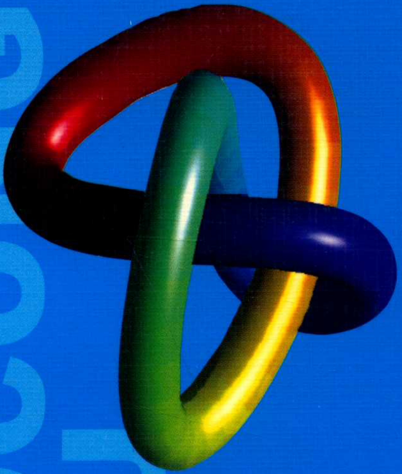
数学奥林匹克小丛书

高中卷 6

Shuxue Aolinpike
XIAOCONG
SHU



数学归纳法
的证题方法与技巧

冯志刚 著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 6

数学归纳法的证题方法与技巧

linpike Xiao Congshu

冯志刚 著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．数学归纳法的证题方法与技巧／冯志刚著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4171-5

Ⅰ.数…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019472号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

数学归纳法的证题方法与技巧

著　　者　冯志刚
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　王学锋
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏苏州市永新印刷包装有限责任公司
开　　本　787×960 16开
印　　张　8
字　　数　136千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4171-5/G·2396
定　　价　10.00元

出 版 人　朱杰人

目 录

1 第一数学归纳法

数学归纳法是证明关于正整数 n 的命题 $P(n)$ 成立与否时经常用到的方法. 它是下面的归纳公理的一个直接推论.

归纳公理 设 S 是正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的一个子集,满足条件:

(1) $1 \in S$;

(2) 如果 $n \in S$,则 $n+1 \in S$.

那么 $S = \mathbf{N}^*$.

归纳公理是由皮亚诺(G. Peano, 1858—1932)提出的关于正整数的五条公理中的第五公理,它是数学归纳法的基础.

第一数学归纳法是最常用的一种形式,它就是我们高中课本中所提及的数学归纳法.

第一数学归纳法 设 $P(n)$是关于正整数 n 的一个命题(或性质). 如果

(1) 当 $n=1$ 时, $P(n)$成立;

(2) 由 $P(n)$成立可以推出 $P(n+1)$ 成立.

那么,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n)$都成立.

证明 记 $S = \{n \mid n \in \mathbf{N}^*, 且 P(n)成立\}$,则 S 为 $\mathbf{N}^*$ 的子集. 由(1)知 $1 \in S$; 由(2)知如果 $n \in S$, 则 $n+1 \in S$. 这样由归纳公理可知 $S = \mathbf{N}^*$, 也就是说,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n)$都成立.

说明 事实上,第一数学归纳法与归纳公理是等价的,因此我们又称之为数学归纳法原理,并把第一数学归纳法简称为数学归纳法.

对中学生而言,要接受数学归纳法的含义和正确性并不难,但是要正确地用好数学归纳法却不是一件容易的事.

数学归纳法中的两步缺一不可. 验证 $P(1)$成立是奠基,利用归纳假设结合已知的有关数学知识证出 $P(n+1)$ 成立是递推的根据. 这两步对证明命题相辅相成,构成数学归纳法证明过程的逻辑结构. 尤为重要的是在证明过程中

必须用到归纳假设，这是检验是否用对了数学归纳法的一把尺.

例 1　证明：对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}. \qquad ①$$

证明　当 $n=1$ 时，① 式左边 $=\frac{1}{2}$，① 式右边 $=1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，故 $n=1$ 时，① 式成立.

现设①对 n 成立，考虑 $n+1$ 的情形，利用 $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$，知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=1-\frac{1}{n+2}.\end{aligned} \qquad ②$$

所以，①式对 $n+1$ 成立.

综上，由数学归纳法原理知①式对一切正整数 n 成立.

说明　这是一个错误的证明，其错误在于证明①对 $n+1$ 成立时，并没有用到归纳假设.

正确的过程如下：由归纳假设知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=1-\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

事实上，②式的得到是正确的，但这是对①式的一个直接证明，不应该套上数学归纳法这顶帽子. 这一点也是中学生经常犯的一些错误，应认真改正，否则难以形成一个正确的逻辑推导的思维结构.

例 2　证明：所有形如

$$10\,017,\ 100\,117,\ 1\,001\,117,\ \cdots \qquad ①$$

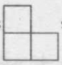
的正整数都是 53 的倍数.

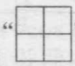
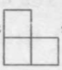
证明　我们用 a_n 表示数列①中的第 n 个数，则 $a_1 = 10\,017$，$a_{n+1} = 10a_n - 53$.

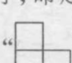
下证：对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $53 | a_n$.

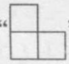
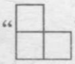
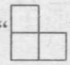
当 $n = 1$ 时，由 $10\,017 = 53 \times 189$，知 $53 | a_1$.

现设 $53 | a_n$，则 $53 | 10a_n$，故 $53 | (10a_n - 53)$，即 $53 | a_{n+1}$. 所以，由数学归纳法原理知对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $53 | a_n$. 命题获证.

例 3　设 $n \in \mathbf{N}^*$，证明：去掉 $2^n \times 2^n$ 的方格表的任何一个方格后，剩余的部分都可以用""形式的 L 型无重叠地完全覆盖.

证明　当 $n = 1$ 时，由于一个""字型去掉任何一个方格后都是一个""型，故命题对 $n = 1$ 成立.

现设 $n = k$ 时，命题成立，即去掉一个 $2^k \times 2^k$ 的方格表的任何一个方格后，剩余部都可用""型覆盖，我们考虑 $n = k + 1$ 的情形.

如图 1 所示，将 $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ 的方格表依中心所在的两条方格线将表格分割为 4 个 $2^k \times 2^k$ 的方格表，则题设中要求去掉的那个小方格必落在某个 $2^k \times 2^k$ 的方格表中. 在剩余的部分先绕中心摆一个""型，去掉图 1 中所示的 4 个阴影方格后，每个 $2^k \times 2^k$ 的子表格都去掉了一个方格，而由归纳假设，可知它们都可以用""型覆盖，再补上绕中心所摆的那个""型就得出命题对 $n = k + 1$ 成立.

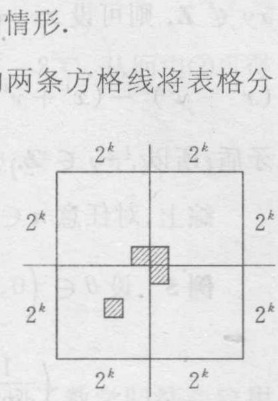


图 1

综上可知，命题对一切正整数 n 成立.

说明　例 2 与例 3 都是用数学归纳法证题时的常用表述方式. 当然了，表达方式可依个人的表达风格而定，但都需要在归纳假设和结论之间进行正确地过渡，它是完成数学归纳法证题时的关键步骤.

例 4　设 x、y 是实数，使得 $x + y$、$x^2 + y^2$、$x^3 + y^3$、$x^4 + y^4$ 都是整数.

证明:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，数 x^n+y^n 都为整数.

证明 此题要用到第一数学归纳法的一种变形:设 $P(n)$是关于正整数 n 的一个命题(或性质),如果

(1) 当 $n=1, 2$ 时，$P(n)$成立;

(2) 由 $P(n)$、$P(n+1)$ 成立可以推出 $P(n+2)$ 成立. 那么对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$P(n)$都成立.

事实上,这种变形只是调整了归纳过程中的跨度,更进一步的例子将在第 2 单元中出现.

回到原题,由条件 $x+y$ 与 x^2+y^2 都是整数,可知命题对 $n=1, 2$ 成立.

设命题对 n、$n+1$ 成立,即 x^n+y^n 与 $x^{n+1}+y^{n+1}$ 都是整数,考虑 $n+2$ 的情形,此时

$$x^{n+2}+y^{n+2}=(x+y)(x^{n+1}+y^{n+1})-xy(x^n+y^n).$$

因此,为证 $x^{n+2}+y^{n+2}\in\mathbf{Z}$, 结合归纳假设及条件中的 $x+y\in\mathbf{Z}$, 我们只需证明 $xy\in\mathbf{Z}$.

注意到，$x+y$、$x^2+y^2\in\mathbf{Z}$, 故 $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)\in\mathbf{Z}$, 若 $xy\notin\mathbf{Z}$, 则可设 $xy=\dfrac{m}{2}$, m 为奇数. 再由 x^2+y^2、$x^4+y^4\in\mathbf{Z}$, 知 $2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(x^4+y^4)\in\mathbf{Z}$, 即 $2\times\left(\dfrac{m}{2}\right)^2=\dfrac{m^2}{2}\in\mathbf{Z}$, 但 m 为奇数,这是一个矛盾. 所以，$xy\in\mathbf{Z}$. 进而命题对 $n+2$ 成立.

综上,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，数 $x^n+y^n\in\mathbf{Z}$.

例 5 设 $\theta\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, n 是大于 1 的正整数,证明:

$$\left(\frac{1}{\sin^n\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-1\right)\geqslant 2^n-2^{\frac{n}{2}+1}+1. \qquad ①$$

证明 当 $n=2$ 时，①式左右两边相等,故 $n=2$ 时命题成立.

假设命题对 $n(\geqslant 2)$成立,则

$$\left(\frac{1}{\sin^{n+1}\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta}-1\right)$$

$$=\frac{1}{\sin^{n+1}\theta\cos^{n+1}\theta}(1-\sin^{n+1}\theta)(1-\cos^{n+1}\theta)$$

$$= \frac{1}{\sin^{n+1}\theta\cos^{n+1}\theta}(1-\sin^{n+1}\theta-\cos^{n+1}\theta)+1$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin^n\theta\cos^n\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^n\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos^n\theta}\right)+1$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left[\left(\frac{1}{\sin^n\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-1\right)+\frac{1-\cos\theta}{\sin^n\theta}+\frac{1-\sin\theta}{\cos^n\theta}-1\right]+1$$

$$\geqslant \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left[(2^n-2^{\frac{n}{2}+1})+2\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}}\right]+1, \qquad ②$$

这里②由归纳假设和均值不等式得到.

注意到，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta\leqslant\frac{1}{2}$，而

$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}=\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)},$$

其中 $(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)=1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta=1+t+\frac{t^2-1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2$ $\left(\text{这里用到 } t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]\right)$. 所以，$\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}}\geqslant\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2}+1}=2^{\frac{n}{2}}-2^{\frac{n-1}{2}}$，从而由②可得

$$\left(\frac{1}{\sin^{n+1}\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta}-1\right)\geqslant 2[(2^n-2^{\frac{n}{2}+1})+2(2^{\frac{n}{2}}-2^{\frac{n-1}{2}})]+1$$

$$=2(2^n-2^{\frac{n+1}{2}})+1=2^{n+1}-2^{\frac{n+1}{2}+1}+1.$$

即命题对 $n+1$ 成立.

综上，命题对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

说明 上面的几个例子涉及多方面的知识内容，表现了数学归纳法应用的广泛性.

例 6 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：

$$a_1=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{\left[\frac{n}{2}\right]},\ n=2,3,\cdots.$$

证明：该数列中有无穷多项是 7 的倍数.

证明 直接由递推式计算，可得 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$, $a_5=7$. 现设 $a_n(n\geqslant 5)$ 是 7 的倍数，我们寻找下标 $m>n$，使得 $7\mid a_m$.

由 $a_n \equiv 0 \pmod 7$,知 $a_{2n} = a_{2n-1} + a_n \equiv a_{2n-1} \pmod 7$, $a_{2n+1} = a_{2n} + a_n \equiv a_{2n} \pmod 7$,故 $a_{2n-1} \equiv a_{2n} \equiv a_{2n+1} \pmod 7$. 记 a_{2n-1} 除以 7 所得余数为 r,如果 $r = 0$, 那么取 $m = 2n-1$ 即可;如果 $r \neq 0$, 考虑下面的 7 个数:

$$a_{4n-3},\ a_{4n-2},\ \cdots,\ a_{4n+3}. \qquad ①$$

注意到, $a_{4n-2} = a_{4n-3} + a_{2n-1} \equiv a_{4n-3} + r \pmod 7$, $a_{4n-1} = a_{4n-2} + a_{2n-1} \equiv a_{4n-2} + r \pmod 7 \equiv a_{4n-3} + 2r \pmod 7$, $a_{4n} = a_{4n-1} + a_{2n} \equiv a_{4n-1} + r \pmod 7 \equiv a_{4n-3} + 3r \pmod 7$, $\cdots$, $a_{4n+3} = a_{4n+2} + a_{2n+1} \equiv a_{4n+2} + r \pmod 7 \equiv a_{4n-3} + 6r \pmod 7$. 因此 $a_{4n-3}, a_{4n-2}, \cdots, a_{4n+3}$ 构成模 7 的一个完全剩余系,故存在 $m \in \{4n-3, 4n-2, \cdots, 4n+3\}$, 使得 $a_m \equiv 0 \pmod 7$.

这样,我们从 a_5 出发结合上面的推导可知 $\{a_n\}$ 中有无穷多项是 7 的倍数.

例 7 (1) 证明:对任意正整数 $n\ (\geqslant 2)$, 存在 n 个不同的正整数 $a_1, \cdots, a_n$, 使得对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 都有 $(a_i - a_j) \mid (a_i + a_j)$.

(2) 是否存在一个由正整数组成的无穷集 $\{a_1, a_2, \cdots\}$, 使得对任意 $i \neq j$, 都有 $(a_i - a_j) \mid (a_i + a_j)$?

证明 (1) 当 $n = 2$ 时,取数 1, 2 即可.

设命题对 n 成立,即存在正整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 满足:对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 都有 $(a_i - a_j) \mid (a_i + a_j)$, 现在考虑下面的 $n+1$ 个数.

$$A,\ A + a_1,\ A + a_2,\ \cdots,\ A + a_n. \qquad ①$$

这里 $A = a_n!$,其中 $a_n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times a_n$.

从①中任取两个数 $x < y$, 若 $x = A$, $y = A + a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 则 $y - x = a_i$, 而 $x + y = 2A + a_i$, 结合 $a_i \leqslant a_n$,知 $a_i \mid A$,故 $(y-x) \mid (y+x)$; 若 $x = A + a_i$, $y = A + a_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$,则 $y - x = a_j - a_i$, $y + x = 2A + (a_i + a_j)$,由归纳假设 $(a_j - a_i) \mid (a_j + a_i)$, 又 $a_j - a_i < a_n$,故 $(a_j - a_i) \mid A$, 所以, $(y-x) \mid (y+x)$. 从而命题对 $n+1$ 成立.

综上,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 2$, 存在满足条件的 n 个正整数.

(2) 若存在无穷多个正整数 $a_1 < a_2 < \cdots$, 使得对任意 $1 \leqslant i < j$, 都有 $(a_j - a_i) \mid (a_j + a_i)$. 则对任意 $j > 1$, 有 $(a_j - a_1) \mid (a_j + a_1)$, 故 $(a_j - a_1) \mid 2a_1$. 而由 $a_1 < a_2 < \cdots$, 知 $2a_1$ 可以被无穷多个正整数整除,这是一个矛盾.

所以,不存在满足条件的无穷多个正整数.

说明 数学归纳法证明的是:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $P(n)$成立,也就是说它处理的是关于任意有限的正整数 n 的命题,并不能断定 $P(\infty)$成立,这里部分地体现了有限与无穷的本质区别. 此例中(1)与(2)的对比可看出这一点.

当然,用数学归纳法处理存在性问题也能处理与无穷有关的一些结论,例如例 7 的处理. 对比例 7 与例 8 中的递推结构的构造,可发现两者有本质不同,前者把前面的结果"包容下来",而后者却把前面的数都"扬弃"了.

例 8 设 $n\ (\geqslant 5)$ 为给定的正整数,已知任意一个边数为 e 的 n 阶简单图 G 中都存在两个恰有一个公共顶点的三角形. 求 e 的最小值.

解 考虑一个两部图 G, 它的顶点集可分为 M_1、M_2, 其中 M_1 中有 $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ 个顶点,而 M_2 中有 $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 个顶点. 让 M_1 中每个点与 M_2 中的每个点都连边,且将 M_1 中的某两个点之间连边, G 中其余点对之间不连边,则 G 的边数 $e=\left[\dfrac{n}{2}\right]\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+1=\left[\dfrac{n^2}{4}\right]+1$, 并且 G 中任意两个三角形都有一条公共边,即 G 中没有两个三角形恰有一个公共顶点. 所以, $e\geqslant\left[\dfrac{n^2}{4}\right]+2$.

下证:当 $e\geqslant\left[\dfrac{n^2}{4}\right]+2$ 时,任意一个边数为 e 的 n 阶简单图 G 中都存在两个恰有一个公共顶点的三角形. ①

对 n 归纳予以证明. 当 $n=5$ 时, G 的边数 $\geqslant 8$, 此时 G 为完全图 K_5 去掉至多两条边后得到,由于 K_5 中每个顶点的度都为 4,去掉两条边后,至少还有一个顶点的度等于 4,不妨设顶点 A 的度为 4,这时所去的两条边为由 B、C、D、E 所形成的完全图 K_4 中的边,考虑该 K_4 中的三组对边(BC 与 DE、BD 与 CE、BE 与 CD),去掉两条边后,必有一组对边被完整地保留,设这组对边为 BC 和 DE, 则$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 为所求. 故 $n=5$ 时命题①成立.

现设①对 $n-1\ (n\geqslant 6)$ 成立,考虑 n 的情形.

(1) 若 G 中有一个顶点的度 $\leqslant\left[\dfrac{n}{2}\right]$, 则将 G 中该顶点及其引出的边去掉后,所得 $n-1$ 阶子图的边数 $\geqslant\left[\dfrac{n^2}{4}\right]+2-\left[\dfrac{n}{2}\right]=2+\left[\dfrac{n}{2}\right]\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]-1\right)$ $=2+\left[\dfrac{n}{2}\right]\left[\dfrac{n-1}{2}\right]=\left[\dfrac{(n-1)^2}{4}\right]+2$, 从而由归纳假设可知命题①成立.

(2) 若 G 中每个顶点的度都不小于 $\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$, 则当 $n=2k$ 时, $e\geqslant k(k+$

$1) > k^2+2=\left[\frac{n^2}{4}\right]+2$；当 $n=2k+1$ 时，$e \geqslant \frac{1}{2}(2k+1)(k+1)=k(k+1)+\frac{k+1}{2} \geqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]+2$，最后一个不等式等号仅当 $k=3$，即 $n=7$ 成立.

如果 $e > \left[\frac{n^2}{4}\right]+2$，那么我们可以在 G 中任意去掉一条边后，重复上述讨论，除 $n=7$，且每个顶点的度都为 4 的情况以外，每种情形都可化为(1)，因此仅需讨论 G 是一个度都为 4 的 7 阶图的情形.

这时，考虑由 A 引出的 4 条边 AB、AC、AD、AE，在顶点 B、C、D、E 中，每个点都至少与另外三个点之一有边相连，不妨设 B、C 之间连有边. 若 D、E 之间也连有边，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 为所求，故可设 D、E 之间没连边(如图 2 所示). 现在 G 中如果有边 BD、CE 或 BE、CD，则命题①已成立，因此 D、E 都与 B 连边或者都与 C 连边，不妨设 G 中有边 BD 和 BE，且 C、D、E 之间两两不连边. 注意到，G 中点 C、D、E 的度都为 4，故 C、D、E 都与 G 中的另外两点 X、Y 同时有边相连，并且 X 与 Y 之间也有边相连(这是因为 X、Y 都与 A、B 没有边相连)，这样，G 是如图 2 所示的简单图，此时 $\triangle CBA$ 与 $\triangle CXY$ 为所求.

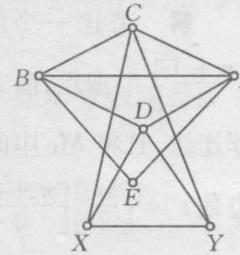


图 2

从而，命题①对 n 成立，所以，命题①对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ $(n \geqslant 5)$ 成立.

综上可知，e 的最小值为 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+2$.

说明 一个 n 阶简单图的边数不小于 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ 时必出现三角形，这是图兰定理的一个特殊情况，此题是对该结论的一个讨论.

2 第二数学归纳法

第二数学归纳法　设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的一个命题(或性质). 如果

(1) 当 $n=1$ 时, $P(n)$ 成立;

(2) 由"对一切小于 n 的正整数 k, $P(k)$ 都成立"可以推出 $P(n)$ 成立.

那么,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n)$ 都成立.

证明　考虑命题 $Q(n)$:"对所有 $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \in \mathbf{N}^*$, $P(k)$ 都成立". 则由 $Q(n)$ 成立,可知 $P(n)$ 成立.

当 $n=1$ 时,由(1)知 $Q(n)$ 成立.

现设 $Q(n-1)(n \geqslant 2)$ 成立,即对所有 $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $P(k)$ 都成立,则由(2)知 $P(n)$ 成立,所以,对 $1 \leqslant k \leqslant n$, $P(k)$ 都成立,从而 $Q(n)$ 成立.

于是,由第一数学归纳法可知对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $Q(n)$ 都成立,进而 $P(n)$ 成立. 第二数学归纳法获证.

第二数学归纳法是第一数学归纳法的推论,在作归纳假设时,我们假设了 $P(1), \cdots, P(n-1)$ 都成立,并在此前提下证出 $P(n)$ 成立,这是区别于第一数学归纳法的地方,有时会给证明带来很大的方便.

例 1　斐波那契(Fibonacci)数列 $\{F_n\}$ 定义如下: $F_0=F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n=0, 1, 2, \cdots$. 证明:每一个正整数 m 都可以惟一地表示为如下形式

$$\begin{aligned} m &= (a_n a_{n-1} \cdots a_1)_F \\ &= a_n F_n + a_{n-1} F_{n-1} + \cdots + a_1 F_1, \end{aligned} \qquad ①$$

这里 $a_i \in \{0, 1\}$, $a_n=1$, 并且不存在下标 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, 使得 $a_i=a_{i+1}=1$.

证明　当 $m=1$ 时,命题显然成立.

现设对所有小于 m 的正整数 k 命题成立,即 k 可以惟一地表示为①的形式,考虑 m 的情形.

由于存在惟一的 $n \in \mathbf{N}^*$，使得 $F_n \leqslant m < F_{n+1}$，如果 $m - F_n = 0$，则 m 已表为①的形式，如果 $m - F_n > 0$，则由归纳假设，$m - F_n$ 有形如①的表示，设

$$m - F_n = (a_l a_{l-1} \cdots a_1)_F = a_l F_l + \cdots + a_1 F_1,$$

其中 $a_l = 1$. 则 $m = F_n + a_l F_l + \cdots + a_1 F_1$. 现在若 $l \geqslant n-1$，则 $m \geqslant F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$，矛盾，所以 $l \leqslant n-2$，从而 m 有满足①的表示.

下证 m 的形如①的表示是惟一的.

事实上，若

$$m = (a_n \cdots a_1)_F = (b_l \cdots b_1)_F \qquad ②$$

这里 $a_n = b_l = 1$，且 $n \geqslant l$.

如果 $n > l$，则由于不存在下标 $1 \leqslant i \leqslant l-1$，使得 $b_i = b_{i+1} = 1$，结合 $\{F_n\}$ 的定义，可知

$$(b_l \cdots b_1)_F \leqslant \begin{cases} F_l + F_{l-2} + \cdots + F_3 + F_1,\ l\text{ 为奇数}, \\ F_l + F_{l-2} + \cdots + F_4 + F_2,\ l\text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$$< \begin{cases} F_l + F_{l-2} + \cdots + F_3 + F_1 + F_0 = F_{l+1},\ l\text{ 为奇数}, \\ F_l + F_{l-2} + \cdots + F_4 + F_2 + F_0 = F_{l+1},\ l\text{ 为偶数}. \end{cases}$$

因此 $(b_l \cdots b_1)_F < F_{l+1} \leqslant F_n$，故②不能都取等式.

所以，$n = l$，进而 $m - F_n$ 有两种表示，这与归纳假设不符. 所以，m 的表示惟一.

综上，由第二数学归纳法知命题成立.

说明 本题的结论称为正整数 m 的 Fibonacci 表示，它是 Zeckendorf 定理的内容.

例 2 实数数列 $a_1, a_2, \cdots$ 满足：对任意 $i, j \in \mathbf{N}^*$，都有 $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j$. 证明：对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geqslant a_n. \qquad ①$$

证明 当 $n = 1$ 时，命题显然成立.

现设①对所有小于 n 的正整数都成立，即对 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，都有

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k} \geqslant a_k.$$

我们记 $b_k = a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k}$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$, 则由上述假设知 $\sum_{k=1}^{n-1} b_k \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_k$, 即

$$(n-1)a_1 + \frac{n-2}{2}a_2 + \cdots + \frac{n-(n-1)}{n-1}a_{n-1} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

上式两边都加上 $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$, 可得

$$n\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n-1}\right) \geqslant 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k,$$

于是

$$n\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right) \geqslant a_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k. \qquad ②$$

由条件,知 $a_1 + a_{n-1} \geqslant a_n$, $a_2 + a_{n-2} \geqslant a_n$, $\cdots$, $a_{n-1} + a_1 \geqslant a_n$,所以, $2\sum_{k=1}^{n-1} a_k \geqslant (n-1)a_n$. 这样,由②可得①成立.

所以,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式①成立.

说明 这里对归纳假设中所得的 $n-1$ 个不等式求和是关键,对比两个例子处理中归纳假设的运用:例 1 是将 n 的情形归入 $1, 2, \cdots, n-1$ 中的某个假设(具体是哪一个随 n 的变化而变化),例 2 却需要整体用到 $1, 2, \cdots, n-1$ 中的每一种情形. 这两种处理是运用第二数学归纳法证题时最常见的方法.

例 3 正整数数列 c_1, c_2, $\cdots$满足下述条件:

对任意正整数 m、n,若 $1 \leqslant m \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$, 则存在正整数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 使得

$$m = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_i}.$$

问:对每个给定的 $i \in \mathbf{N}^*$, c_i 的最大值为多少?

解 我们证明: c_1 的最大值为 2,而 $i \geqslant 2$ 时, c_i 的最大值为 $4 \times 3^{i-2}$.

为此先证:

$$c_1 \leqslant 2. \text{而 } i \geqslant 2 \text{ 时}, c_i \leqslant 4 \times 3^{i-2}. \qquad ①$$

事实上,若 $c_1 > 1$, 取 $(m, n) = (c_1 - 1, 1)$, 知存在 $a_1 \in \mathbf{N}^*$, 使得 $c_1 - 1 = \frac{c_1}{a_1}$, 即 $a_1 = \frac{c_1}{c_1 - 1} = 1 + \frac{1}{c_1 - 1}$, 仅当 $c_1 = 2$ 时 a_1 为整数,故 $c_1 \leqslant 2$.

现设①对 $i=1, 2, \cdots, k-1\ (k\geqslant 2)$ 都成立，取 $(m, n)=(c_k, k)$，则存在 $a_1, \cdots, a_k\in \mathbf{N}^*$，使得 $c_k=\frac{c_1}{a_1}+\cdots+\frac{c_k}{a_k}$. 这要求 $a_k\geqslant 2$，否则 $\sum_{i=1}^{k-1}\frac{c_i}{a_i}=0$ 与 a_i，c_i 为正整数矛盾，从而 $c_k\leqslant\frac{c_k}{2}+\sum_{i=1}^{k-1}c_i$，即 $c_k\leqslant 2\sum_{i=1}^{k-1}c_i$，所以，$c_k\leqslant 2(2+4+4\times 3+\cdots+4\times 3^{k-3})=4\times 3^{k-2}$. 因此，由第二数学归纳法知结论①成立.

再证：

当 $c_1=2$，$c_i=4\times 3^{i-2}\ (i\geqslant 2)$ 时，数列 $\{c_i\}$ 具有题给的性质. ②

对 n 归纳. 当 $n=1$ 时，$m\leqslant c_1=2$，故 $m=1$ 或 2. 若 $m=1$，取 $a_1=2$ 即可，若 $m=2$，取 $a_1=1$ 即可.

假设当 $1, 2, \cdots, n-1$ 时，题给性质满足. 考虑 n 的情形，此时 $1\leqslant m\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i$.

若 $m=1$，取 $a_i=nc_i$，$i=1, 2, \cdots, n$ 即可；

若 $2\leqslant m\leqslant\frac{c_n}{2}+1=\left(\sum_{i=1}^{n-1}c_i\right)+1$，令 $a_n=c_n$，并对 $m-\frac{c_n}{a_n}=m-1$ 用归纳假设可知②成立；

若 $\frac{1}{2}c_n+1<m\leqslant c_n$，取 $a_n=2$，并对 $m-\frac{c_n}{2}$ 用归纳假设即可；

若 $c_n<m\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i$，取 $a_n=1$，并对 $m-c_n$ 用归纳假设即可.

所以，结论②成立.

综上可知，c_1 的最大值为 2，而 $i\geqslant 2$ 时，c_i 的最大值是 $4\times 3^{i-2}$.

说明 此题寻找答案的关键一步是对等式 $c_n=\frac{c_1}{a_1}+\cdots+\frac{c_n}{a_n}$ 的分析，它需要利用 m 的任意性中找到一个突破口.

例 4 设 $p(x)$ 是一个 n 次实系数多项式，a 是一个不小于 3 的实数. 证明：下面的 $n+2$ 个数中至少有一个数不小于 1.

$$|a^0-p(0)|, |a^1-p(1)|, \cdots, |a^{n+1}-p(n+1)|.$$

证明 对 $p(x)$ 的次数 n 进行归纳.

当 $n=0$ 时，$p(x)$ 是常数多项式，设 $p(x)=c$，此时由 $|1-c|+|a-c|\geqslant$

$|a-1|\geqslant 2$，可知 $\max\{|1-c|, |a-c|\}\geqslant 1$，即命题对 $n=0$ 成立.

假设命题对所有次数小于 n 的多项式都成立，考虑次数为 n 的多项式 $p(x)$.

令 $f(x)=\frac{1}{a-1}[p(x+1)-p(x)]$，则 $f(x)$ 的次数 $\leqslant n-1$. 由归纳假设知存在 $m\in\{0, 1, 2, \cdots, n\}$，使得 $|a^m-f(m)|\geqslant 1$，即 $\left|a^m-\frac{1}{a-1}[p(m+1)-p(m)]\right|\geqslant 1$. 故

$$|a^{m+1}-p(m+1)+p(m)-a^m|\geqslant a-1\geqslant 2,$$

从而 $\max\{|a^{m+1}-p(m+1)|, |a^m-p(m)|\}\geqslant 1$，即存在 $r\in\{0, 1, 2, \cdots, n+1\}$，使得 $|a^r-p(r)|\geqslant 1$，命题对 n 成立.

综上可知，对任意次数为 n 的多项式 $p(x)$，命题都成立.

例 5 证明：任意一个实系数多项式都可以表示为两个 $\mathbf{R}[x]$ 中的多项式之差，并且这两个多项式都是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增的多项式. 这里 $\mathbf{R}[x]$ 表示实系数多项式全体组成的集合.

证明 设 $f(x)\in\mathbf{R}[x]$，对 $f(x)$ 的次数 n 运用数学归纳法予以证明.

当 $n=0$ 时，可写 $f(x)=(x+c)-x$，这里 $x+c$ 与 x 都是单调递增的多项式，命题在 $n=0$ 时成立.

设对任意次数小于 n 的多项式，命题均成立，对 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，记 $f(x)=a_nx^n+g(x)$，由归纳假设可设 $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$，这里 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 都是单调递增的多项式.

若 n 为奇数，当 $a_n>0$ 时，记 $f_1(x)=a_nx^n+g_1(x)$，则 $f(x)=f_1(x)-g_2(x)$ 是两个递增多项式之差；当 $a_n<0$ 时，记 $f_2(x)=-a_nx^n+g_2(x)$，则 $f(x)=g_1(x)-f_2(x)$ 也是两个递增多项式之差.

若 n 为偶数，不妨设 $a_n>0$（否则考虑 $-f(x)$），这时设 $f(x)=\frac{a_n}{n+1}((x+1)^{n+1}-x^{n+1})+h(x)$，这里 $\deg h\leqslant n-1$. 于是，由归纳假设，可写 $h(x)=h_1(x)-h_2(x)$，其中 h_1，h_2 为两个递增的多项式，这样，令 $f_1(x)=\frac{a_n}{n+1}(x+1)^{n+1}+h_1(x)$，$f_2(x)=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+h_2(x)$，就有 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ 是