高中基础知识丛书

数学

四川人民出版社

高中基础知识丛书

数　学

四川人民出版社
一九八三年·成都

高中基础知识丛书　《数　学》

四川人民出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　国营五二三厂印刷

开本787×1092毫米　印张14.25　字数31.5千
1984年1月第1版　1984年1月第1次印刷
印数：1—375,600册

书号：7118·792　定价：1.12元

出版者的话

中学教育是基础教育。为了配合普通中学向高一级学校输送合格的新生和为四化建设提供劳动后备力量，我们出版了一套“高中基础知识丛书”，以帮助应届高中毕业生系统复习和掌握各科基础知识和基本技能；同时供报考电大、职工业余大学、以及招收高中毕业生的其它升学考试和文化考试复习之用；也可供教师指导学生复习时参考。

这套丛书是根据中学各科教学大纲和中学现行教材的基本内容，结合教师的教学实践和在校学生以及广大青年自学的需要编成的。丛书包括《政治》、《语文》、《历史》、《地理》、《数学》、《物理》、《化学》、《生物》、《英语》等，共九种。为使这套丛书适应上述读者对象，我们把丛书起点定在初中毕业程度；选材力求精炼，叙述简明扼要，并努力做到概念准确、条理清楚、详略得当、题型多样、重难点突出。对于各学科有关综合运用和灵活掌握知识的问题，我们在配备例题、选题上作了合理安排，以利广大读者复习、巩固和提高。

这本《数学》的编写，分代数、三角、立体几何、解析几何、极限和微积分五部分。第1—7章由陆中权、第8—10章由张朝中、第11—12章由邓先闵、第13—19章由黄元正分别编写，陆中权同志任主编。曾坤伦同志提出了不少宝贵意见，谨致谢忱。

对书中不当之处，敬请读者提出意见，以便再版时改正。

一九八三年九月

目　录

第一章　集合与对应　充要条件证明方法

一　集　合

具有某种属性的一些对象的全体形成一个集合。

集合使用大写字母A、B、C、…、X、Y、Z表示。例如，我们常用N表示全体自然数的集合，I表示全体整数的集合，R表示全体实数的集合，C表示全体复数的集合。

集合里的各个成员叫做集合的元素，使用小写字母a、b、c、…、x、y、z表示。

不含任何元素的集合叫做空集，用ϕ表示。

如果a是集合A的元素，就说a属于A，表示为$a\in A$；如果a不是集合A的元素，就说不属a于A，表示为$a\notin A$。

（一）集合的表示法

（1）列举法：把集合的元素一一列举出来，写在大括号内用来表示集合。

例如，由整式x^2，$3x+2$，$5y^3-x$，x^2+y^2组成的集合，可以表示为

$$\{x^2,\ 3x+2,\ 5y^3-x,\ x^2+y^2\}.$$

（2）描述法：把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内用来表示集合。

例如，由不等式$x-3>2$的所有的解组成的集合，可

以表示为　　$\{x : x-3>2\}$。

全体有理数的集合，可以表示为

$$\left\{\frac{p}{q} : p、q\text{是整数，}q\neq 0\right\}。$$

全体实数的集合，可以表示为

$$\{x : -\infty<x<+\infty\}。$$

全体复数的集合，可以表示为

$$\{a+bi : a\text{与}b\text{是实数，}i^2=-1\}。$$

闭区间$[a, b]$内的实数集合，可以表示为

$$\{x : a\leqslant x\leqslant b,\ x\in R\}。$$

开区间(a, b)内的实数集合，可以表示为

$$\{x : a<x<b,\ x\in R\}。$$

（二）集合的一些概念

（1）子集：对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A就叫做集合B的子集，表示为　$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$。

读作“A包含于B”，或“B包含A”。

任何一个集合都是它本身的子集，即$A\subseteq A$。

规定空集是任何集合的子集，即$\phi\subseteq A$。

（2）真子集：如果A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A就叫做集合B的真子集，表示为$A\subset B$、或$B\supset A$。

（3）集合的相等：对于两个集合A、B，如果$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，那么集合A和集合B就叫做相等，表示为$A=B$。

（4）全集：在研究集合与集合间的关系时，这些集合常常是某一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集，用

符号 I 表示。也就是说，全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素。

（5）交集：由同时属于A和B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的交集。表示为：$A\cap B$，图1—1中阴影部分表示为$A\cap B$。

图1—1

对于任何集合A，$A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$。

（6）并集：由属于A或者属于B的一切元素所组成的集合叫做集合A与B的并集。表示为：$A\cup B$ 图1—2中阴影部分表示为$A\cup B$。

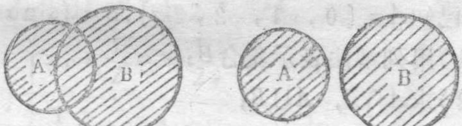


图1－2

对于任何集合A，$A\cup A=A$，$A\cup\phi=A$。

（7）补集：若全集为I，$A\subseteq I$，则由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A的补集。表示为$\overline{A}$。图1—3中阴影部分表示$\overline{A}$。

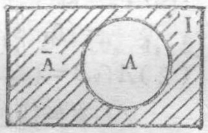


图1—3

对于任何集合A，$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$。

（三）对　应

（1）单值对应：设A与B是两个集合，如果按照某种对应关系，使A的任何一个元素，在B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应关系叫做从集合A到集合B的单值对应

（也叫做映射）．A中的元素a所对应的B中的元素b叫做a的象，a叫做b的原象．

（2）一一对应：设A、B是两个集合，f是从集合A到集合B的单值对应，如果对于集合A的不同元素，在B中有不同的象，而且B中的每一个元素都有原象，这种单值对应叫做从A到B的一一对应．

（3）逆对应：设f是从集合A到集合B的一一对应，对于B中的每一个元素b，使在A中b的原象a和它对应，这样所得的对应叫做对应f的逆对应，表示为f^{-1}．显然f也是f^{-1}的逆对应．

例1　已知$A=\{0, 1, 2, 2\pi\}$，$B=\{\sin\alpha : \alpha\in A\}$．

（1）用列举法表示集合B；

（2）求$A\cap B$，$A\cup B$；

（3）由$A\to B$的对应是否为单值对应（映射），是否为一一对应，为什么？

解　（1）$B=\{\sin 0, \sin 1, \sin 2, \sin 2\pi\}$

$$=\{0, \sin 1, \sin 2\}.$$

（2）$A\cap B=\{0, 1, 2, 2\pi\}\cap\{0, \sin 1, \sin 2\}=\{0\}$．

$$A\cup B=\{0, 1, 2, 2\pi\}\cup\{0, \sin 1, \sin 2\}$$
$$=\{0, 1, 2, 2\pi, \sin 1, \sin 2\}.$$

（3）对A中的任一元素，B中都有唯一的元素对应．即$0\to 0$，$1\to\sin 1$，$2\to\sin 2$，$2\pi\to 0$．故$A\to B$的对应为单值对应．但是，B中元素0对应A中的元素0和2π，故$A\to B$的对应不是一一对应．

例2　设$A=\{(x, y) : 3x+2y=1\}$，$B=\{(x,y) : x-y=2\}$，

$C=\{(x,y) : 2x-3y=3\}$，$D=\{(x,y) : 6x+4y=2\}$，

求$A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap D$。

解 $A\cap B=\left\{(x,\ y):\begin{cases}3x+2y=1\\x-y=2\end{cases}\right\}=\{(1,\ -1)\}$，

$B\cap C=\left\{(x,\ y):\begin{cases}x-y=2\\2x-2y=3\end{cases}\right\}=\phi$，

$A\cap D=\left\{(x,\ y):\begin{cases}3x+2y=1\\6x+4y=4\end{cases}\right\}=\{(x,y):3x+2y=1\}$。

例 3 设方程$2x^2+x+m=0$的解集为A，方程$2x^2+nx+2=0$的解集为B，且$A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$。求$A\cup B$。

解 设$A=\left\{\frac{1}{2},\ x_1\right\}$，$B=\left\{\frac{1}{2},\ x_2\right\}$。

由韦达定理，得$\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},\\\frac{1}{2}\cdot x_2=1\end{cases}$

解得 $x_1=-1$，$x_2=2$。

所以 $A\cup B=\left\{\frac{1}{2},-1\right\}\cup\left\{\frac{1}{2},\ 2\right\}=\left\{-1,\ \frac{1}{2},\ 2\right\}$。

例 4 设$A=\{x:x^2-2x-3\leqslant 0,\ x\in J\}$，$B=\{0,\ 4,\ 5\}$，$I=\{x:|x-1|\leqslant 4,\ x\in J\}$。

求$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cup B$，$A\cap\overline{B}$及A的子集的个数。

解 $A=\{x:x^2-2x-3\leqslant 0,\ x\in J\}$

$=\{x:-1\leqslant x\leqslant 3,\ x\in J\}$

$=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$。

$I=\{x:|x-1|\leqslant 4,\ x\in J\}$

$=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$。

所以 $\overline{A}=\{-3,\ -2,\ 4,\ 5\}$。

$\overline{B}=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3\}$。

$\overline{A}\cup B=\{-3,\ -2,\ 0,\ 4,\ 5\}$。

$A\cup\overline{B}=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$。

A的子集个数为：

$$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=(1+1)^5=32.$$

例5 设集合$A=\{x:\cos x=1\}$，$B=\left\{x:\dfrac{\sin x}{1-\cos x}=0\right\}$

求$A\cup B$，$A\cap B$。

解 $A=\{x:x=2n\pi,\ n\in J\}$，

$B=\{x:x=(2n+1)\pi,\ n\in J\}$，

所以 $A\cup B=\{x:x=n\pi,\ n\in J\}$，$A\cap B=\phi$。

例6 下列各对应关系中，指出哪些只是单值对应，哪些又是一一对应，或者都不是？

（1）f_1：点$(x,\ y)\to$点$(x,\ 0)$；

（2）f_2：点$(x,\ y)\to$点$(x',\ y')$，

其中$x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta$；

（3）f_3：实数$x\to\lg x$；

（4）f_4：平面内的点$P\to$以P为圆心的单位圆；

（5）f_5：$0°$到$180°$间的角$\alpha\to\sin\alpha$；

（6）f_6：平面内的三角形$\to$这个三角形的外接圆。

解 单值对应：f_1，f_5，f_6。

一一对应：f_2，f_4。

f_3既不是一一对应，又不是单值对应。

二 充要条件

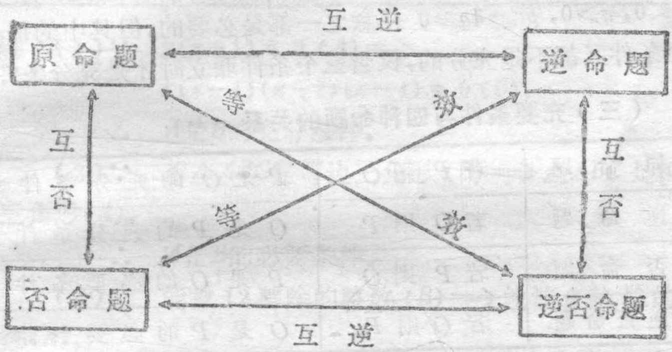
（一）命 题

判断一件事情的句子称为命题，它或者是真的或者是假

的，二者必居其一。

命题都可以分为题设P（已知事项）和结论Q（由题设推出的结果）二部分，常写成“若P则Q”的形式。简记作“$P \Rightarrow Q$”。

命题的四种形式



原命题与其逆否命题等效；逆命题与否命题等效。

但是，在什么情况下，原命题与其逆命题等效呢？下面要回答这个问题。

（二）充要条件

充要条件是一个命题中充分条件和必要条件的简称。

充分条件：若题设P具备时，结论Q必然出现，即有命题“若P则Q”成立，则题设P就称为结论Q的充分条件，即是说当题设P没有被满足时，结论Q也可能出现。

必要条件：若必须题设P具备时，结论Q才能发生，即若有命题“若Q则P”成立，则题设P就叫做结论Q的必要条件，即是说当题设P没有被满足时，结论Q就不能成立；当题设P具备时，结论Q未必都出现。

充要条件：若题设P既是结论Q的充分条件，又是结论Q的必要条件，则题设P称为结论Q的充分必要条件。命题形式为：若Q则P，且若P则Q。数学中有时叙述为："当且仅当P时，则Q".或"必须且只须P时，则Q"。

例如：方程$x^2+px+q=0$（p，q为实数）有两正实根的充要条件是$p<0$，$q>0$，$p^2-4q\geqslant 0$。应该指出的是：这里$p<0, q>0, p^2-4q\geqslant 0$任意之一都是必要的，但其中的任一个条件又都不是充分的，仅当三个条件联立时才是充分条件。

（三）充要条件与四种命题的关系

原命题	若P则Q	P是Q的充分条件
逆命题	若Q则P	Q是P的充分条件
否命题	若$\overline{P}$则$\overline{Q}$	P是Q的必要条件
逆否命题	若$\overline{Q}$则$\overline{P}$	Q是P的必要条件

其中$\overline{P}$，$\overline{Q}$分别为题设P，结论Q的否定。

说明：1.若P是Q的充分条件时，Q一定是P的必要条件。因为一个命题与其逆否命题等效，而逆命题与其否命题等效.反之，若P是Q的必要条件时，Q一定是P的充分条件。

2.若原命题与逆命题（或否命题）都成立，则否命题（或逆命题）和逆否命题也都成立，这时P称为Q的充要条件，Q也是P的充要条件.换言之，若P是Q的充要条件，则命题"若P则Q"与其逆命题"若Q则P"等效.这样，命题与它的三个衍生命题都等效。

例1 指出表中条件A是B的充分条件，还是必要条件，还是充要条件或者都不是。

	A	B
1	$x(x-1)=0$	$x(x-1)(x-2)(x-4)=0$
2	$\triangle ABC$是锐角三角形	$\triangle ABC$是等边三角形
3	能被6整除的整数	能被12整除的整数
4	$ax^2+bx+c=0$(a, b, c是实数$a\neq0$)有实数根	$\triangle=b^2-4ac\geqslant0$

解 (1)∵ $x(x-1)=0\ (A)\Longrightarrow$

$x(x-1)(x-2)(x-4)=0\ (B)$,

∴ A是B的充分条件。

(2)∵ 若$\triangle ABC$是等边三角形$(B)\Longrightarrow\triangle ABC$是锐角三角形$(A)$,

∴ A是B的必要条件。

(3)∵ 能被12整除的整数$(B)\Longrightarrow$能被6整除的整数(A),

∴ A是B的必要条件。

(4)∵ $ax^2+bx+c=0$ (a、b、c为实数, $a\neq0$)有实数根$(A)\Longleftrightarrow\triangle=b^2-4ac\geqslant0$ (B),

∴ A是B的充要条件。

例2 求证:a、b、c为正数的充要条件是

$$\begin{cases}a+b+c>0,\\ab+bc+ca>0,\\abc>0.\end{cases}$$

证明 充分性:

$a+b+c>0$,则a、b、c中至少有一个为正数。不妨设$a>0$,由$abc>0$,得$bc>0$,即b, c同号。

(1)若$b>0$, $c>0$,则a、b、c均大于零。

（2）若$b<0$，$c<0$，相加，得$b+c<0$，

由$a+b+c>0$，可得$a>-(b+c)$，

同乘$b+c$得　$a(b+c)<-(b+c)^2$。

又$\because$　$ab+bc+ca>0$，即$a(b+c)+bc>0$，

$a(b+c)>-bc$，$\therefore$　$-(b+c)^2>-bc$。

整理　得　$b^2+c^2+bc<0$，这与$b^2>0$，$c^2>0$，$bc>0$矛盾。因此$b<0$，$c<0$不成立。

所以　$a>0$，$b>0$，$c>0$，充分性得证。

必要性：

$\because$　$a>0$，$b>0$，$c>0$。故得

$$\begin{cases} a+b+c>0, \\ ab+bc+ca>0, \\ abc>0 \end{cases}$$

必要性得证。

例3　证明四边形$ABCD$有一组对边平行的充要条件是$\sin A\sin C=\sin B\sin D$。

证明　充分性：

如果　$\sin A\sin C=\sin B\sin D$，由于$A+B+C+D=2\pi$，则有

$$\sin A\sin C=\sin B\sin[2\pi-(A+B+C)]$$
$$=-\sin B\sin(A+B+C)。$$

积化和差，得　$$-\frac{1}{2}[\cos(A+C)-\cos(A-C)]$$
$$=\frac{1}{2}[\cos(A+2B+C)-\cos(A+C)],$$

即　$$\cos(A-C)-\cos(A+2B+C)=0。$$

再和差化积，得　$2\sin(A+B)\sin(B+C)=0$，

则　$\sin(A+B)=0$　或　$\sin(B+C)=0$，

得　$A+B=\pi$　或　$B+C=\pi$，

所以　$AD\parallel BC$　或　$AB\parallel CD$。

必要性：

如果 $AD \parallel BC$ 或 $AB \parallel CD$，则

$$A+B=\pi \quad \text{或} \quad B+C=\pi.$$

得 $\sin A=\sin B$，$\sin D=\sin C$ 或 $\sin A=\sin D$，$\sin B=\sin C$。

所以 $\sin A\sin C=\sin B\sin D$。

三 证明方法

（一）分析法

分析法是一种执果索因的证明方法，就证明过程来讲，它是一种从未知到已知（从结论到题设）的逻辑推理方法，也就是，先假设所要求证明命题的结论是真确的，由此逐步推出此结论成立的必要的判断.而当这些判断是定义、公理、定理、法则、公式等或者是要证命题的已知条件时，命题得证。

例 1 设a、b为互不相等的正数，且$a+b=1$，则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>4.$$

证明 要证 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>4$成立，

只需证 $\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}>4$成立，（$a+b=1$）

即需证 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$成立，（$a>0$，$b>0$）

$\because \left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2>0$ 显然成立，由此命题得证。

例 2 设a、b、c为任意三角形三边长，$I=a+b+c$，$S=ab+bc+ca$，试证$3S\leqslant I^2<4S$。

证明 由$I^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$$=a^2+b^2+c^2+2S.$$

故要证 $3S\leqslant I^2<4S$，只需证 $3S\leqslant a^2+b^2+c^2+2S<4S$，即 $S\leqslant a^2+b^2+c^2<2S$。（这对于保证结论成立是充分必要的）。

要证上式左部分 $S\leqslant a^2+b^2+c^2$，只需证 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqslant 0$，即只需证$(a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ca)\geqslant 0$（这对于保证前一式结论成立也是充要的）。

注意到：$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$，$b^2+c^2-2bc=(b-c)^2\geqslant 0$，$c^2+a^2-2ca=(c-a)^2\geqslant 0$，故结论成立。

要证上式右部分$a^2+b^2+c^2<2S$，只需证：$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca<0$，即要证：

$$(a^2-ab-ac)+(b^2-bc-ba)+(c^2-ca-cb)<0.$$

即要证 $a^2<ab+ac$，$b^2<bc+ba$，$c^2<ca+cb$为真．也就是要证 $a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$为真．因为三角形一边小于其他两边和，它们显然都成立． 证毕．

例 3 若 $a>b>c>0$，试证 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$．

证明 欲证$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$，只需证，

$$\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}>1$$ 由指数运算法则只需证，

$$a^{2a-(b+c)}b^{2b-(c+a)}c^{2c-(a+b)}>1.$$

即 $a^{(a-b)-(c-a)}b^{(b-c)-(a-b)}c^{(c-a)-(b-c)}>1$.

即要证，$\frac{a^{a-b}b^{b-c}c^{c-a}}{a^{c-a}b^{a-b}c^{b-c}}>1$．再由指数运算法则，只需证，