳态解及其性质、时间半离散格式和数值实验。第 5 章研究两类黏性浅水波方程的时间离散格式、稳定性分析和误差估计。第 6 章讨论时间谐声波散射问题方程的变换场展开、弱形式逼近和数值实验。第 7 章讨论圆形区域上椭圆特征值问题的降维格式、弱形式、误差估计和数值实验。第 8 章讨论传输特征值问题的弱形式和误差估计、谱元法的应用、三维的传输特征值问题的降维方法

和数值实验。第 9 章讨论源问题的弱形式及误差估计、基函数的构造、三维情形的降维格式及应用。

由于作者水平能力有限，书中难免存在不足与疏漏之处，敬请各位同行、专家及广大读者批评指正。

作 者
2020 年 2 月
于贵阳

目　　录

第1章 绪论

1.1 引言

现代社会的动力来源主要来自燃料的燃烧，其应用遍及各个领域。在能源动力方面，如火力发电厂锅炉、工业用蒸汽、发动机等均是以固体、气体、液体燃料的燃烧产生的热能为动力 (热源)。在工业和生产中，钢铁、玻璃、陶瓷、塑料、纳米粒子等生产和加工过程中都伴有燃烧现象；日常生活中，可以观察到煤气和天然气的燃烧；环境与气候方面，氮氧化物、一氧化碳、硫氧化物、炭黑等都与燃烧有关；此外工程或自然中的爆炸和火灾预防等也涉及火焰传播规律的研究。

火焰锋面是一个流场区域，在这个区域内，急剧变化的流体的化学物成分以热的形式释放能量。在大多数情况下，这种燃烧现象非常复杂，因为它涉及热传导和辐射，浓度变化，不同组成部分的扩散和化学反应，等等。快速化学反应速率使得火焰锋面的厚度在一般条件下很薄，燃烧的化学反应只在该区域内进行，因此可以近似地把它当作一个数学表面。这一表面把未燃的燃料和燃烧产物分开，而所有的火焰传播即为此表面上的传播。燃烧学中用到的数学模型一般由在流体力学、反应动力学和其他物理化学方程基础上提出的微分方程所描述。由于方程和现象的复杂性，真正能够研究火焰传播的解析方法是很少的。近年来，高速计算机和先进算法的发展，使得借助数值方法研究火焰传播成为可能。一方面可以通过与解析及实验结果的对比来检验微分方程及其数值解的正确性，另一方面由数值结果可以观测到物理现象的定量特征，以给定的精度计算实际过程，还可能洞察物理现象的本质，有时还可以得到新的结论。

200 多年来，众多的数学家、物理学家致力于浅水波的研究，促进了水波数学理论的蓬勃发展。浅水波方程与火焰锋方程在数学描述上有相似之处，这是本书同时考虑两类方程的动机之一。最近几十年，浅水波方程的研究取得了极大的进展，基于浅水波方程的数值模拟成为研究热点 [1–3]。水深远小于波长的波称为浅水波，由此可见，浅水波的波速与水深有关，水越深，波速就越大。对于浅水波，水质点的竖直运动随水深增加而线性地减小，在水底变为零。浅水波不仅能描述浅底的自由表面在引力影响下的单向性传播，也能产生于深底的海洋中。海洋中最主要的浅

水波是海啸：由巨大的初始干扰产生的波长很大而高度相对小的海洋波。浅水动力模型应用实例有海洋洋流及大气流动、河道保护及洪水预报、洪水漫滩、近海风暴潮、溃坝决堤等。近年来这类模型与在此过程中数学建模的方法在流体力学中越来越受到人们的重视。但是由于这类模型和现象非常复杂，常常无法得到此类方程的解析解。快速发展的计算技术为求解此类方程提供了有力的工具。通过设计适当的数值方法，可以算出各种数学模型的数值解，通过分析这些数值解可以更加深入地认识现有的波的传播现象，揭示传播规律。

作为有界区域的边值问题，传输特征值问题在逆散射理论中有着重要的应用，这主要是因为散射物体的材料特性可以通过特征值来评估 [4–8]。近 10 年来，传输特征值问题的研究主要集中在两个方面：理论分析和数值计算。对于从一个不规则障碍物返射回来的声波和电磁波的散射问题，已经有很多数值方法被提出 [9–11]。在这些数值方法中，边界摄动方法是具有竞争力的一种方法，它的起源可以追溯到 Rayleigh[12] 和 Rice[13] 的工作。在最近一系列的论文中，Bruno 和 Reitich [14]，Nicholls 和 Nigam [15]，Nicholls 和 Reitich[16, 17] 已经严格证明这散射场不仅是光栅高度 (坡) 参数 ε 的解析函数，而且对于任意实值 ε 也是解析连续的。这些结果表明了边界摄动展开的收敛性，也证实了 Rayleigh[12] 和 Rice[13] 的经典算法。对于一些高阶的结果，我们可以参见 Bruno 和 Reitich [18–22]，Milder [23–26] 和其他学者的论文 [27–29]。然而，Nicholls 和 Reitich[16, 17] 也表明, 当高阶数值逼近被考虑的时候，这些数值方法一般都是病态的。因此，一种新的边界摄动算法 [17] 被提出，该算法是先通过一个变量变换，然后再利用 Rayleigh[12] 和 Rice[13] 的摄动思想。它克服了先前那些方法较差的条件数的缺陷。后来 Shen 等在这方面也做了很多工作 [30–33]。

1.2 火焰锋方程研究现状

人类对火及燃烧现象的实践已有相当长的历史。1703 年，德国化学家 Stahl 提出燃素论：一切物质之所以能够燃烧，都是由于其中含有被称为燃素的物质。但是这种说法被证明是完全错误的。1772 年法国科学家 Lavoisier 发表了第一篇关于燃烧的论文，他认为燃烧是一种化学现象。1774 年英国化学家 Priestley 发现了氧，Lavoisier 的燃烧学说得到确立，开始揭开了燃烧过程的本质，并因此引起了化学界的一大革新。19 世纪，由于热力学和热化学的发展，燃烧过程开始被作为热力学平衡体系来研究，阐明了燃烧过程中重要的平衡热力学特性。20 世纪初，美国化

学家 Lewis 和俄国化学家 Semyonov 等将化学动力学的机理引入燃烧的研究，认为化学反应动力学是影响燃烧速率的重要因素，初步奠定了燃烧的理论基础。从 20 世纪 30 年代开始，人们认识到燃烧是化学反应动力学、气体流动、传热、传质等物理因素的综合作用，逐步从反应动力学和传热、传质相互作用的观点建立了着火、火焰传播、湍流燃烧的规律。50~60 年代，Kármá [34–37] 首先提出用连续介质力学来研究燃烧基本过程，逐渐建立了“反应流体力学”。Spalding[38–41] 在 60 年代后期首先得到了层流边界层燃烧过程控制微分方程的数值解，并成功地接受了实验的检验。之后他和 Harlow 等 [42–48] 将“湍流模型方法”引入了燃烧学的研究，提出了湍流燃烧模型。80 年代后出现了“计算燃烧学”[49–52]。

Kuramoto[53] 在反应扩散系数的耗散结构中, 以及 Sivashinsky [54] 在火焰燃烧传播模型中和流体力学不稳定分析中，分别独立地得到了 K-S (Karamoto-Sivashinsky) 方程。这个方程的出现，引起了数学和物理学界相当大的关注，特别是它具有动力系统中的一类多孔结构、平面性质和一些混沌行为。之后在许多实际问题上的研究都能发现这一方程的应用，如等离子物理问题、热传导问题、氧化反应扩散、界面动力学中简化的自由面问题等。界面动力学中简化的自由面问题是一个极具挑战性的热点问题，近 10 年来已取得一些重要的结果。1979 年，Matkowsky 和 Sivashinsky[55] 提出了近等扩散火焰 (Near Equidiffusive Flames, NEF) 模型，引起了后续一系列重要的研究。

下面简单地介绍 NEF 模型。在二维槽型区域上考虑峰前峰后的两相方程：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta\theta, \quad x < \xi(t,y), \tag{1-1}$$

$$\theta = 1, \quad x \geqslant \xi(t,y), \tag{1-2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Delta S - \alpha\Delta\theta, \quad x \neq \xi(t,y), \tag{1-3}$$

其中 θ 为温度，S 为焓，$\xi = \xi(t,y)$ 为移动的火焰锋。$\xi(t,y) = -ct(c > 0)$ 表示传播速度为 $-c$ 的一维行波族。在火焰锋处，θ，S 是连续的，其导数存在跳跃：

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial n}\right] = -\exp(S), \qquad \left[\frac{\partial S}{\partial n}\right] = \alpha\left[\frac{\partial \theta}{\partial n}\right], \tag{1-4}$$

其中 α 是简化的 Lewis 数。Lewis 数在燃烧理论中是热量和分子扩散系数的比值，这里只考虑 $\alpha > 0$ 的情况。方程 (1-1)~方程 (1-4) 可以定义在两种区域：① 整个 $\mathbb{R}$ 上，或在 ② 带状区域 $\mathbb{R}\times\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$ 上，满足周期或 Neumann 边界条件。已经证明在两种情况下，系统 (1-1)~(1-4) 都存在速度为 -1 的平面行波解 $(\bar{\theta},\bar{S})$，若行波解稳

定性阈值记为 α_c，则上述 ① 时 $\alpha_c = 1$，② 时 $\alpha_c < 1$ 且随着 $l \to +\infty$，$\alpha_c \to 1$。当 $\alpha > \alpha_c$ 时，平面峰 $\varphi(t,y) = \xi(t,y) + t$ 的动态扰动是主要的研究方向。Sivashinsky[56] 引入参数 $\varepsilon = \alpha - 1$，然后作变量替换：

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon} y, \quad \varphi = \varepsilon \psi.$$

他证明了当 $\varepsilon \to 0$ 时，对于 ψ 的方程可以渐近收敛于 K-S 方程：

$$\partial_\tau \Phi + 4\partial_\eta^4 \Phi + \partial_\eta^2 \Phi + \frac{1}{2}(\partial_\eta \Phi)^2 = 0. \tag{1-5}$$

如果 $\alpha - 1$ 是正数但不够小，当偏离了稳定性阈值时，解的结构变得异常复杂。值得研究的问题之一是考察火焰锋的结构。如果考虑温度和焓的拟稳定假设，并且忽略高阶项，可以得到关于火焰锋 φ 扰动的非线性方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{B}(\varphi) = \mathscr{S}(\varphi) + \mathscr{F}((\partial_y \varphi)^2), \tag{1-6}$$

这里 $\mathscr{S}$ 是一个四阶微分算子：

$$\mathscr{S}(\varphi) = -4\partial_y^4 \varphi - (\alpha - 1)\partial_y^2 \varphi, \tag{1-7}$$

$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{F}$ 是拟微分算子。

Brauner 和 Lunardi[57] 研究了 NEF 预混火焰在整个平面传输这个二维自由面问题的平面行波解的不稳定性。Ducrot 和 Marion [58] 引入了一个小的参数 ε，并证明了一类二维 NEF 模型行波解的存在性。Lorenzi [59] 证明了二维预混火焰的自由面问题行波解的存在性和唯一性。Lorenzi[60–62] 证明了自由面问题 (1-1)~(1-4) 近行波解的存在性、唯一性、正则性和稳定性。Brauner 等 [63, 64] 考虑了一个火焰锋的 $\kappa - \theta$ 模型的准静态形式，并把它简化成单个的积分微分方程。对于接近不稳定的阈值，当固定时间区间，他们证明了方程的解收敛到 K-S 方程的解。Brauner 等 [65] 由 NEF 模型出发得到了一个简化的准静态 NEF 模型，他们同样也引入了一个小参数 ε，并证明了 ε 足够小的时候，这个方程渐近收敛到 K-S 方程。与之类似的还有 Brauner[66] 与他合作者的工作。最近，Brauner 等 [67] 考虑了一个带强阻尼算子的非线性方程，证明了这个方程渐近收敛到 K-S 方程，并且与简化的自由面问题 (1-1)~(1-4) 是等价的。

研究这类方程解的结构与性质是极为重要和具挑战性的。 Hyman 和 Nicolaenko[68, 69] 最早通过数值例子来研究 K-S 方程解的性质。之后 Kevrekidis 等 [70] 继续了他们的工作。他们的数值结果表明，K-S 方程具有多孔结构、混沌

行为等性质。借助这个模型我们可以研究动力系统中相关问题解的一些性质。本书研究的火焰锋方程是渐进收敛到 K-S 方程且具有 K-S 方程类似的结构。火焰锋方程作为燃烧理论中的二维自由面问题的一个具体例子，为我们了解燃烧理论中的界面动力系统提供了一个简捷的框架。

1.3 浅水波方程研究现状

浅水波方程的研究，最早起源于 1834 年英国数学家 Russell 对浅底运河中孤立波的实际观察。他在 1844 年发表《波动论》(*Report on Waves*)[71] 中详细地阐述了观察到的孤立波现象。1895 年荷兰数学家 Kortew 和他的学生 de Vries 建立了非线性浅水波动方程，即著名的 Kortew-de Vries(KdV)[72] 方程：

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u = 0,$$

并从中求出了孤立子解，理论上证明了孤立子的存在。从此之后，KdV 方程就成为浅水波理论的基本方程，该方程的初值问题及初边值问题获得了大量定性的研究 [73–77]。KdV 方程最主要的性质是它具有孤立波解，并且孤立波是孤立子。由于小波峰的线性理论不能推导出孤立波，所以研究这类问题的方法是通过非线性逼近长波极限情形时的控制方程。Kenig [75] 证明了当初值属于 H^1 时，KdV 方程是整体适定的。1972 年 Benjamin 等 [78] 用 Benjamin-Bona-Mahony(BBM) 方程

$$\partial_t u - \partial_t\partial_x^2 u + \partial_x u + u\partial_x u = 0$$

来描述水道中的表面波。与 KdV 方程相比，BBM 方程具有更好的光滑性质，也具有 Hamilton 结构，但它不是可积的，并且孤立波不是孤立子。它的解都是整体存在的 [79]，而且孤立波解是光滑的和轨道稳定的。Astaburuaga 等 [80]，Stanislavova 等 [81, 82]，Wang 等 [83]，He 等 [84] 先后不同程度地研究了 BBM 方程的吸引子。由于在一些实际问题上的应用，各种广义的 BBM 方程被人们逐渐认识。在描述小振幅的长波在非线性色散介质中传播的时候必须考虑耗散机制的影响，这种耗散会影响解所反应的真实情况。很多时候耗散会让波变得很复杂，不被我们所知。探究这类方程解的衰减率同样是一个挑战性的问题。Albert[85, 86] 考虑了如下广义 BBM 方程：

$$\partial_t u - \partial_t\partial_x^2 u + \partial_x u + u^p\partial_x u = 0, \quad p > 4 \tag{1-8}$$

解的衰减率，Biler[87] 考虑了广义 BBM 方程：

$$\partial_t u - \Delta\partial_t u + \beta\nabla u + u^p(\alpha\cdot\nabla u) = 0,\quad p > 3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3, \beta \neq 0 \tag{1-9}$$

解的衰减率，他们从理论上证明了方程 (1-8) 和方程 (1-9) 解的衰减率分别为 $\|u\|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{1}{3}}), \|u\|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{2}{3}})$，当 $t\to\infty$。Amick 等 [88] 以一类 KdV 和 BBM 方程为例，对任意的初值，从理论上证明了这些方程解的衰减率是

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(t^{-\frac{1}{4}}),\quad \|\partial_x u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(t^{-\frac{3}{4}}),\\ &\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(t^{-\frac{1}{2}}),\quad t\to\infty.\end{aligned} \tag{1-10}$$

相继又有很多人从事一类大时间 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers(BBMB) 方程解的衰减率的研究，如 Mei[89]，Kinami 等 [90]，Al-Khaled 等 [91]，Chen 和 Goubet[92]。Zhang[93]，Fang 和 Guo[94] 研究了 n-维 BBM 方程解的衰减率，并都得到了与式 (1-10) 类似的结果。但是，这些结果在很大程度上都需要数值实验去验证，特别是当时间很大的时候，很有必要知道数值格式是否合理，计算结果是否可靠。在数值方面，Dogan[95-97] 提出了线性元及二次和五次 B-样条有限元来求解一类正则长波方程。对 BBM 方程和 BBMB 方程，Omrani[98, 99] 提出了一个时间二阶格式、空间有限元/有限差分的数值方法。但是据我们所知，很少有人通过数值解来讨论长时间解的衰减率。本书第 3 章将构造三种无条件稳定的数值格式，在稳定性的基础上分析格式的误差估计，最后用数值例子讨论长时间解的衰减率。

黏性对重力波影响的模型是一个挑战性的问题，近 10 年来一直受到人们的关注。如果没有黏性项的影响，这类模型就是标准的单向的波渐进模型，我们在文献中经常遇到的是 Boussinesq 方程和 KdV 方程，而这些方程早在 19 世纪都已出现，并成功地用来解释许多物理现象。Kakutani 和 Matsuuchi[100] 首先讨论了黏性项对重力波的影响，他们提出了一类黏性水波模型，并指出这类渐进的黏性水波模型是一个带扩散项、色散项、非局部拟微分算子的偏微分方程。这类方程的特点就是扩散项与色散项相互影响，物理上的解释就是黏性边界层在流体中同时具有扩散与色散。最近 Dutyky 和 Dias[101] 介绍了一类在黏性影响下有限水深的流体边界层的水波模型，这类模型是 Liu 和 Orfila[102]，Bona 等 [103] 介绍的模型更一般的形式。与前者 ([102]) 的共同之处就是它们都包含相同的黏性项，与后者 (即 [103]) 相同的是它们可以在不同的水层里面自由的选取水平速度。值得一提是 Liu 和 Orfila[102]，Bona 等 [103] 分别独立地得到了这类渐进的黏性浅水波模型。他们通常也这把些模型称为非局部时间黏性项的 Boussinesq 方程。最近 Dutykh[104]，Chen 等 [105] 分别从有

限水深流体边界层的自由面问题

$$\partial_t \eta + \partial_x u + \partial_x(\eta u) + \frac{1}{3}\partial_x^3 u = 2\nu \partial_x^2 \eta + \frac{\nu^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t \frac{\partial_x u(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds, \tag{1-11}$$

$$\partial_t u + \partial_x \eta + u \partial_t u = 2\nu \partial_x^2 u \tag{1-12}$$

出发，得到如下单方向波方程：

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_x^3 u + \frac{\nu^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t \frac{\partial_s u(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = 0. \tag{1-13}$$

在方程 (1-11)~方程 (1-13) 中 η 表示波的自由面到平衡态的偏差，u 表示波的水平速度，ν 表示阻尼参数。Dutykh[104] 从数值上研究了方程 (1-11) 和方程 (1-12) 的 L^∞ 范数下解的衰减率。当方程 (1-13) 不含 $\partial_x^3 u$ 项时，Chen 等 [105] 考虑了方程 (1-13) 的适定性，并在数值上讨论了解的衰减率。对于给定的足够小的初值 u_0，他们证明了方程存在唯一的全局解且解满足：

$$t^{\frac{1}{2}} \|u(t)\|_{L_x^\infty} + t^{\frac{1}{4}} \|u(t)\|_{L_x^2} \leqslant C(u_0).$$

他们提出了一种时间半隐式、空间谱方法的数值格式 (显式处理非线性项，隐式处理其他项) 去计算方程的衰减率。对于二维 Boussinesq 系统下的一类水波模型的初边值问题，Chen[106] 提出了一种时间有限差分空间谱方法的半隐格式。但是这种格式是条件稳定的。Goubet 和 Warnault[107] 讨论了一种线性渐近的黏性水波模型，并提出了一些平衡解衰减率的估计。最近，Dumont 和 Duval[108] 从数值的角度，引入基于向后 Euler 方法的 G^α 格式来离散分数阶项，显式处理非线性项，对空间用谱离散。但是他们没有给出格式的稳定性分析，也没有进行误差估计，而且至今为止我们还没有看到 G^α 格式的稳定性的文献。基于这类问题的重要性与普适性，有必要设计适当的、可靠的数值方法计算这类问题的数值解，通过分析这些数值解来深入地认识现有的水波传播过程和现象，揭示水波传播规律。

1.4 声波和电磁波散射问题理论的发展

关于内部传输问题已有很多理论成果，该问题首先在声波的逆散射理论中被引入 [109]。由于它既不是椭圆的，也不是自共轭的，所以通常的椭圆偏微分方程的理论并不能够包含它。因此对于内部传输问题的适定性研究引起了很多学者的

兴趣，目前主要有两种方法，即积分方程方法 [110] 和变分方法 [111–113]。关于更多相关的存在性结果我们可以参考 [114]、[115]。但是关于传输特征值计算的文献很少，Colton 等 [116] 首先提出了传输特征值的分析和数值计算方法，即 Argyris 元法、混合有限元法及连续有限元法，从而为用特征值估计散射物体材料的性质提供了数值方法。后来 Sun 等在这方面又做了很多工作 [117–121]。时间谐波的传播已经广泛地应用于很多方面，例如，波的散射和传输，噪声减小，流体与固体间的相互作用，海洋和地震波的传输，等等。在一个外部区域 $\Omega = R^d \setminus D(d = 1, 2, 3)$, D 是一个有界区域，Nicholls 和 Shen [122] 提出了一种谱 Galerkin 方法求解源于声波散射问题的 Helmholtz 方程。在外部区域上的 Helmholtz 方程的数值分析和计算是一个很大的挑战，这主要是由于区域是无界的，另外当波数很大时，解是高度振荡的且衰减得很慢。关于这个问题，已经有很多不同的数值技巧被发展，如边界元法、无限元法、DtN 方法、极好匹配层方法等。在这些方法中，最关键的一步是在一个精确或者逼近非反射的外部边界条件下，在一个无界域上求解 Helmholtz 方程。特别地，在一种适当的边界摄动方法下，在外部区域上的 Helmholtz 方程能够化为一系列可分的有界区域上的 Helmholtz 方程。

本书在几个重要的方面延伸了 Nicholls 和 Reitich[16]，Nicholls 和 Shen [122, 123] 的工作。首先，将其研究延伸到内部流体和外部流体的两层介质情况，传输条件为压力和法向速度连续，在无穷远处满足辐射边界条件，也给出了相应的变换场展开算法。其次，构造了求解两个 Helmholtz 方程 (带着传输边界条件和映射 Dirichlet 数据到 Neumann 数据的算子 T) 的新的、有效的、高精度的、具有好的条件数的谱 Galerkin 方法。该方法有效且精度高是因为它利用了映射 Dirichlet 数据到 Neumann 数据的算子 T，虽然在物理空间它是整体的，但是在频率空间是局部的。因此，我们能够把这个二维问题化为一系列带着映射 Dirichlet 数据到 Neumann 数据的算子 T 谱精度逼近的一维问题。最后，构造了一个基函数，它可以得到一个稀疏，具有良好条件数的线性系统。我们可以利用这种新的方法研究变换场展开算法随着散射的频率由低到高变化时的行为。

关于传输特征值的分析和数值计算方法，Colton 等 [124] 已经提出了三种有限元方法。对于 Argyris 元法，它是基于原问题的一种四阶格式，不会产生伪特征值，然而在实际应用中这种方法是比较困难的，因为边界法向量并不遵从仿射变换，而且很多的局部自由度导致这相应的离散系统是很大的。混合有限元法在实际应用中它是相对容易的，但是在计算中会产生伪特征值。因此需要根据没有纯的虚特征值的性质挑选出正确的特征值。连续有限元法和前面两种有限元方法相比，对于应