时标上的共形分数阶Sobolev空间及应用

周见文　王艳宁　李永昆　著

科学出版社

时标上的共形分数阶Sobolev空间及应用

周见文　王艳宁　李永昆　著

科学出版社
北京

内容简介

本书旨在建立应用变分方法研究时标上的共形分数阶微分方程边值问题的工作空间，并应用变分方法研究时标上的共形分数阶微分方程边值问题解的存在性和多解性. 首先，我们完善了时标上的共形分数阶微积分的一些性质. 其次，我们在时标上的共形分数阶微积分理论的基础上建立了时标上的共形分数阶 Sobolev 空间，研究了该空间的完备性、自反性、一致凸性、嵌入定理以及其上满足一定形式的泛函的连续可微性等重要性质. 最后，作为其在变分方法中的应用，我们在这类空间上构造了时标上的共形分数阶 p-Laplacian 微分方程边值问题、时标上的共形分数阶 Hamiltonian 系统、时标上的脉冲共形分数阶 Hamiltonian 系统、时标上具受迫项的共形分数阶 Hamiltonian 系统、时标上的共形分数阶脉冲阻尼振动问题等五类时标上的共形分数阶微分方程边值问题的变分泛函，应用临界点理论研究其解的存在性和多解性，并举例说明所给条件的合理性和有效性.

本书可作为高等院校理工科研究生以及教师从事科学研究工作时的参考书，也可供从事相关理论和应用研究的科研人员使用.

图书在版编目(CIP)数据

时标上的共形分数阶 Sobolev 空间及应用 / 周见文，王艳宁，李永昆著.
—北京：科学出版社，2019.4

ISBN 978-7-03-061059-1

Ⅰ. ①时… Ⅱ. ①周… ②王… ③李… Ⅲ. ①微分方程-边值问题-研究
Ⅳ. ①O175.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 073250 号

责任编辑：胡庆家 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 4 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2019 年 4 月第一次印刷 印张：10 1/2
字数：130 000

定价：78.00 元

前　言

变分方法是研究时标上的共形分数阶微分方程边值问题可解性的有效方法. 应用变分方法研究时标上的共形分数阶微分方程边值问题时, Sobolev 空间是最基本的工具. 时标上的共形分数阶 Sobolev 空间作为构造时标上的共形分数阶微分方程边值问题对应变分泛函的工作空间, 在研究时标上的共形分数阶微分方程边值问题解的存在性和多解性时起着重要的作用. 关于 Sobolev 空间理论的研究, 诸多研究者做出了很多研究成果, 但据我们所知, 目前在国内还没有关于时标上的共形分数阶 Sobolev 空间方面的中文专著出版, 为填补这一不足, 我们尝试撰写此书, 希望本书的出版能为从事时标上的共形分数阶微分方程边值及相关领域研究与应用的科研工作者提供理论工具, 进一步丰富时标及共形分数阶微分方程相关领域的理论和研究. 与此同时, 我们也希望通过本书的出版吸引更多的学者, 壮大时标上的共形分数阶微分方程及相关领域的研究队伍.

本书是云南大学的周见文教授、李永昆教授和昆明医科大学王艳宁老师一同编著的, 旨在建立应用变分方法研究时标上的共形分数阶微分方程边值问题的工作空间, 并应用变分方法研究时标上的共形分数阶微分方程边值问题解的存在性和多解性. 本书主要包括三部分内容. 第一部分 (第 1 章) 介绍分数阶微积分的研究背景. 第二部分 (第 2 章) 完善时标上的共形分数阶微积分的一些性质, 并在时标上的共形分数阶微积分理论的基础上建立时标上的共形分数阶 Sobolev 空间, 研究该空间

的完备性、自反性、一致凸性、嵌入定理以及其上满足一定形式的泛函的连续可微性等重要性质. 第三部分 (第 3 章至第 7 章) 作为共形分数阶 Sobolev 空间理论在变分法中的应用, 我们在这类空间上构造了时标上的共形分数阶 p-Laplacian 微分方程边值问题、时标上的共形分数阶 Hamiltonian 系统、时标上的脉冲共形分数阶 Hamiltonian 系统、时标上具受迫项的共形分数阶 Hamiltonian 系统、时标上的共形分数阶脉冲阻尼振动问题等五类时标上的共形分数阶微分方程边值问题的变分泛函, 应用临界点理论研究其解的存在性和多解性, 并举例说明所给条件的合理性和有效性.

本书的出版得到了国内外同行专家的大力支持, 在此表示衷心感谢.

本书的出版得到了云南大学一流大学建设数学学科建设项目 (C176210208)、云南省中青年学术和技术带头人后备人才项目 (2015HB010)、国家自然科学基金项目 (11561072) 和云南省应用基础研究面上项目 (2016FB011) 的经费资助.

本书可作为高等院校理工科研究生以及教师从事科学研究工作时的参考书, 希望能对时标上的共形分数阶微分方程边值及相关领域的学习、教学及应用有所帮助.

作　者

2019 年 2 月

目　录

第 1 章 导　　论

1.1 时标上的整数阶微积分简述

经济学、生物学、生态学、天文学等领域中的动力学模型的变量除了纯连续的和纯离散的情形之外, 还有连续和离散的混合情形. 因此, 微分方程模型和差分方程模型不能完全描述这些领域中的动力学过程. 为了统一微分方程和差分方程的研究, 并将微分方程和差分方程的理论推广到变量是连续和离散的混合情形, Aulbach 和 Hilger 在文献 [1] 和 [2] 中创立了时标的概念和时标上的微积分理论, 并在文献 [3] 和 [4] 中给出了时标上的微积分和微分方程的一系列重要概念和性质. 时标 $\mathbb{T}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的非空闭子集, 并遗传 $\mathbb{R}$ 的拓扑. 除了 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ 这两个常见的时标特例外，还有很多其他形式的时标，如 $\mathbb{T}=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}[3k,3k+2]$ 等. 时标及时标上的微积分的上述特点决定了其在经济学、生物学、生态学、天文学等学科中的重要作用 (可参见文献 [1], [5], [6]). 自时标的概念和时标上的微积分创立以来, 时标上的动力学方程引起了许多学者的广泛关注, 时标上的动力学方程理论得以不断发展和完善, 可参见文献 [7]—[19] 及其相关文献. 尽管如此, 这只是关于时标上的整数阶动力方程的研究结果. 时标上的分数阶动力方程的研究结果还不多见 (参见文献 [20], [21]).

1.2 分数阶微积分的历史背景与分数阶微分方程的研究现状

整数阶微积分是在数学家牛顿和莱布尼兹分别在研究力学和几何学

过程中建立起来的. 随着微积分理论的不断发展, 很多实际问题的数学模型都可以用整数阶微分方程 (动力系统) 描述. 无论是整数阶微分方程 (动力系统) 的理论研究还是数值求解都已有比较完善的理论. 但从整数阶导数的定义看, 其定义是局部性的, 不适合描述具有记忆性的动力学过程, 如关于信号处理的动力学过程. 因此, 当我们用整数阶微分方程 (动力系统) 对材料、系统控制、系统识别等领域中的问题进行描述时, 就会遇到很大的困难. 分数阶微分方程就能克服这一困难, 而且还能弥补整数阶微分方程在研究这些问题时所存在的不足之处. 比如, 黎曼–刘维尔分数阶导数, 从定义上看, 是微分和积分的卷积算子, 其中积分能够充分体现出被求导函数对变量的历史依赖性, 是具有记忆性的动力学过程建模的有力工具.

关于分数阶微分方程, 应从分数阶微积分谈起. 1695 年, 洛必达在给莱布尼兹的信函中提到"对 $f(x) = x$, 如果求导的阶数不是整数阶, 是 $\frac{1}{2}$ 时情况如何?" 这一问题, 在这样的情形下, 分数阶导数被首次提出. 直至 1832 年, 刘维尔才回答了这一问题, 创立了分数阶微积分, 解决了势理论问题. 分数阶微积分是对整数阶微积分的推广 [22]. 从其发展历史看, 几乎与整数阶相同, 因而, 分数阶微积分是个古老的课题. 然而, 分数阶微积分发展至今天, 才在越来越多的应用学科背景的影响下, 得到数学界的重视和广泛关注. 从这一角度看, 分数阶微积分及其相关理论又是一个前沿的新颖课题. 近年来, 分数阶微分方程越来越多地被用于描述系统识别、系统控制、信号处理、光学、热学、材料学、医疗工程学以及流变学等领域中的问题, 尤其是从实际问题中抽象出来的分数阶微分方程, 倍受众多研究者的广泛关注 [23–31]. 分数阶微分方程理论发展的同时, 分数阶差分方程理论也随之发展起来. 随着分数阶差分方程理论研究的深入,

其重要性已引起了人们更为广泛的关注 [32,33]. 随着分数阶微分方程和分数阶差分方程在越来越多的应用科学中的应用, 分数阶微分方程和分数阶差分方程解的研究显得尤为必要. 但是, 如前所示, 很多动力学过程的变量是连续和离散的混合过程, 研究时标上的分数阶微分方程解的性态更为有用. 而问题是: 分数阶微积分的形式有很多, 如黎曼–刘维尔分数阶微积分、卡普托分数阶微积分、格伦沃尔德–列特尼科夫分数阶微积分、哈达姆分数阶微积分、黎斯分数阶微积分、韦尔分数阶微积分和甘加尔分数阶微积分等, 在实际应用中各有优势, 但不能相互统一 [34]. 这就涉及定义哪一种时标上的分数阶微积分的问题. 在文献 [35] 中, 作者引入了 $\mathbb{R}$ 上的共形分数阶微积分并给出其相关应用举例. 为了统一和推广 Hilger 微积分与文献 [35] 中提出的 $\mathbb{R}$ 上的共形分数阶微积分, 文献 [34] 给出了时标 $\mathbb{T}$ 上的共形分数阶微积分及其若干性质. 这就使得研究时标上的共性分数阶微分方程解的存在性成为必要的和可能的.

1.3 建立时标上的共形分数阶 Sobolev 空间的必要性

研究 $\mathbb{R}$ 上的分数阶微分方程边值问题解的存在性和多解性的方法有很多, 如上下解方法、单调迭代方法 [36]、不动点理论 [37]、Leray-Schauder 度理论 [38]、临界点理论 [39] 等. 遗憾的是, 据我们所知, 到至今为止, 还没有研究者应用变分方法中的临界点理论研究时标上的在任何意义下的分数阶微分方程边值问题解的存在性和多解性, 时标上的共形分数阶微分方程边值问题也不例外. 一个重要原因在于没有一个已有的工作空间可用于构造时标上的共形分数阶微分方程边值问题所对应的变分泛函. 而 Sobolev 空间是应用变分方法研究常微分方程、偏微分方程, 乃至差

分方程可解性的重要而基本的工具, 可参见文献 [40]— [43]. $\mathbb{R}$ 上的闭区间 $[0,T]$ 上的 Sobolev 空间见文献 [41]. 为了研究时标上的整数阶微分方程边值问题的可解性, 文献 [42] 给出了时标上的整数阶 Sobolev 空间, 研究了其相关性质，并给出其在利用变分方法研究时标上的整数阶微分方程边值问题的一些应用. 在文献 [43] 中, 作者定义了 $\mathbb{R}$ 上的卡普托分数阶 Sobolev 空间, 研究了其若干性质, 并将其作为工作空间应用临界点理论研究了卡普托分数阶微分方程边值问题的可解性. 受上述研究成果的启发, 我们试图居于文献 [34] 给出的时标 $\mathbb{T}$ 上的共形分数阶微积分及其性质, 建立时标 $\mathbb{T}$ 上的共形分数阶 Sobolev 空间. 搭建时标上的共形分数阶微分方程边值问题变分方法的研究框架, 为应用变分方法中的临界点理论研究时标上的共形分数阶微分方程边值问题奠定理论基础, 提出了一套研究时标上的共形分数阶微分方程边值问题的行之有效的新方法.

1.4 本书的主要工作

本书首先完善文献 [34] 中给出的时标 $\mathbb{T}$ 上的共形分数阶微积分的性质, 然后建立时标 $\mathbb{T}$ 的闭区间上的共形分数阶 Sobolev 空间, 研究其完备性、自反性、一致凸性、嵌入定理以及其上一类泛函的连续可微性等重要性质. 作为其在变分理论中的应用, 我们将其作为构造变分泛函的工作空间, 应用变分方法中的临界点定理研究时标上的共形分数阶 p-Laplacian 微分方程边值问题、时标上的共形分数阶 Hamiltonian 系统、时标上的脉冲共形分数阶 Hamiltonian 系统、时标上具受迫项的共形分数阶 Hamiltonian 系统及时标上的共形分数阶脉冲阻尼振动问题的可解

性, 给出其解存在的判定条件, 统一和推广连续整数阶 Hamiltonian 系统与离散整数阶 Hamiltonian 系统以及连续共形分数阶 Hamiltonian 系统与离散共形分数阶 Hamiltonian 的研究, 为研究时标上的共形分数阶微分方程的数值解提供理论依据, 提出研究时标上的共形分数阶微分方程边值问题的新思路.

第 2 章　时标上的共形分数阶 Sobolev 空间及其相关性质

2.1　引　　言

本章中，首先介绍时标上的函数的共形分数阶微积分的相关概念和性质. 其次给出时标上的向量值函数的共形分数阶导数、积分等相关定义，并且推导出其诸如分部积分法等相关性质. 在给出时标上的向量值函数的共形分数阶微积分和相关性质的基础上, 引入时标上的共形分数阶 Sobolev 空间, 证明该空间在所给范数下的完备性、一致凸性、嵌入定理以及定义在其上的一类泛函的连续可微性等. 本章及后文中, 我们假定 $a, b \in \mathbb{T}, 0 < a < b$, 并使用如下记号: $\mathbb{T}^+ = \mathbb{T} \cap [0, +\infty)$; 当 $D \subseteq \mathbb{R}$ 时, 我们记 $D_{\mathbb{T}} = D \cap \mathbb{T}$; 假设 $t \in \mathbb{T}$ 并且 $\delta > 0$, 记 t 在时标 $\mathbb{T}$ 上的 δ-邻域为

$$\mathcal{V}_t(\delta) = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}.$$

2.2　时标上的整数阶微积分的相关概念

本节里, 我们给出后面需要用到的时标上的整数阶微积分 (Hilger-微积分) 的相关概念.

定义 2.1 ([3, 定义 1.1])　若 $t \in \mathbb{T}$, 那么, 前跳跃算子 $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 定

义如下:

$$\sigma(t) = \inf\big\{s \in \mathbb{T}, s > t\big\}, \quad \forall t \in \mathbb{T},$$

后跳跃算子 $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 定义如下:

$$\rho(t) = \sup\big\{s \in \mathbb{T}, s < t\big\}, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

(补充定义 $\inf\varnothing = \sup\mathbb{T}$, $\sup\varnothing = \inf\mathbb{T}$, 其中 $\varnothing$ 表示空集). 点 $t \in \mathbb{T}$, 若 $\sigma(t) > t$, 则称点 t 是右离散的; 若 $\rho(t) < t$, 则称点 t 是左离散的. 既右离散又左离散的点称为孤立点. 若 $t < \sup\mathbb{T}$ 且 $\sigma(t) = t$, 则称点 t 是右稠密的; 若 $t > \inf\mathbb{T}$ 且 $\rho(t) = t$, 则称点 t 是左稠密的. 既右稠密又左稠密的点称为稠密点. $\mathbb{T}^\kappa$ 定义如下: 当 $\mathbb{T}$ 有左离散最大值点 m 时, $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{m\}$, 当 $\mathbb{T}$ 没有左离散最大值点时, $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$. 函数 $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ 定义为

$$\mu(t) = \sigma(t) - t,$$

称为精细度函数.

定义 2.2([3, 定义 1.10]) 设函数 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, 并且 $t \in \mathbb{T}^\kappa$. 定义 f 在 t 处的 $\varDelta$-导数如下: 若 $\forall\epsilon > 0$, 存在 t 的 δ-邻域 $\mathcal{V}_t(\delta)$ 使得当 $s \in \mathcal{V}_t(\delta)$ 时,

$$\big|\big[f(\sigma(t)) - f(s)\big] - f^{\varDelta}(t)\big[\sigma(t) - s\big]\big| \leqslant \epsilon\big|\sigma(t) - s\big|,$$

则称 $f^{\varDelta}(t)$ 为函数 f 在点 t 处的 $\varDelta$-导数. 函数 f 在 $\mathbb{T}^\kappa$ 上是 $\varDelta$-可导的, 如果对所有的 $t \in \mathbb{T}^\kappa$, $f^{\varDelta}(t)$ 都存在. 函数 $f^{\varDelta} : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ 称为函数 f 在 $\mathbb{T}^\kappa$ 上的 $\varDelta$-导函数.

定义 2.3([42, 定义 2.3])　若函数 f 是 $\mathbb{T}$ 上的 N 维向量值函数, 即 $f^i:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,\cdots,N)$, $f(t)=\big(f^1(t),f^2(t),\cdots,f^N(t)\big)$ 且 $t\in\mathbb{T}^\kappa$, 定义 $f^\Delta(t)=\big(f^{1^\Delta}(t),f^{2^\Delta}(t),\cdots,f^{N^\Delta}(t)\big)$. 此时, 称 $f^\Delta(t)$ 为函数 f 在点 t 处的 Δ-导数. 函数 f 在 $\mathbb{T}^\kappa$ 上是 Δ-可导的, 如果对所有的 $t\in\mathbb{T}^\kappa$, $f^\Delta(t)$ 都存在. 函数 $f^\Delta:\mathbb{T}^\kappa\to\mathbb{R}^N$ 称为函数 f 在 $\mathbb{T}^\kappa$ 上的 Δ-导函数.

定义 2.4([3, 定义 2.7])　对函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, 如果函数 f^Δ 在 $\mathbb{T}^{\kappa^2}=(\mathbb{T}^\kappa)^\kappa$ 上是 Δ-可导的且 $f^{\Delta^2}=(f^\Delta)^\Delta:\mathbb{T}^{\kappa^2}\to\mathbb{R}$, 则称 f 在 $\mathbb{T}^{\kappa^2}$ 上二阶 Δ-可导.

定义 2.5([42, 定义 2.5])　对函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^N$, 如果函数 f^Δ 在 $\mathbb{T}^{\kappa^2}=(\mathbb{T}^\kappa)^\kappa$ 上是 Δ-可导的且 $f^{\Delta^2}=(f^\Delta)^\Delta:\mathbb{T}^{\kappa^2}\to\mathbb{R}^N$, 则称 f 在 $\mathbb{T}^{\kappa^2}$ 上二阶 Δ-可导. 函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^N$ 的三阶及三阶以上的 Δ-导数类似定义.

定义 2.6([42, 定义 2.6])　若函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^N$ 在 $\mathbb{T}$ 中的右稠密点处连续, 且在 $\mathbb{T}$ 中左稠密点处的左极限存在, 则称该函数为 rd-连续 (右稠密连续) 函数.

2.3　时标上的共形分数阶微积分的概念及其相关性质

我们先引入文献 [34] 中给出的时标上的函数的 α 阶共形分数阶导数, 其中 $\alpha\in(0,1]$.

定义 2.7([34, 定义 1])　假设 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{T}^\kappa$ 且 $\alpha\in(0,1]$. 对 $t>0$, 定义 $T_\alpha(f)(t)$ (如果其存在) 为具有如下性质的实数: $\forall\epsilon>0$, 存在 t 在时标 $\mathbb{T}$ 上的某个 δ-领域 $\mathcal{V}_t(\delta)\subset\mathbb{T}$ 使得

$$\big|\big[f(\sigma(t))-f(s)\big]t^{1-\alpha}-T_\alpha(f)(t)\big[\sigma(t)-s\big]\big|\leqslant\epsilon\big|\sigma(t)-s\big|$$

对一切 $s \in \mathcal{V}_t(\delta)$ 成立. 如果上述实数 $T_\alpha(f)(t)$ 存在，我们称其为函数 f 在变量 t 处的 α 阶共形分数阶导数, 也称函数 f 在变量 t 处是 α 阶共形可导的. 当 $0 \in \mathbb{T}$ 时，定义函数 f 在变量 $t=0$ 处的 α 阶共形分数阶导数 $T_\alpha(f)(0)$ 如下:

$$T_\alpha(f)(0) = \lim_{t \to 0^+} T_\alpha(f)(t).$$

定义 2.8([34, 定义 23]) 若 $\alpha \in (n, n+1], n \in \mathbb{N}$, 且 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 在变量 $t \in \mathbb{T}^{\kappa^n}$ 处是 n 阶 Δ-可导的，定义函数 f 在变量 t 处的 α 阶共形分数阶导数如下:

$$T_\alpha(f)(t) := T_{\alpha-n}(f^{\Delta^n})(t).$$

定义 2.9([34, 定义 26]) 设 $f : \mathbb{T}^+ \to \mathbb{R}$ 为正则函数, 则函数 f 的 $\alpha(\alpha \in (0,1])$ 阶共形分数阶不定积分定义为

$$\int f(t)\Delta^\alpha t := \int f(t)t^{\alpha-1}\Delta t.$$

定义 2.10([34, 定义 28]) 如果函数 $f : \mathbb{T}^+ \to \mathbb{R}$ 是正则函数，其 $\alpha(\alpha \in (0,1])$ 阶共形分数阶不定积分记为

$$F_\alpha(t) = \int f(t)\Delta^\alpha t.$$

那么, 对所有的 $a, b \in \mathbb{T}^+$, 将函数 f 的柯西 $\alpha(\alpha \in (0,1])$ 阶共形分数阶定积分定义为

$$\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = F_\alpha(b) - F_\alpha(a).$$

关于时标上的 Δ-测度 μ_Δ、Δ-可测集、Δ-可测函数和 Δ-积分的相关定义和性质可参见文献 [44].

定义 2.11([45, 定义 2.3])　假设 $B \subset \mathbb{T}$. 如果 $\mu_\Delta(B) = 0$，则称 B 是 Δ-零测度集. 如果存在 Δ-零测度集 $E_0 \subset B$ 使得性质 P 在 $B \backslash E_0$ 上成立，则称性质 P 在 B 上 Δ-几乎处处 (Δ-a.e.) 成立.

定义 2.12　设集合 A 是时标 $\mathbb{T}^+$ 上的 Δ-可测集. 函数 $f : \mathbb{T}^+ \to \mathbb{R}$ 在集合 A 上 α 阶共形可积当且仅当函数 $t^{\alpha-1}f$ 在集合 A 上 Δ-可积，且

$$\int_A f(t)\, \Delta^\alpha t = \int_A f(t)t^{\alpha-1}\, \Delta t.$$

注 2.1　由文献 [46, 附注 (ii)] 和定义 2.12 知, 关于时标上的共形分数阶积分, 各种诸如积分控制收敛定理、Fatou 引理等积分收敛定理都成立.

注 2.2　后面内容中涉及的时标上的共形分数阶积分都是定义 2.12 中定义的时标上的共形分数阶积分.

函数 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 的共形分数阶微积分具有如下重要性质. 陈述这些性质之前，为了叙述方便，我们记

$$C_{\rm rd}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) = \left\{ f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R} : f \text{ 在 } [a,b]_{\mathbb{T}} \text{ 上 rd-连续} \right\},$$

$$C_0([a,b)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) = \left\{ f : [a,b)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R} : f \text{ 在 } [a,b)_{\mathbb{T}} \text{ 上连续且具有紧支集} \right\},$$

$$C_{\rm rd}^\alpha([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) = \Big\{ f \text{ 在 } [a,b]_{\mathbb{T}} \text{ 上 } \alpha \text{ 阶共形分数阶可导且 } T_\alpha(f) \in C_{\rm rd}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) \Big\},$$

$$C_{0,\rm rd}^\alpha([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) = \left\{ f \in C_{\rm rd}^\alpha([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) : f(a) = f(b) = 0 \right\},$$

$$C_{a,b;\rm rd}^\alpha([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) = \left\{ f \in C_{\rm rd}^\alpha([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) : f(a) = f(b) \right\}.$$