

陈文灯 黄先开 朱庆宇◎主编

2020 考研 数学 复习指南

(数学一)

助力千万考生勇创人生辉煌成就

二十三年经典对接移动互联网时代

网络增值版 本书使用说明



名师点
题答疑

哪里不会
扫哪里

重难点视频讲解
下载慧升考研APP扫
书中二维码

超级服务

使用陈文灯考研数学
图书可获免费网络答
疑服务

超值赠送

《课后习题答案详解》
便携本

文登考研网址: www.wendeng.com.cn
增值服务网址: www.hskaoyan.com



中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

前言

1. ①2... II. ①陈... ②黄... ③朱... III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料

2020 考研数学复习指南 (数学一)

陈文灯 黄先开 朱庆宇 主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

本书从 1992 年出版以来，深受广大考生的喜爱，成为广大考生复习备考的良伴，同时也成为许多教师同行的教学参考。在过去的十几年中，本书帮助许许多多考生圆了梦想，帮助使用过本书的学子们应用“数学的规律”方法在学习、工作和研究中取得了丰硕的成果。

为了帮助同学们提高学习效率，我们专门在本书配套 app 为本书开设答疑讨论专区，以便同学们相互交流互动。从本书出版一直到现在，文友们始终一直伴随着我们！许多考生学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息，我们曾数次认真商讨、仔细揣摩，对本书再次做了修订，希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心感谢。

此外，在 app 答疑平台，考生在看视频的同时与本书一部分例题进行了二维码扫一扫。在这个基础上再看视频就更容易了。

这次再版，我们做了以下修订：

(1) “变型万用，深难浅说”又特别有长的由案，让“变型”变型更；积分公式与不等式的证明；一般化那的辅助函数的估计，即可自行解答。

(2) 例题上做了调整，更实用，突出题目的特点，能“联带”，以培养考生分析问题的能力。

(3) 修订错误。我们感谢广大考生的帮助，为求精益求精。

(4) 增加了二维码扫描，以便更好地结合当前考生学习数学的方法。

(5) 更新应用数学思想的训练。在本书的配套讲解中，注重知识的引入和数学模型的理

解。

图书在版编目 (CIP) 数据

2020 考研数学复习指南: 数学一 / 陈文灯, 黄先开, 朱庆宇主编. —北京: 中国财政经济出版社, 2019. 1

ISBN 978-7-5095-8805-5

I. ①2… II. ①陈… ②黄… ③朱… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 020432 号

责任编辑: 樊 闯

(一学模) 责任校对: 张 凡

封面设计: 陈宇琰

主 编 朱 庆 宇 开 黄 先 开 陈 文 灯

中国财政经济出版社出版

URL: <http://www.cfeph.cn>

E-mail: cfeph@cfeph.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100142

营销中心电话: 010-88191537

北京富生印刷厂印刷 各地新华书店经销

787×1092 毫米 16 开 41.5 印张 1 017 000 字

2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月北京第 1 次印刷

定价: 68.00 元

ISBN 978-7-5095-8805-5

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

本社质量投诉电话: 010-88190744

打击盗版举报热线: 010-88191661 QQ: 2242791300

前 言

本书从1995年出版以来，每年再版和修订，集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握以及众多考研学子的复习心得、实战体会，已成为广大考研读者的良师诤友，同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编，成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中，本书帮助许许多多考研学子圆了梦想，帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得了丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题，编者和一些数学同仁专门在本书配套 app 为本书开设答疑讨论专区，以更好地和同学们交流互动。从您购书开始一直到考试，文登名师将一直伴随着您！许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息，我们曾数次认真商讨、仔细揣摩，对本书再次做了修订，希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外，在 app 答疑平台的基础上，我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课，建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。同时本书选取了一部分例题进行了二维码讲解，扫码分享后即可免费观看。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南，效果将事半功倍！

此次再版，我们做了以下修订。

(1) “变繁为简，变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结，使考生得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧，并给出了详细的分析，使同学们了解这些方法的由来，让“玄妙”变得顺理成章。例如，连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明，尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的做法，经过我们的分析，原题将变得非常“初等”，非常简单，只要仿效，即可自行解答。

(2) 例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应对考试很有用，根据题型特点，能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”，以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3) 修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容，修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助，再版力求尽量做到完美。为了精益求精，恳请朋友们指正。

(4) 增加了二维码讲解。用 95 后学生学习数学的视角，对本书例题和习题进行了重新讲解，以便更好地贴合当前考生学习数学的方法。

(5) 更加突出数学思维的训练。在本书的配套讲解中，注重知识的引入和数学模型的建

立, 例题讲解联系实际, 加强应用。

最后回答考生们的问题: “如何有效地利用您的书提高复习效果?” “考好数学, 书要看几遍?”

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看, 对基础部分要多下点工夫, 做到概念、定理能用自己的语言叙述, 习题应全部都做。高数的基础: 极限、导数与微分、不定积分; 线性代数的基础: 矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量; 概率论与数理统计的基础: 事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、伯努利概型、随机变量及其分布(特别是二维连续型)、随机变量的数字特征 [期望 $E(X)$ 、方差 $D(X)$ 、协方差 $\text{cov}(X, Y)$, 相关系数 ρ_{XY}]。如果是自学, 应先仔仔细细地把本书看一遍, 然后再详细看二三遍, 对重点知识点着重理解、揣摩; 如果是参加强化班, 最好与上课“同步”进行, 课后再看一遍即可。

这里尤为强调的是, 在本书学习过程中, 大家至少准备三个大笔记本, 做题之前尽量不要看答案, 先自己在空白本子上完整地做一遍, 时时模拟考场在答题纸上做题的样子。如果某个题目自己不会做, 也尽量根据已知条件找点有帮助的转化, 即便是写了“解”“证明”之后毫无思路, 这种方法也便于您迅速找到自己的卡壳点。数学学习过程中的提升大致有两类: 一是把自己会的做得更熟练, 二是把自己的卡壳点做会做熟。要知道数学常规题解答时靠条件反射立马做出, 稍微有难度的题目, 是观察题目之后, 列出已知条件和根据已知转化出来的条件进行排列组合得到最后的答案。见题就做这个习惯将会最大程度地让您避免眼高手低这种情况。

送给考研朋友一首诗:

数学基础树的根,
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺,
功到高分自然成。



题型二 简单无理函数的不定积分	87	习题四	138
题型三 三角有理式的不定积分	88	第五章 微分中值定理	142
题型四 含有反三角函数的不定积分	92	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	142
题型五 抽象函数的不定积分	92	第二节 重要题型的解题方法和技巧	143
题型六 分段函数的不定积分	93	题型一 闭区间上连续函数命题的证明	143
第三节 思维定势及综合题解析	94	题型二 证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	146
一、思维定势	94	题型三 证明某个函数恒等于一个常数的命题	147
二、综合题解析	95	题型四 命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明	148
习题三	97	题型五 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	149
第四章 定积分及反常积分	101	题型六 欲证结论:在 (a,b) 内至少存在两点 $\xi, \eta(\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式	152
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	101	第三节 思维定势及综合题解析	153
一、基本性质	101	一、思维定势	153
二、定理和公式	104	二、综合题解析	155
三、定积分的计算法	107	习题五	156
四、反常积分的基本概念	111	第六章 常微分方程	159
第二节 重要题型的解题方法和技巧	112	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	159
题型一 分段函数的定积分	112	一、基本概念	159
题型二 被积函数带有绝对值符号的定积分	114	二、二阶线性微分方程解的结构	159
题型三 被积函数中含有“变限积分”的定积分	115	三、二阶常系数线性微分方程	161
题型四 对称区间上的定积分	117	四、 n 阶常系数线性微分方程	161
题型五 被积函数的分母为两项,而分子为其中一项的定积分	118	第二节 重要题型的解题方法和技巧	164
题型六 由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的定积分	119	题型一 一阶微分方程的计算	164
题型七 已知一定积分,求另一一定积分	120	题型二 可降阶的高阶方程的求解	173
题型八 定积分等式的证明	121	题型三 计算二阶线性微分方程	174
题型九 定积分不等式的证明	129	题型四 欧拉方程的计算	177
题型十 计算反常积分	134		
题型十一 反常积分的判敛	135		
第三节 思维定势及综合题解析	136		
一、思维定势	136		
二、综合题解析	137		

题型五 微分方程的应用	179	题型一 正项级数的判敛	228
第三节 思维定势及综合题解析	182	题型二 任意项级数的判敛	229
一、思维定势	182	题型三 级数的证明或判敛	231
二、综合题解析	182	题型四 计算函数项级数收敛域	233
习题六	184	题型五 求幂级数的收敛域、收敛半径	235
第七章 一元微积分的应用	187	题型六 函数在某点的幂级数展开	236
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	187	题型七 幂级数求和	238
一、函数的单调增减性定理	187	题型八 数项级数求和	242
二、函数的极值与最值	188	题型九 周期与非周期函数的傅里叶级数	245
三、函数凹凸性的判别与函数的拐点	189	第三节 思维定势及综合题解析	248
四、微元法及其应用	191	一、思维定势	248
第二节 重要题型的解题方法和技巧	193	二、综合题解析	248
题型一 求函数的极值	193	习题八	250
题型二 求函数的最值	194	第九章 向量代数与空间解析几何	254
题型三 关于方程根的讨论	195	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	254
题型四 函数渐近线的求解	200	一、矢量的概念及其性质	254
题型五 函数作图	201	二、平面与直线	259
题型六 求平面图形的面积	202	三、投影方程	260
题型七 求立体的体积	204	四、曲面方程	262
题型八 求平面曲线的弧长	205	第二节 重要题型的解题方法和技巧	266
题型九 求旋转体的侧面积	206	题型一 求平面方程	266
题型十 变力做功、引力、液体的静压力	207	题型二 求空间直线方程	268
第三节 思维定势与综合题解析	210	第三节 思维定势及综合题解析	270
一、思维定势	210	一、思维定势	270
二、综合题解析	211	二、综合题解析	270
习题七	214	习题九	271
第八章 无穷级数	217	第十章 多元函数微分学	274
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	217	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	274
一、无穷级数的基本概念和性质	217	一、二元函数的定义	274
二、数项级数判敛法	218	二、二元函数的极限及连续性	275
三、函数项级数的概念	223	三、偏导数、全导数及全微分	276
四、幂级数的概念和性质	223	四、基本定理	277
五、傅里叶级数的概念及定理	225		
第二节 重要题型的解题方法和技巧	225		

五、多元函数的极值	279	题型八 三重积分的计算	319
六、条件极值与无条件极值	280	第三节 思维定势及综合题解析	321
第二节 重要题型的解题方法和技巧	280	一、思维定势	321
题型一 简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的 微分法	280	二、综合题解析	322
题型二 复合函数微分法	281	习题十一	323
题型三 隐函数微分法	284	第十二章 曲线、曲面积分及场论初步	328
题型四 空间曲线在某点处的切线和 法平面方程	287	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	328
题型五 空间曲面在其上某点处的切 平面和法线方程	288	一、曲线积分的概念和性质	328
题型六 求无条件极值	290	二、曲线积分的基本定理	329
题型七 求条件极值	291	三、曲面积分的概念和性质	330
题型八 求最值	292	四、曲面积分的基本定理	331
第三节 思维定势及综合题解析	294	五、场论初步	331
一、思维定势	294	第二节 重要题型的解题方法和技巧	336
二、综合题解析	295	题型一 对弧长的曲线积分的计算	336
习题十	296	题型二 对坐标的曲线积分的计算	337
第十一章 重积分	299	题型三 对面积的曲面积分的计算	342
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	299	题型四 对坐标的曲面积分的计算	343
一、基本概念	299	题型五 曲面面积的计算	348
二、性质	299	第三节 思维定势及综合题解析	349
三、公式	302	一、思维定势	349
四、二重积分的解题技巧	303	二、综合题解析	350
五、三重积分的解题技巧	305	习题十二	351
第二节 重要题型的解题方法和技巧	307	第十三章 函数方程与不等式证明	353
题型一 更换二重积分的积分次序	307	第一节 函数方程	353
题型二 选择二重积分的积分次序	309	一、利用函数表示法与用何字母表示 无关的“特性”求解方程	353
题型三 二重积分坐标系的选择	311	二、利用极限求解函数方程	354
题型四 分段函数的二重积分的计算	312	三、利用导数的定义求解方程	355
题型五 二重积分等式的证明	315	四、利用变上限积分的可导性求解方程	355
题型六 二重积分不等式的证明	317	五、利用连续函数的可积性及原函数	355
题型七 更换三重积分的积分次序	319		

的连续性求解	356
六、利用解微分方程的方法求解 $f(x)$	357
第二节 不等式的证明	360
一、引入参数法	360
二、利用微分中值定理	361
三、利用函数的单调增减性(重点)	363
四、利用函数的极值与最值	365
五、利用函数图形的凹凸性	367
六、利用泰勒展开式	367
七、杂例	369
习题十三	370

第二篇 线性代数

第一章 行列式	373
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	373
一、排列与逆序	373
二、 n 阶行列式的定义	374
三、行列式的基本性质	376
四、行列式按行(列)展开定理	378
五、重要公式与结论	380
第二节 重要题型的解题方法和技巧	381
题型一 抽象行列式的计算	381
题型二 低阶行列式的计算	381
题型三 n 阶行列式的计算	383
第三节 思维定势与综合题解析	388
一、思维定势	388
二、综合题解析	389
习题一	390
第二章 矩阵	393
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	393
一、矩阵的概念	393
二、矩阵的运算	394
三、逆矩阵的概念	396
四、利用伴随矩阵求逆矩阵	397
五、矩阵的初等变换与求逆	398

六、分块矩阵及其求逆	399
七、矩阵的秩及其求法	399
第二节 重要题型的解题方法和技巧	399
题型一 求逆矩阵	399
题型二 求矩阵的高次幂 A^m	402
题型三 有关初等矩阵的命题	404
题型四 解矩阵方程	405
题型五 求矩阵的秩	407
题型六 关于矩阵对称、反对称命题的证明	409
题型七 关于方阵 A 可逆的证明	409
题型八 与 A 的伴随阵 A^* 有关联的命题的证明	410
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	411
第三节 思维定势与综合题解析	413
一、思维定势	413
二、综合题解析	414
习题二	415
第三章 向量	421
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	421
一、向量的概念与运算	421
二、向量间的线性关系	421
三、向量组的秩和矩阵的秩	422
四、向量空间	423
五、重要定理与公式	425
六、小结	425
第二节 重要题型的解题方法和技巧	426
题型一 讨论向量组的线性相关性	426
题型二 有关向量组线性相关性命题的证明	430
题型三 判定一个向量是否可由一组向量线性表示	436
题型四 有关向量组线性表示命题的证明	437

题型五 求向量组的极大线性无关组	438
题型六 有关向量组或矩阵秩的计算 与证明	440
题型七 与向量空间有关的命题	444
第三节 思维定势与综合题解析	446
一、思维定势	446
二、综合题解析	446
习题三	447
第四章 线性方程组	451
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	451
一、克莱姆法则	451
二、线性方程组的基本概念	451
三、线性方程组解的判定	452
四、非齐次线性方程组与其导出组的解 的关系	453
五、线性方程组解的性质	453
六、线性方程组解的结构	453
第二节 重要题型的解题方法和技巧	454
题型一 基本概念题(解的判定、性质、 结构)	454
题型二 含有参数的线性方程组解的 讨论	458
题型三 讨论两个方程组的公共解	464
题型四 有关基础解系的证明	465
第三节 思维定势与综合题解析	467
一、思维定势	467
二、综合题解析	467
习题四	472
第五章 特征值和特征向量	477
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	477
一、矩阵的特征值和特征向量的概念	477
二、相似矩阵及其性质	477
三、矩阵可相似对角化的充要条件	478
四、实对称矩阵及其性质	478
五、重要公式与结论	479
第二节 重要题型的解题方法和技巧	480
题型一 求数值矩阵的特征值与特征 向量	480
题型二 求抽象矩阵的特征值与特征 向量	481
题型三 特征值与特征向量的逆问题	482
题型四 相似的判定及其逆问题	485
题型五 判断矩阵 A 是否可对角化	487
题型六 有关特征值与特征向量的 证明题	490
第三节 思维定势与综合题解析	492
一、思维定势	492
二、综合题解析	492
习题五	498
第六章 二次型	501
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	501
一、二次型及其矩阵表示	501
二、化二次型为标准型	501
三、配方法和正交变换法	502
四、二次型和矩阵的正定性及其判别法	503
第二节 重要题型的解题方法和技巧	506
题型一 二次型所对应的矩阵及其性质	506
题型二 化二次型为标准形	507
题型三 已知二次型通过正交变换化 为标准形,反求参数	511
题型四 有关二次型及其矩阵正定性 的判定与证明	513
第三节 思维定势与综合题解析	515
一、思维定势	515
二、综合题解析	516

习题六	517	题型三 求一维随机变量函数的分布	556
第三篇 概率论与数理统计		题型四 二维随机变量及其分布的概念、性质的考查	558
第一章 随机事件和概率	519	题型五 求二维随机变量的各种分布与随机变量独立性的讨论	560
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	519	题型六 求两个随机变量的简单函数的分布	567
一、随机试验和随机事件	519	第三节 思维定势与综合题解析	572
二、事件的关系及其运算	520	一、思维定势	572
三、事件的概率及其性质	522	二、综合题解析	574
四、条件概率与事件的独立性	523	习题二	575
五、重要概念	524	第三章 随机变量的数字特征	583
六、重要公式	524	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	583
第二节 重要题型的解题方法和技巧	525	一、一维随机变量的数字特征	583
题型一 古典概型与几何概型	525	二、二维随机变量的数字特征	585
题型二 事件的关系和概率性质的命题	529	三、几种重要的数学期望与方差	586
题型三 条件概率与积事件概率的计算	531	四、重要公式与结论	587
题型四 全概率公式与贝叶斯公式的命题	532	第二节 重要题型的解题方法和技巧	587
题型五 有关伯努利概型的命题	534	题型一 求一维随机变量的数字特征	587
第三节 思维定势与综合题解析	536	题型二 求一维随机变量函数的数学期望	592
一、思维定势	536	题型三 求二维随机变量及其函数的数字特征	594
二、综合题解析	537	题型四 有关数字特征的证明题	601
习题一	538	题型五 数字特征在经济中的应用	602
第二章 随机变量及其分布	542	第三节 思维定势与综合题解析	605
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	542	一、思维定势	605
一、概念与公式一览表	542	二、综合题解析	605
二、重要的一维分布	546	习题三	608
三、重要的二维分布	548	第四章 大数定律和中心极限定理	613
第二节 重要题型的解题方法和技巧	549	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	613
题型一 一维随机变量及其分布的概念、性质的命题	549	一、切比雪夫不等式	613
题型二 求一维随机变量的分布律、概率密度或分布函数	552		

二、中心极限定理	613
三、重要公式与结论	614
四、注意	614
第二节 重要题型的解题方法和技巧	614
题型一 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题	614
题型二 有关中心极限定理的命题	616
习题四	619
第五章 数理统计的基本概念	620
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	620
一、几个基本概念	620
二、三个抽样分布—— χ^2 分布、 t 分布与 F 分布	621
三、正态总体下常用统计量的性质	621
四、重要公式与结论	622
五、经验分布函数	622
第二节 重要题型的解题方法和技巧	623
题型一 求统计量的数字特征或取值的概率、样本的容量	623
题型二 求统计量的分布	624
第三节 思维定势	626
习题五	627
第六章 参数估计	629
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	629

一、矩估计与最大似然估计	629
二、估计量的评选标准	630
三、区间估计	631
四、重要公式与结论	633
第二节 重要题型的解题方法和技巧	633
题型一 求矩估计和最大似然估计	633
题型二 评价估计的优劣	638
题型三 区间估计或置信区间的命题	640
习题六	643
第七章 假设检验	646
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	646
一、显著性检验的基本思想	646
二、假设检验的基本步骤	646
三、两类错误	646
四、正态总体未知参数的假设检验	647
五、假设检验与区间估计的联系	648
第二节 重要题型的解题方法和技巧	648
题型一 正态总体的均值和方差的假设检验	648
题型二 有关两类错误的命题	649
习题七	650

第一篇 高等数学

整个高等数学知识点多,学生感觉难学,主要是因为它具有以下特点:

1. 更高抽象性,抽象是全部数学的本质. 因为数学只保留了客观具体事物的数量关系和空间形式,去除了其他属性;高等数学的抽象是经过一系列的抽象化阶段逐步完成的;就好比极限这个概念完整严格的形成,经历过几百年,当年大数学家牛顿和莱布尼茨都不能很好理解,我们刚开始学习时不理解,也不是什么可耻的事情.

2. 精确性. 无论是数学推理还是证明,都要求有严格精密的根基. 学生学习专业课中可能遇到一种情况,社会生产实践活动并没有数学要求的那么严格,工程科学或经济类社会科学的建立沿用了数学的严格精确性,但实际生活中,有些理想化的数学模型是不可能产生的,如冲激函数、不满足傅里叶级数展开的信号(函数).

3. 广泛性. 各种事物的发展变化具有数学形式上的统一性,因此数学就有了广泛的应用性. 比如,研究完定积分,为了符合生产实际,拓展出来反常积分;因为积分区域发生了变化,又延伸出来多重积分和曲线曲面积分. 但是,其本质都是在定积分之上延伸出来的,都满足线性、可加性等等. 数学首先描绘的肯定是自然界中最普遍的一种现象,而线性是普遍存在的,我们在形成一个统一的度量衡世界时,线性是必然要被刻画的.

4. 工程性. 我们在高等数学学习微分方程这一工具时,学习一些常见且简单的微分方程如何去求解,实际上很多微分方程是没法用这种方法的,我们可能还要去寻求数值解,数值解的工具那就是级数. 一元函数不能满足我们实际中变量数量的要求,我们又拓展出来多元函数的相关知识. 一部分专业在学习专业课时还要用到场论的相关知识,所以要专门学习曲线曲面积分以及场论. 信息的表达或者函数的表达要统一,所以又在级数里面学了泰勒级数和傅里叶级数等,这些都是在生产实践中,根据生产力发展需要,不断被抽象,不断被后天赋予的各种数学知识,各种数学美都应运而生.

看完以上,您是不是觉得生无可恋,这么难的东西怎么学. 耐得住寂寞,经得住诱惑,多思考,勤动手,唯有练习才能功夫高.

所有的奋斗,都会有艰苦的环境、捉襟见肘的窘迫和焦虑不安的心境. 那时我们都以为,成功的那一天才会幸福. 但事实上,那些在奋斗之路上,让你内心获得力量的人和事,才是你绵长的生命里,最值得珍惜的幸福.

第一章 函数、极限和连续

第一节 重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有 $f(x) = f(-x)$ (或 $f(x) = -f(-x)$), 则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

- (1) 奇函数的代数和仍为奇函数, 偶函数的代数和仍为偶函数;
- (2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数, 奇数个奇函数之积为奇函数;
- (3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|, \cos x, x^{2n}$ (n 为正整数), $e^{|x|}, e^{x^2}, \dots$.

常见的奇函数: $\sin x, \tan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \dots$.

提 示 判别给定函数的奇偶性, 主要是根据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质.

注 (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点不对称, 则该函数就不是奇函数或偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性:

(1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; (2) $y = \int_0^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为奇函数;

(3) $y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$, 其中 $a > 0, a \neq 1, F(x)$ 为奇函数.

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

(2) 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$,

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{\text{令 } t = -u}{=} \int_0^x f(-u) (-du)$$

$$= -\int_0^x f(-t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 为奇函数})$$

$$= F(x),$$

故 $y = \int_0^x f(t) dt$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$, 则

$$g(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数, 又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$ 为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于任一 $x \in X$, 恒有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

- (1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$;
- (2) 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数;
- (3) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 T_1, T_2 ($T_1 \neq T_2$) 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数, 主要是根据周期函数的定义, 有时也用其运算性质.

【例 1.2】 设对一切实数 x , 有 $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为 _____ 的周期函数.

$$\begin{aligned} \text{【解】} f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \frac{1}{4} - f(x) + f^2(x) - \sqrt{f(x) - f^2(x)}} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\ &= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x) \quad (\text{由题设知 } f(x) \geq \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

即 $f(1+x) = f(x)$, 故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数,

(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 也是以 T 为周期的周期函数;

(2) 如果 $\int_a^T f(x) dx \neq 0$, 则函数 $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证】(1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$\begin{aligned} F(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt + \int_T^{x+T} f(t) dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + \int_0^x f(t) dt = F(x), \end{aligned}$$

所以, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k , 有

$$G(x) = \int_a^x [f(t) - k + k] dt = \int_a^x [f(t) - k] dt + k(x - a).$$

因为 $k(x - a)$ 是线性函数, 所以, 只需证明当 k 取某一值时, $g(x) = \int_a^x [f(t) - k] dt$

以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \int_a^{x+T} [f(t) - k] dt = \int_a^x [f(t) - k] dt + \int_x^{x+T} [f(t) - k] dt \\ &= g(x) + \int_0^T f(t) dt - kT. \end{aligned}$$

取 $k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, 有 $g(x+T) = g(x)$, 即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界; 若不存在这样的 M , 则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数: $ \sin x \leq 1,$	$ \cos x \leq 1,$	$x \in (-\infty, +\infty);$
$ \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$	$ \arccos x \leq \pi,$	$x \in [-1, 1];$
$ \arctan x < \frac{\pi}{2},$	$ \operatorname{arccot} x < \pi,$	$x \in (-\infty, +\infty)$

【提示】判别函数的界, 一般首先将函数取绝对值, 然后用不等式放缩法求解; 或借助导数利用求最大(小)值法处理.

【例 1.4】函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界, 且 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

(D) 有界且 $-2 \leq f(x) \leq 2$. 【 】

【解】 $|f(x)| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$ (因为 $1+x^2 \geq 2|x|$),