高等院校公共课教材

工程数学

线性代数与概率统计

吕陇 主编

姚小娟 李建生 郭中凯 任秋艳 杨宏 副主编

清华大学出版社

工程数学——线性代数与概率统计

吕　陇　主　编

姚小娟　李建生

郭中凯　任秋艳　杨　宏　副主编

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是在高等教育大众化和办学层次多样化的新形势下，结合工科学生工程数学教学的基本要求，在独立学院多年教学经验的基础上编写而成的.

全书系统地介绍了工程数学的基本理论，内容包括：线性代数、概率论、数理统计等. 本书保持了对数学基础课程的较高要求，同时力争适应工科学生的应用性特点，在内容和结构的处理上尽量削枝强干、分散难点，力求结构完整、逻辑清晰、通俗易懂，并附有大量的例题和习题.

本书适合高等院校工科各专业本科学生使用，也可供教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学——线性代数与概率统计/吕陇主编. —北京：清华大学出版社，2018(2018.7 重印)
ISBN 978-7-302-48455-4

Ⅰ. ①工…　Ⅱ. ①吕…　Ⅲ. ①工程数学—高等学校—教材 ②线性代数—高等学校—教材 ③概率论—高等学校—教材　Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 225960 号

责任编辑：陈立静
封面设计：李　坤
责任校对：吴春华
责任印制：刘海龙
出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：**100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购：**010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课件下载：http://www.tup.com.cn, 010-62791865
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张：**16　　**字　数：**389 千字
版　　次：2018 年 1 月第 1 版　　**印　次：**2018 年 7 月第 2 次印刷
定　　价：38.00 元

产品编号：076939-03

前　　言

工程数学是继高等数学之后大学数学课程中又一门重要的基础课，一般包括线性代数和概率统计两大部分. 线性代数中的矩阵、线性方程组在工程技术领域有着广泛的应用，概率论与数理统计则是解决和处理工程领域大量随机现象问题的有力工具. 实践证明，学生在学习这两部分内容并把它们应用于实际时，常常感到困惑，无所适从. 线性代数中，基本概念和重要结论多而抽象；概率统计不仅思维缜密，而且有异于确定性数学中所习惯的形式逻辑的思维方式. 因此，把握教学改革的发展趋势，探索教学体系和教学内容的变迁轨迹，编写一本能适应办学层次多样化形势需要的工程数学教材是非常有必要的.

工程数学作为高等院校理工科一门重要的基础理论课，对提高学生的素质，优化知识结构，培养学生的逻辑思维能力、抽象思维能力、分析问题和解决工程问题的能力，提高创新意识，并为后续课程的学习打下坚实的数学基础起着重要的作用.

我们结合在独立学院多年的教学实践，编写了本教材. 全书共 13 章，主要介绍线性代数、概率论和数理统计等基础知识. 本书内容紧扣教学大纲，力求结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂，适合高等院校工科各专业学生和教师使用.

本书由吕陇担任主编，并负责全书的统稿工作。具体编写分工如下：第 1～2 章由李建生编写，第 3～4 章由郭中凯编写，第 5～6 章由姚小娟编写，第 7 章由任秋艳编写，第 8～13 章由吕陇、杨宏编写，附录材料与图表由李建生绘制.

本书在编写过程中得到了兰州理工大学技术工程学院的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中尚有不妥及错误之处，恳请同行和读者批评指正.

编　者

目　录

第 1 章　行列式 1

1.1　行列式的定义 1

1.1.1　全排列与逆序数 1

1.1.2　二阶行列式、三阶行列式 1

1.1.3　n 阶行列式的定义 3

1.2　行列式的性质 5

1.3　行列式按行(列)展开 8

1.3.1　行列式元素的余子式和代数余子式 8

1.3.2　行列式按某一行(列)展开定理 9

1.3.3　异乘变零定理 11

1.4　克莱姆法则 11

习题 1 12

第 2 章　矩阵 14

2.1　矩阵的概念 14

2.1.1　矩阵的定义 14

2.1.2　几种特殊矩阵 15

2.2　矩阵的运算 16

2.2.1　矩阵的加法 16

2.2.2　矩阵的数乘 17

2.2.3　矩阵的乘法 18

2.2.4　线性方程组的矩阵表示 19

2.2.5　矩阵的转置 20

2.2.6　方阵的行列式 21

2.2.7　方阵的幂 22

2.3　逆矩阵 23

2.3.1　逆矩阵的概念 23

2.3.2　矩阵可逆的判定 23

2.3.3　逆矩阵的性质 26

2.3.4　矩阵方程 26

2.4　矩阵分块 27

2.4.1　分块矩阵的概念 27

2.4.2　分块矩阵的运算 28

2.4.3　分块对角矩阵 30

2.5　矩阵的初等变换 32

2.5.1　线性方程组的消元解法 32

2.5.2　矩阵的初等变换 34

2.5.3　初等矩阵 35

2.5.4　利用初等变换求逆矩阵 38

2.6　矩阵的秩 40

习题 2 44

第 3 章　向量组的线性相关性 48

3.1　向量组及其线性组合 48

3.1.1　n 维向量及其线性运算 48

3.1.2　向量组的概念 49

3.1.3　向量组的线性组合 50

3.2　向量组的线性相关性 52

3.2.1　线性相关与线性无关的概念 52

3.2.2　线性相关与线性无关的判定方法 52

3.3　向量组的秩 55

3.3.1　最大线性无关组及向量组的秩 55

3.3.2　矩阵的秩与向量组秩的关系 56

3.4　向量空间 58

3.4.1　向量空间 58

3.4.2　基、维数与坐标 59

3.4.3　基与基之间的过渡矩阵及坐标变换 60

习题 3 61

第 4 章　线性方程组的解 64

4.1　线性方程组的解的条件 64

4.1.1　线性方程组解的情况 66

4.1.2　线性方程组解的存在性 70

4.1.3　线性方程组解的个数 71

4.2　线性方程组解的结构 75

4.2.1 齐次线性方程组解的结构........75
4.2.2 齐次线性方程组的基础解系.....76
4.2.3 非齐次线性方程组的解的结构..........79
习题 4..........81

第 5 章 相似矩阵及二次型..........84
5.1 向量的内积、长度及正交性..........84
5.2 方阵的特征值与特征向量..........88
5.3 矩阵的相似与对角化..........90
5.4 二次型..........94
5.4.1 二次型的概念与表示..........94
5.4.2 化二次型为标准形..........98
5.4.3 二次型的分类与判定..........99
习题 5..........101

第 6 章 概率论的基本概念..........104
6.1 随机事件的关系与运算..........104
6.1.1 随机试验..........104
6.1.2 随机事件..........105
6.1.3 样本空间..........105
6.1.4 事件之间的关系..........106
6.1.5 事件之间的运算..........107
6.2 随机事件的概率..........108
6.2.1 概率的统计学定义..........108
6.2.2 概率的古典定义..........110
6.2.3 概率的几何定义..........111
6.2.4 概率的基本性质..........112
6.3 条件概率..........112
6.3.1 条件概率的定义..........112
6.3.2 概率的乘法定理..........113
6.3.3 全概率公式..........114
6.3.4 贝叶斯公式..........115
6.4 随机事件的独立性..........116
习题 6..........118

第 7 章 随机变量及其分布..........121
7.1 随机变量及其分布函数..........121
7.1.1 随机变量的概念..........121
7.1.2 随机变量的分布函数..........122
7.2 离散型随机变量..........124
7.2.1 离散型随机变量及其概率分布..........124
7.2.2 离散型随机变量的分布函数..........124
7.2.3 几种重要的离散型随机变量的概率分布..........126
7.3 连续型随机变量..........127
7.3.1 连续型随机变量的分布函数..........128
7.3.2 连续型随机变量的概率密度..........128
7.3.3 常用的连续型随机变量的概率分布..........130
7.4 随机变量函数的分布..........135
7.4.1 离散型随机变量的函数的分布..........135
7.4.2 连续型随机变量的函数的分布..........136
7.5 多维随机变量及其分布..........139
7.5.1 二维随机变量..........139
7.5.2 二维随机变量的分布函数.....140
7.5.3 二维离散型随机变量的联合概率分布..........141
7.5.4 二维连续型随机变量的联合概率密度..........142
7.6 边缘分布与随机变量的独立性..........144
7.6.1 边缘分布..........144
7.6.2 随机变量的独立性..........145
7.7 二维随机变量函数的分布..........147
7.7.1 和的分布..........148
7.7.2 最大值与最小值的分布..........151
习题 7..........153

第 8 章 随机变量的数字特征..........156
8.1 数学期望..........156
8.1.1 离散型随机变量的数学期望..........156
8.1.2 连续型随机变量的数学期望..........157
8.1.3 二维随机变量的数学期望.....159
8.1.4 随机变量函数的数学期望.....160

8.1.5 数学期望的性质......161

8.2 方差......163

8.2.1 方差的概念......163

8.2.2 方差的性质......165

8.3 矩、协方差与相关系数......166

8.3.1 矩......167

8.3.2 协方差与相关系数......167

8.3.3 协方差和相关系数的性质......168

习题 8......169

第 9 章 大数定律和中心极限定理......172

9.1 大数定律......172

9.1.1 切比雪夫不等式......172

9.1.2 切比雪夫大数定律......173

9.1.3 伯努利大数定律......174

9.2 中心极限定理......174

习题 9......176

第 10 章 数理统计的基本概念......178

10.1 数理统计的基本概念及常用分布......178

10.1.1 总体......178

10.1.2 样本......179

10.1.3 统计量......180

10.1.4 常用分布......181

10.1.5 分位点......183

10.2 正态总体统计量的分布......185

10.2.1 单个正态总体的统计量的分布......185

10.2.2 两个正态总体的统计量的分布......189

习题 10......192

第 11 章 参数估计......194

11.1 点估计......194

11.1.1 矩估计法......195

11.1.2 极大似然估计......196

11.1.3 估计量的评选标准......200

11.2 正态总体参数的区间估计......201

11.2.1 区间估计的概念......201

11.2.2 单个正态总体参数的区间估计......202

11.2.3 两个正态总体参数的区间估计......205

11.2.4 单侧置信限......207

习题 11......208

第 12 章 假设检验......211

12.1 假设检验的基本概念......211

12.2 正态总体参数的假设检验......213

12.2.1 单个正态总体均值 μ 的假设检验......213

12.2.2 单个正态总体方差 σ^2 的假设检验......215

12.2.3 两个正态总体的假设检验......217

习题 12......221

第 13 章 线性回归分析......222

13.1 回归分析的基本概念......222

13.2 一元线性回归......223

13.2.1 一元线性回归的数学模型......223

13.2.2 a,b 的最小二乘估计与经验公式......223

13.2.3 最小二乘估计 $\hat{a},\hat{b}$ 的基本性质......224

13.2.4 建立回归方程后进一步的统计分析......225

13.2.5 一元非线性回归......230

习题 13......232

附表......233

参考文献......247

第 1 章 行 列 式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算方法；用行列式的定义和有关定理计算较简单的 n 阶行列式的方法，以及用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Gramer)法则.

1.1 行列式的定义

1.1.1 全排列与逆序数

定义 1.1.1 由 n 个不同的数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级(元)**排列**. 所有的 n 级排列的总数为 $n!$.

在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，若数 $i_t>i_s$，则称数 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 例如：

$$\tau(31254)=2+0+0+1+0=3;$$
$$\tau(263451)=1+4+1+1+1=8;$$
$$\tau(12345)=0+0+0+0+0=0.$$

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为奇数，则称该排列为**奇排列**；如果 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数，则称该排列为**偶排列**；一个排列中任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

例 1.1.1 求下列排列的逆序数：

(1) $23\cdots(n-1)n1$； (2) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

解 (1) $23\cdots(n-1)n1$ 的逆序为：$21,31,\cdots,(n-1)1,n1$，逆序数为 $n-1$.

(2) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 所含逆序为：

和 2 构成逆序的有 $3,5,7,\cdots,2n-1$，共 $n-1$ 个；

和 4 构成逆序的有 $5,7,9,\cdots,2n-1$，共 $n-2$ 个；

和 $(2n-2)$ 构成逆序的有 $2n-1$，共 1 个.

逆序数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.1.2 二阶行列式、三阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases} \tag{1.1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得式(1.1.1)的唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.1.2}$$

观察式(1.1.2)可知分子、分母都是由四个数相乘再相减而得. 其中分母都是由方程组(1.1.1)的四个系数确定，把这四个数按照它们在方程组(1.1.1)中的位置排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表式(1.1.3)所确定的**二阶行列式**，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.4}$$

此时，方程组(1.1.1)的唯一解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

由此可知，二阶行列式是由 2^2 个元素按一定的规律运算所得到的一个数，这个规律性在行列式的记号中称为“对角线法则”，如图 1.1.1 所示.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1.1.1

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

其对应的三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

称为三阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,. \tag{1.1.5}$$

比较上述定义，发现二阶行列式含有两项，三阶行列式含有六项，每行均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以相应的正负号，**请读者结合全排列与逆序数的概念总结冠以相应的正负号的规律**.

例 1.1.2 行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 的充分条件是( ).

A. $k=0$ B. $k=1$ C. $k=2$ D. $k=3$

解

$$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k\cdot k\cdot 1 + 2\times 0\times 1 + 2\times(-1)\times 1 - 1\cdot k\cdot 1 -$$

$$2\times 2\times 1 - 0\times(-1)\times k = k^2 - k - 6 = (k+2)(k-3)$$

所以，使行列式为零的充分条件是 $k=3$．答案为D.

例 1.1.3 解方程 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

解 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 3x - x^2 - x = -x^2 + 2x + 3 = -(x+1)(x-3) = 0$，解得 $x_1 = -1$，$x_2 = 3$.

为解决实际问题的需要，只研究二阶和三阶行列式远远不够，为研究更高阶的行列式，需要介绍全排列与逆序数的概念.

1.1.3 *n* 阶行列式的定义

观察式(1.1.5)展开的三阶行列式的六项，行号固定为自然数顺序 1，2，3，列号为任意排列 $j_1j_2j_3$．又知 $j_1j_2j_3$ 所有可能排列相应的逆序数具体如下：

$$j_1 \to j_2 \to j_3 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$$
$$1\to 2\to 3 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(123)} = (-1)^0 = 1$$
$$1\to 3\to 2 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(132)} = (-1)^1 = -1$$
$$2\to 1\to 3 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(213)} = (-1)^1 = -1$$
$$2\to 3\to 1 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(231)} = (-1)^2 = 1$$
$$3\to 1\to 2 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(312)} = (-1)^2 = 1$$
$$3\to 2\to 1 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(321)} = (-1)^3 = -1$$

共计 $3! = 6$ 种.

故

$$\begin{aligned}
式(1.1.5) &= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + \\
&\quad (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= \sum_{j_1j_2j_3}^{3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.
\end{aligned}$$

据此可以把行列式推广到更一般的情形.

定义 1.1.2 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列组成的

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1.6}$$

称为 n **阶行列式**，记作 $\det(a_{ij})$．其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为行列式的**一般项**.

数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式(1.1.6)的元素或元．元 a_{ij} 的第一个下标称为行标，表示元素位于第 i 行；第二个下标称为列标，表示元素位于第 j 列．位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1.1.6)的 (i,j) 元.

思考 n 阶行列式是否可表示为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$.

例 1.1.4 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix}=$________.

分析 行列式的完全展开式中，每一项都包含最后三行中位于不同列的元素，而后三行中只有第 4 列和第 5 列的元素不为 0，因此每一项都包含 0，从而这个行列式的值为 0.

例 1.1.5 计算对角行列式 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$ 与 $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$，其中未写出的元素都是 0.

证明 对第一式若记 $\lambda_i=a_{ii}$，则依行列式的定义，有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

对第二式若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式的定义，有

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

注：请读者自己计算下三角行列式(主对角线以上元素全为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

和上三角行列式(主对角线以下元素全为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.2 行列式的性质

用行列式的定义计算行列式是非常复杂的. 为了能够计算行列式，下面来研究行列式的性质.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1.2.1 行列式与其转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

证明 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并记

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$，那么由行列式的定义知

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D \end{aligned}$$

性质 1.2.2 交换行列式的两行(列)，行列式变号.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换 i,j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

性质 1.2.3 若一个行列式有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零.

性质 1.2.4 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘此行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

第 i 行(或列)乘以数 k，记作 $r_i \times k$(或$c_i \times k$).

性质 1.2.5 若行列式有一行(列)的元素全为零，则行列式等于零.

性质 1.2.6 若行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式等于零.

性质 1.2.7 若行列式的某一行(列)各元素都是两数之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.8 将行列式某一行(列)所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上，行列式的值不变.

第 i 行(或列)乘以数 k 加到第 j 行(或列)上，记作 kr_i+r_j(或kc_i+c_j).

以上性质请读者自己证明.

例 1.2.1 设 D 为 n 阶行列式，则 $D=0$ 的充分必要条件是(　　).

A. D 中有两行(列)的对应元素成比例

B. D 中有一行(列)的所有元素全为零

C. D 中有一行(列)的所有元素均可以由行列式的性质化为零

分析 三个选项都是 $D=0$ 的充分条件，而 $D=0$ 只能推出 D 中有一行(列)的所有元素均可以由行列式的性质化为零，即 C.

答案 C.

例 1.2.2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&-1&-1&2\\1&-1&0&2\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}$.

解 $D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-2)r_1]{r_3+r_1}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&1&-1&2\\0&3&1&-4\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3+r_2]{r_4+3r_2}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&-2&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_3}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-4$$

计算行列式时，常用行列式的性质，将其化为三角形行列式来计算．例如，化一般行列式为上三角形行列式的步骤如下。

如果第一列第一个元素为 0，先将第一行(列)与其他行(列)交换，使第一列第一个元素 $a_{11}\neq 0$；然后把第一行分别乘以适当的数加到其他各行，使第一列除第一个元素 a_{11} 外其余元素全为 0；再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的 $n-1$ 阶行列式；依次作下去，直至使其成为上三角形行列式，这时主对角线上元素的乘积就是行列式的值．

例 1.2.3 证明 $\begin{vmatrix}a_1+c_1&b_1+a_1&c_1+b_1\\a_2+c_2&b_2+a_2&c_2+b_2\\a_3+c_3&b_3+a_3&c_3+b_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$.

证 将左端行列式按照性质 1.2.7 分为 8 个行列式之和

$$\begin{vmatrix}a_1+c_1&b_1+a_1&c_1+b_1\\a_2+c_2&b_2+a_2&c_2+b_2\\a_3+c_3&b_3+a_3&c_3+b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&b_1&a_1\\a_2&b_2&a_2\\a_3&b_3&a_3\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}a_1&c_1&c_1\\a_2&c_2&c_2\\a_3&c_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&c_1&a_1\\a_2&c_2&a_2\\a_3&c_3&a_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&b_1&c_1\\b_2&b_2&c_2\\b_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&b_1&a_1\\b_2&b_2&a_2\\b_3&b_3&a_3\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}b_1&c_1&c_1\\b_2&c_2&c_2\\b_3&c_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\\b_3&c_3&a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\\b_3&c_3&a_3\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}.$$

例 1.2.4 设 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 $D=D_1D_2$．

证 对 D_1 作运算 kc_i+c_j 化为下三角行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \dots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\dots p_{kk}\text{；}$$

对 D_2 作运算 kc_i+c_j 化为下三角行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} \end{vmatrix}=q_{11}\dots q_{kk}.$$

相当于，对 D 的前 k 列作运算 kc_i+c_j，对 D 的后 n 列作运算 kc_i+c_j，把 D 化为下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \dots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

所以 $D=p_{11}\dots p_{kk}q_{11}\dots q_{nn}=D_1D_2$．

1.3 行列式按行(列)展开

一般情况下，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算简便，本节考虑用低阶行列式来表示高阶行列式的问题．先给出行列式元素的余子式和代数余子式的概念．

1.3.1 行列式元素的余子式和代数余子式

定义 1.3.1 记 n 阶行列式为 $D=\det(a_{ij})$，把 $D=\det(a_{ij})$ 中 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}；记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则称 A_{ij} 为 a_{ij} 的**代数余子式**．

例如，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

中 $a_{11}=1$ 和 $a_{23}=6$ 的余子式分别是

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix},\ M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

它们的代数余子式分别是

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11},\ A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

1.3.2 行列式按某一行(列)展开定理

定理 1.3.1 一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零，那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积.

证 (1) 设 $(i,j)=(1,1)$，此时设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

由例 1.2.4 得 $D=a_{11}M_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}$.

(2) 一般情形，此时设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了利用(1)的结果把 D 的第 i 行依次与前一行对调，再把第 j 行依次与前一列对调，这样经过 $(i-1)+(j-1)=i+j-2$ 次调换，把数 a_{ij} 调成 $(1,1)$，由性质 1.2.2 知，所得行列式 $D_1=(-1)^{i+j-2}D$，而 D_1 中 $(1,1)$ 元的余子式就是 D 中 (i,j) 元的余子式 M_{ij}.

利用(1)的结果，有 $D_1=a_{ij}M_{ij}$，于是，

$$D=(-1)^{i+j-2}D_1=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

定理得证.

定理 1.3.2 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即可以按任一第 i 行展开:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n);$$

或可以任一第 j 列展开

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由定理 1.3.1 得，$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad (i=1,2,\cdots,n)$．

同理得 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (j=1,2,\cdots,n)$．

例 1.3.1　计算 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$．

解　利用各行的元素之和相同的特点，把除第 1 列以外的各列加到第 1 列，第 1 列提出公因子 15，然后再给第 5 行减去第 4 行、……、第 2 行减去第 1 行，得

$$D=\begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第1列展开}}15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

将上面最后一个行列式的各行加到第 1 行并提取第 1 行的公因子 (–1)，得

$$D=-15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1875\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

在上面最后一个行列式中，交换第 1 行和第 4 行，再交换第 2 行和第 3 行，得