普通高等学校“十三五”数字化建设规划教材

GAODENG SHUXUE
JIANMING JIAOCHENG

高等数学简明教程

徐应祥　郭游瑞 / 主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等学校"十三五"数字化建设规划教材

高等数学简明教程

徐应祥　郭游瑞　主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程/徐应祥，郭游瑞主编.—北京：北京大学出版社，2018.8
ISBN 978-7-301-29801-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①徐… ②郭… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 192424 号

书　　名　高等数学简明教程
GAODENG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG
著作责任者　徐应祥　郭游瑞　主编
责 任 编 辑　曾琬婷
标 准 书 号　ISBN 978-7-301-29801-5
出 版 发 行　北京大学出版社
地　　址　北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址　http://www.pup.cn
电 子 信 箱　zpup@pup.cn
新 浪 微 博　@北京大学出版社
电　　话　邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62754819
印 刷 者　长氵
经 销 者　新华
787　25 印张　529 千字
201　1 次印刷
定　　价　56.

内容提要

本书主要由微积分及线性代数两大部分内容组成，分绪论和正文 9 章进行编写. 正文内容包括：再认识集合与函数、函数极限与连续性、导数与微分、导数的应用、定积分及其应用、多元函数微积分学简介、无穷级数、常微分方程简介、线性代数简介. 书末附有 MATLAB 数学实验基础.

本书按 128 学时完成绝大多数的内容教学而设计，适合应用型本科院校经济管理类及相关专业的学生使用，也可作为相关教师的教学参考书.

前　言

为了适应我国教育教学改革，满足应用型本科院校经济管理类各专业的教学要求，提高学生的实际工作能力与综合素质，更好地培养经济管理类各专业应用型人才，我们组织编写了本书. 本书的编写原则是：教学内容的广度、深度参照教育部“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”；基础理论以够用为度，注重实际应用；切合应用型本科院校学生及学时的实际情况.

本书具有如下特点：

1. 基于作者多年的教学经验总结和对学生实际学习状况的了解，在内容选取上，突出基本概念、基本方法，强调基本能力的培养；在编排上，以实例作为重要概念的切入点，遵循数学知识的认知规律，由浅入深、深入浅出.

2. 将教学内容分为基础部分和提高部分进行编写. 对基础部分，简化一些复杂概念与理论证明，改为几何直观说明，以帮助学生理解、记忆和应用；对提高部分，给出了一些复杂概念的详细说明及一些定理的详细证明，满足学有余力的学生或准备考研的学生进一步学习. 这样在使用本书时，可以根据学生的学习水平和不同专业的需求，灵活地选择教学内容，实现分层教学.

3. 加强数学应用方面的内容. 在各章节中精选了较多实际应用问题的例子和习题，让学生了解数学在各个领域中的应用，并培养学生的数学建模能力.

4. 在附录中简单介绍了 MATLAB 数学软件在高等数学中的基础应用，以帮助学生学会如何使用数学软件，并进一步提高学生利用数学软件解决实际问题的能力.

本书的“前身”是作者为本校学生讲授“高等数学”课程的讲义. 该讲义已连续三年在教学中实践过，并取得了良好的教学效果. 本书编写过程融入了作者自身多年的教学经验和教学研究成果，同时也参考了国内外一些优秀的“高等数学”教材，尤其是经济管理类“高等数学”教材. 本书由徐应祥、郭游瑞、赵志琴、任阿娟、王茂玲、陈苍、贾秀娟、周国军、何穗智、覃树仁老师联合编写. 袁晓辉审核了教学资源内容，胡锐、邓之豪组织并参与了教学资源的信息化实现，苏文春、陈平提供了版式和装帧设计方案. 在编写过程中，得到了中山大学新华学院校长王庭槐教授与其他各领导的大力支持与帮助. 另外，实践班上的同学们帮忙搜集了部分资料. 在此一并表示由衷的感谢.

由于编者水平所限，书中错误或疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

编者

2018 年 5 月

目　录

绪 论

1. 为什么学数学?

数学没什么用! 我们知道这是许多学习过数学的人给出的结论. 他们会说,他们上街买菜,用不着三角公式和图像;他们在厨房做饭不需要计算曲面面积;他们上班工作不用积分求导……数学除了应付考试还有什么用处?

对于人类自己创造出的人类文化中少数的几个精华之一的数学,许多人竟然是反感的,是不屑的. 这可能是我们的教育出了问题,但数学的作用却不是以我们的无知而否认得了的. 我国的数学教育有重视基础知识、基本技能的传统,而在很长一段时间内对于数学与实际、数学与其他学科的联系未能给予充分的重视. 这种教育本身的导向,使学生产生"学数学有什么作用"的困惑不足为奇. 实际上,学习数学更重要的目的是接受数学思想、数学精神的熏陶,提高自身的思维品质和科学素养,在日常生活和工作中数学地、理性地思考和解决问题. 如果真能如此,学习者将终生受益.

美国数学家克莱因(Klein)也曾说过:"一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关,这在今天我们这个时代尤为重要."不仅如此,他还有这样的论断:数学不仅是一种方法、一种语言、一种艺术,更重要的是一个有着丰富内容的知识体系,其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用,同时影响着政治家的学说. 数学已经广泛地影响着人类的生活和思想.

伟大导师马克思(Marx)也说:"一种科学只有在成功运用数学时,才算达到了真正完善的地步."正因为数学是日常生活和进一步学习必不可少的基础和工具,一切科学到了最后都归结为数学问题. 在我们的周围有很多事情都是可以用数学来解决的,只是很多人都没有用数学的眼光来看待而已.

数学是研究空间形式和数量关系的科学,是刻画自然规律和社会规律的科学语言和有效工具. 数学科学是自然科学、技术科学等的基础,并在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越大的作用. 数学的应用越来越广泛,正在不断地渗透到社会生活的方方面面,它与计算机技术的结合在许多方面直接给社会创造价值,推动着社会生产力的发展. 数学教育作为中学教育的重要组成部分,它使学生掌握数学的基础知识、基本技能、基本思想,使学生表达清晰、思考有条理,使学生学会用数学的思想方法解决问题、认识世界. 中学数学对于认识数学与自然界、数学与人类社会的关系,认识数学的科学价值、文化价值,提高分析问题和解决问题的能力,形成理性思维,发展智力和创新意识具有基础性作用. 中学数学是学习物理、化学、生物、计算机技术等课程和进一步学习的基础. 随着时代的进步,数学的思想方法和内容已经渗透到人类生活的各个方面,国家的发展、科学技术的进步更离不开数

学. 因此,具备一些必要的数学知识和一定的数学思想方法,是现代人才基本素质的非常重要的组成部分. 当然,我们学习的数学只是数学学科体系中很基础、很少的一部分. 现在从数学课本上学的知识未必能直接应用于生活,主要是为学习后续专业基础课程打好基础,同时也为了掌握一些数学的思想方法以及分析问题、解决问题的思维方式. 哲学家培根(Bacon)说过:“读诗使人灵秀,读历史使人明智,学逻辑使人周密,学哲学使人善辩,学数学使人聪明……”也有人形象地称数学是思维的体操. 下面我们通过具体的例子来体验一下某些数学思想方法和思维方式.

看看下面的几个实例,你对为什么学数学就会有所感悟.

实例 1 大家知道海王星是怎么发现的,冥王星又是怎么被请出九大行星行列的吗?

海王星是在数学计算过程中发现的,天文望远镜的观测只是验证了人们的推论.

1812 年,法国人布瓦德在计算天王星的运动轨道时,发现理论计算值与观测资料之间出现了一系列误差. 这使许多天文学家纷纷致力于这个问题的研究,进而发现天王星的脱轨与一个未知引力的存在相关. 也就是说,有一个未知的天体引力作用于天王星. 1846 年 9 月 23 日,柏林天文台收到来自法国巴黎的一封快信. 寄信人就是奥本 · 勒威耶. 在信中,勒威耶预告了一颗以往没有发现的新星:在摩羯座 8 星东约 5 度的地方,有一颗 8 等星,每天运行 69 角秒. 当夜,柏林天文台的加勒把巨大的天文望远镜对准摩羯座,果真在那里发现了一颗新的 8 等星. 又过了一天,再次找到了这颗 8 等星,它的位置比前一天后退了 70 角秒. 这与勒威耶预告的相差甚微. 全世界都震动了. 人们依照勒威耶的建议,按天文学惯例,用神话里的名字把这颗星命名为“海王星”.

1930 年,美国天文学家汤博发现冥王星,当时错估了冥王星的质量,以为冥王星比地球还大,所以命名为大行星. 然而,经过近三十年的进一步观测和计算,发现它的直径只有 2 300 km,比月球还要小. 等到冥王星的大小被确认时,“冥王星是大行星”早已被写入教科书,以后也就将错就错了. 经过多年的争论,国际天文学联合会通过投票表决做出最终决定,取消冥王星的行星资格. 2006 年 8 月 24 日,国际天文学联合会宣布,冥王星将被排除在行星行列之外,从而太阳系行星的数量将由 9 颗减为 8 颗. 事实上,位居太阳系九大行星末席七十多年的冥王星,自发现之日起其地位就备受争议.

实例 2 抓阄对个人来说公平吗? 5 张票中有 1 张奖票,那么先抽或后抽对个人来说公平吗?(学习了概率后你就会知道这是公平的,抓中有标记的阄和抽中奖票的可能性与先后次序无关.)

实例 3 相传在印度舍罕王时代,舍罕王发出一道命令:谁能发明一件既让人娱乐,又在娱乐中使人增长知识,使人头脑变得更加聪明的东西,本王就让他终身为官,并且皇宫中的贵重物品任其挑选.

这下子,印度国内热闹起来了,全国上下的能工巧匠们挖空心思,发明创造了一件又一件东西. 它们被络绎不绝地送到舍罕王的面前,但是没有一件能够让国王满意.

一天,风和日丽,舍罕王闲着无聊,就准备和大臣们到格拉察湖去钓鱼. 舍罕王忽然发现人群中少了一个人,那是宰相达依尔. 他就问:“宰相干什么去了?”有人回答说:“宰相大人因为宫中有一件事没处理好,正在那里琢磨呢.”于是,舍罕王没有追问下去,和大臣们来到了湖边. 春日暖暖,垂柳依依. 一阵微风吹来,湖面泛起阵阵涟漪,在阳光的照射下,闪烁出钻石

般的光芒.不时有鱼儿跃出水面,银光闪闪.面对此般美景,舍罕王心旷神怡,龙心大悦.这时,有人来报:宰相达依尔飞马来到.心情极佳的舍罕王忙传宰相觐见.达依尔匆匆下马,来到舍罕王的面前,禀道:"陛下,为臣在家中琢磨了许多天,终于发明了象棋.不知陛下满意否?"舍罕王一听此言,连忙说道:"什么象棋,赶快拿来看看."

宰相达依尔有着超人的智慧,尤其喜爱发明创造以及严密的数学推理.他发明的象棋是国际象棋,整个棋盘是由 64 个小方格组成的正方形.国际象棋共有 32 枚棋子,每方各 16 枚,它包括王一枚、王后一枚、仕两枚、马两枚、车两枚、卒八枚.双方的棋子在格内移动,以消灭对方的王为胜.听了宰相的介绍后,国王高兴极了,连忙招呼其他大臣与他对弈.一时间,马腾蹄、卒拱动、车急驰,不一会儿,舍罕王大胜.心情极佳的舍罕王于是打算重赏自己的宰相:赏官吧,除自己外,宰相已是最高级别,不能再赏了,再赏只有自己让位了,只好赏财物.他向宰相说:"爱卿,官是不能赏了,你想要些什么宝贝呢?"宰相"扑通"跪在国王面前说:"陛下,为臣别无他求,只请在这张棋盘的第一格放 1 粒麦子,在第二格放 2 粒麦子,第三格放 4 粒麦子,第四格放 8 粒麦子.总之,每一格的麦粒都比前一格的麦粒多 1 倍.陛下,把这样摆满棋盘上 64 格的所有麦粒都赏给为臣,为臣就心满意足了."

国王金言一出,正有些后悔,要是宰相开口要自己也喜欢的宝贝就糟了.没想到宰相的胃口并不大,于是舍罕王忙不迭地应允了:"爱卿,你所求并不多啊,你当然会如愿以偿的."国王心里为自己对这样一件奇妙的发明所许下的慷慨赏诺不致破费太多而暗喜,便令人把一袋麦子拿到宝座前,于是计数麦粒的工作开始了.第一格放 1 粒,第二格放 2 粒……还不到第 20 格,袋子已经空了.接着一袋又一袋的麦子被搬了进来,又空着袋出去.很快,王城里的全部小麦都摆完了,棋盘还没摆满.舍罕王吃惊地睁大了眼睛,他明白自己是无论如何都不能兑现自己的承诺了.

这到底是怎么回事?让我们来算一算这位宰相要多少麦粒.实际上,这是一个等比数列的和:

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}=184\ 467\ 440\ 737\ 095\ 516\ 15(\text{粒}).$$

这个数字不像宇宙间的原子总数那样大,但也够可观的了.1 蒲式耳(约 35.2 升)小麦约有 500 万粒,按照这个数计算,那就得给宰相约 4 万亿蒲式耳才行.这位宰相所要求的,竟是 2000 年全世界所生产的全部小麦!

2. 数学及其在经济管理中的应用

数学是研究现实世界中的数量、结构、变化及空间的科学.随着社会生产力的发展,正如我国著名数学家华罗庚所说:"宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学."数学已经越来越深入、广泛地渗透到科学技术、经济管理、社会生产生活等现实世界的各个领域.在现代经济领域中,数学工具的成功运用,促使现代经济理论从过去单纯对经济现象进行定性分析,逐渐朝着精密、严谨的定量分析发展,从而使经济管理中的定性分析与定量分析相统一,进一步推动经济管理学科走向完善和成熟.

数学理论具有严谨性,数学的逻辑推理是严密的,因此用数学方法对经济管理问题进行分析,所得出的结果则必然是严谨、周密的,而且是可靠的和值得信赖的.现代经济管理中用到了很多数学知识,如研究经济量的变化率时要用到微积分知识,研究与随机因素有关的经

济量或经济现象时要用到概率论与数理统计知识，研究运输和下料等经济管理问题时要用到线性代数和运筹学知识，等等. 运用数学研究经济管理问题的目的是力求保证数据分析及预测的精准性、思维逻辑的严密性与结果的可靠性，而研究内容则主要是社会资源的配置及社会经济关系如何进行合理调节与组织. 例如，通过对过去财务状况及当前形势和相应数据的研究，预测未来形势；通过对财政与税收相关数据的研究，帮助政府及管理部门制定相应的财政政策；通过对所带领团队人员素质的分析，合理分配各个人员的工作，有效进行人力资源管理，发挥最大的团队效率.

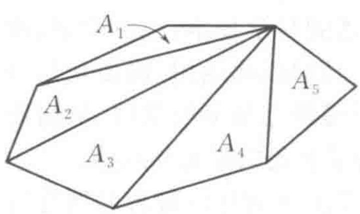
利用数学工具解决经济管理中的实际问题时，需要把实际问题描述为数学问题. 而要将实际问题描述成数学问题，首先要做的是抓住所分析问题的主要矛盾，舍弃次要矛盾，对实际问题做出必要的简化和合理的假设. 然后，选择适当的数学工具，根据内在的经济管理规律，搞清实际问题中有关变量之间有什么样的函数关系、相关数据的特征及不同数据间是否具有相关性等，将实际问题描述成一个数学问题. 这个数学问题就称为原实际问题的数学模型，而整个分析、研究，得到数学模型的过程称为数学建模.

在现代经济管理中，运用数学建模的方法，得到了许多用来分析和预测经济数据与形势的数学模型，例如供需与价格关系模型、边际收益模型、价格弹性模型、经济增长的索罗模型、生产函数模型、均衡价格的差分方程模型、利益分配的合作博弈模型、乘数加速数模型、投入产出模型、经济增长与最优财政支出规模模型、税收收入 AR(Auto Regressive) 预测模型、消费税税率优化设计模型、斯坦克伯格双寡头垄断动态博弈模型等. 这些经济管理模型的成功运用，大大推动了经济管理学科走向完善和成熟的步伐. 随着社会的进步，更多新的经济管理问题不断涌现. 可以设想，数学对这些新问题的解决必将发挥更大的作用.

3. 微积分与线性代数

微积分是将来进一步学习其他数学知识的基础之一，也是解决实际问题强有力的工具. 微积分的思想起源至少可以追溯到 2 500 年前的古希腊，但使之成为一门正规的科学理论和方法，要归功于牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz). 自 17 世纪牛顿和莱布尼茨"发明"微积分以来，经过众多学者的努力，其理论已趋完善；其方法在解决实际问题中取得了巨大的成功，涉及物理学、化学、生物学、医学、经济、金融、机械加工、物流、天气预报等许多学科或领域.

例 1(面积问题)　大约 2 500 年前，古希腊人曾用"穷竭法(method of exhaustion)"来解决任意多边形的面积 A 的计算问题. 他们知道如何将一个多边形分成若干个三角形，然后通过求这些三角形的面积之和来得到多边形的面积(见图 0 - 1).



$A=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5$

图 0 - 1

但是，求由曲线围成的平面图形的面积就变得较为困难，例如求圆的面积、椭圆的面积等. 在求圆的面积时，古希腊人仍用了穷竭法：先作圆的内接正多边形，当圆内接正多形的边数越来越大时，其面积与圆的面积越来越接近，也就是圆的面积与其内接正多边形的面积之间的差别越来越小.

穷竭法与我国古代数学家刘徽(三国后期魏国人)的"割圆术"方法不谋而合. 刘徽由圆的内接正六边形开始，然后依

次将边数加倍得到一系列圆内接正多边形，称之为割圆，并指出“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣”. 设想圆内接正多形的边数无限大时，其面积应当与圆的面积正好相等.

用图 0－2 可以对穷竭法计算圆面积的基本思想进行说明.

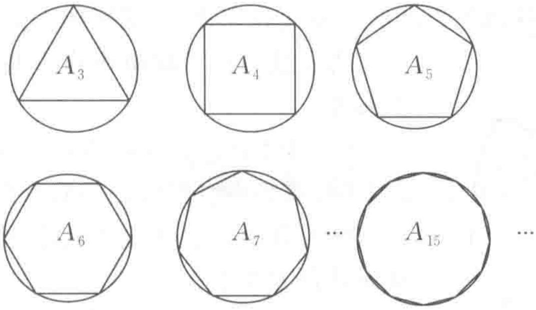


图 0－2

在图 0－2 中，用 A_n 表示边数为 n 的圆内接正多边形的面积. 当 n 越来越大时，A_n 就越来越接近圆的面积 A. 称圆面积 A 为圆内接正多边形面积 A_n 的极限，表示为 $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$. 如果将所有正多边形的面积 $A_n(n=3,4,\cdots)$组成的数列记为$\{A_n\}$，则 A 也称为这个数列的极限.

例 2（**齐诺悖论**）　公元前 5 世纪，古希腊哲学家齐诺（Zeno）提出了四个挑战性问题，称之为齐诺悖论，其中第二个问题称为齐诺第二悖论，是关于古希腊长跑英雄阿基里斯（Achilles）和乌龟的问题.

假定阿基里斯开始时在位置 a_1，乌龟在位置 t_1，如图 0－3 所示. 当阿基里斯向前到达位置 $a_2=t_1$时，乌龟向前爬到了位置 t_2. 当阿基里斯向前到达位置 $a_3=t_2$时，乌龟又向前爬到了 t_3位置……这个过程无限地进行下去，乌龟永远在阿基里斯的前方，阿基里斯永远追不上乌龟. 这显然与实际不符.

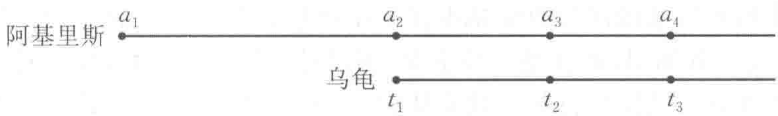


图 0－3

阿基里斯的一系列位置组成了一个数列$\{a_n\}$：$a_1,a_2,a_3,\cdots$；乌龟的位置也组成了一个数列$\{t_n\}$：$t_1,t_2,t_3,\cdots$，其中 $a_n<t_n(n=1,2,\cdots)$. 可以发现（以后知道可以严格证明），这两个数列有共同的极限 p，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=p=\lim\limits_{n\to\infty}t_n$. 精确地说，在位置 p 处，阿基里斯追上了乌龟，此后就超过了乌龟.

以上两个例子可以简单地总结为：观察某个量在某个变化过程中，是否能够无限地接近于一个固定的值. 由此，我们可以一窥极限思想方法的深邃.

除此外，在光线反射问题中要考虑曲线在一点处的切线问题；在物理学中要考虑运动物体的瞬时速度问题；在几何学中要考虑一般平面图形的面积问题；在经济学中要考虑一个经济活动发生以后，经济指标的变化快慢问题；在工程中要考虑物体的变形大小问题；在生物

学中要考虑生物种群的竞争与依存问题；在医学中要考虑药物的疗效持续问题；在化学中要考虑化学反应的速度问题、反应物剩余问题和反应过程中的能量释放问题；等等. 以上诸多问题都与连续变化的量的变化率有关，而对这些问题的解决都会用到这样的方法：为计算某些较复杂的量，将这些复杂的量转化为一些容易计算的量的极限，通过计算该极限得到较复杂的量. 这种以极限作为基础的方法经过发展和完善后，就形成了微积分方法.

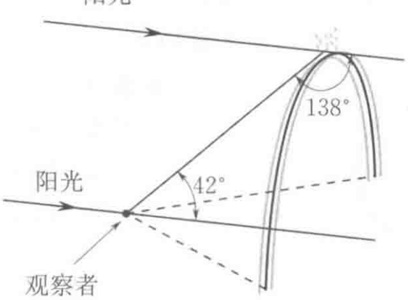


图 0 - 4

为了进一步了解微积分的重要性，再列举一些问题以供参考：

(1) 如图 0 - 4 所示，如何解释如下的事实：雨后观赏彩虹时，观察者看彩虹的最高点的视角是 42°？

(2) 为什么超市货架上不同品牌饮料的易拉罐的形状设计都差不多？

(3) 在电影院中看电影时，最佳位置是哪里？

(4) 飞机离机场多远时就要开始降落？

(5) 床头柜上带罩台灯发出的光照在台灯背后的墙面上时，光影的轮廓是什么形状的曲线？

线性代数也是大学数学的另一基础课程，它的正式研究起源于 17 世纪. 线性代数的主要研究内容是线性方程组解的理论及空间结构的理论. 随着社会的发展，线性代数被广泛应用于计算机科学、工程技术、经济管理等领域. 例如，在经济管理中的企业成本、利润核算、投入产出模型等.

4. 结语

目前，国家大力提倡普通本科院校要培养更多的应用型人才，以满足当前对这类人才的需求. 在这样的新形势下，作为具有广泛用途并是解决问题的强有力工具的数学，应当成为以培养高级应用型人才为目标的经济管理类专业必须学习和掌握的学科之一. 正如教育部在经济管理类本科数学基础课程教学基本要求中所述："数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化，能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志."随着社会的发展，经济管理领域对数学的要求越来越高，经济管理类专业数学具有越来越强烈的应用背景. 在培养高素质经济管理领域的人才中，数学教育越来越显示出其独特的、不可替代的重要作用.