# 数学

## —它的内容、方法和意义—

第一卷

[蘇聯] А. Д. 亞歷山大洛夫等著



科学技术出版社

# 数 学

## —它的内容、方法和意义—

### 第一卷

苏联科学院通訊院士 A.Д. 亞歷山大洛夫、
院士 A.H. 闊尔莫果洛夫、院士 M.A. 拉夫倫捷夫 共編
苏联科学院通訊院士 A.Д. 亞歷山大洛夫等著
孙小礼、赵孟养、裘光明、严士健譯
关肇直、秦元勳校



科学技术出版社
1960年·北京

# 目 次

## 第一卷

## 第　二　卷（預告）



## 第　三　卷（預告）

# 原　　序

数学，由于实际的需要在古代便已經产生了，現在發展成为分支众多的龐大系統。数学正如其他科学一样，反映了物質实际的規律，并成为理解自然和征服自然的有力武器。但由于数学本身的高度抽象性，致使它的新的部門比較难为非專業的人所理解，正因为数学的这种抽象特征，所以还在古代便产生了認为数学与物質实际無关的唯心概念。

在編写这本書时，作者們是从这样的共同願望出發，即要向苏联知識界的相当广大的阶層介紹每个数学分支的內容与方法，它的物質基础及發展道路。

估計讀者只要預先具备中等学校数学課程的知識，就能閱讀本書；但三卷中每卷材料的难易程度是不一致的。要想初步認識高等数学的原理，可讀前面几章；但要全部理解以后各章，則需要参考相应的教科書。至于就全書而言，則基本上只有在运用数学分析方法（微分法与积分法）已有某些經驗的讀者才容易理解。对于这类讀者——自然科学与工程專業界人士及数学教师——引导他們到更新的数学分支去的那些章节是特別重要的。

自然，要在一部書里概括数学研究的（即使是它几个主要方向的）丰富內容，是不可能的；因此在选材方面就必須有某些自由。但总的說来，这部書应当能使讀者对近代数学的情况、其發生及其整个發展的前景大致具有一个概念。因此在一定程度上也考虑到那些已知道書中所用的事实材料的基本部分的人。这本書当能帮助我們的某些青年数学工作者消除他們所常有的某些眼界的狹隘性。

本書各章由不同的作者写成，作者的姓名分載于目次中。但作为一部完整的著作来說，則是一个集体劳动的产物。它的总的計划，材料的选擇，各章文稿的內容，都經过集体討論，并在热烈地交換意見的基础上加以改善。苏联很多城市的数学家在数学研究所組織的討論会上对本書的初稿發表了宝貴的意見，这些意

見和建議作者都會加以考慮。

一部分作者也直接參加了其他各章的最后定稿工作：第二章的緒論部分基本上是 Б. Н. 傑龙涅写的；Д. К. 法捷耶夫积極地参加了第四章及第二十章的編写工作。

除了各章的作者外，还有以下同志参加了工作：Л. В. 康托罗維奇写了第十四章第四节，О. А. 拉得任斯卡雅写了第六章第六节，А. Г. 波斯特尼可夫 写了 第十章第五节，О. А. 俄列尼克参加了第五章文稿的編写工作，Ю. В. 普罗霍罗夫参加了第十一章文稿的最后校訂工作。

В. А. 扎尔加列尔写了第一、二、七及十七等章的若干节。文稿的最后校訂是由 В. А. 扎尔加列尔及 В. С. 維金斯基在 Т. В. 洛果兹金娜及 А. П. 列奥諾娃的参与下完成的。

插圖的絕大部分是由 Е. П. 謝金繪制的。

編輯委員会

秦元勳譯

# 第一章 数学概观

对于任何一門科学的正确概念，都不能从有关这門科学的片断知識中形成，尽管这些片断知識足够广泛。还需要对这門科学的整体有正确的观点，需要了解这門科学的本質。本章的目的就是給出关于数学的本質的一般概念。为了这个目的沒有很大必要去詳細考察新的数学理論，因为这門科学的历史和初等数学就已經提供了足够的根据来作出一般的結論。

## §1. 数学的特点

1. 甚至对数学只有很膚淺的知識就能容易地察觉到数学的特征，这些特征：第一是它的抽象性，第二是精确性，或者更好地說是邏輯的严格性以及它的結論的确定性，最后是它的应用的極端广泛。

抽象性在簡單的計算中就已經表現出来。我們运用抽象的数字，却并不打算每次都把它們同具体的对象联系起来。我們在中学学的是抽象的乘法表——总是数字的乘法表，而不是男孩的数目乘上苹果的数目，或者苹果的数目乘上苹果的价錢等等。

同样地在几何中研究的，例如，是直綫，而不是拉紧了的繩子，并且在几何綫的概念中舍棄了所有性質，只留下在一定方向上的伸長。总之，关于几何圖形的概念是舍棄了現实对象的所有性質只留下其空間形式和大小的結果。

全部数学都具有这种抽象的特征。关于整数的概念和关于几何圖形的概念——这只是一些最原始的数学概念。之后才是其他許多达到像复数、函数、积分、微分、汎函、$n$ 維甚至無限維空間等等这样抽象程度的概念。这些概念的抽象化好像是一个高于一

个，一直高到这样的抽象程度，以致看上去已經失去了同生活的一切联系，以致“凡夫俗子”除了感到“莫名其妙”以外什么也不能理解。

事实上情形当然不是这样。虽說 $n$ 維空間的概念的确非常抽象，但它却有完全現实的內容，要了解这內容并不那么困难。在这本書里將要特別强調和解釋上面列举的那些抽象概念的現实意义，并且使讀者相信这些概念全都是旣从它們自身的起源方面也从实际应用方面同生活联系着的。

不过，抽象并不是数学独有的屬性，它是任何一門科学乃至全部人类思維都具有的特性。因此，單是数学概念的抽象性还不能說尽数学的特点。

数学在它的抽象方面的特点还在于：第一，在数学的抽象中首先保留量的关系和空間形式而舍棄了其他一切。第二，数学的抽象是經过一系列阶段而产生的；它們达到的抽象程度大大超过了自然科学中一般的抽象。我們將以数学的基本概念：数与形为例来詳細解釋这兩点。最后——这也是惹人注意的——数学本身几乎完全周旋于抽象概念和它們的相互关系的圈子之中。如果自然科学家为了証明自己的論断总是求助于实驗，那末数学家証明定理只需用推理和計算。

当然，数学家們为了發現自己的定理和方法也常常利用模型，物理的类比，注意許多單个的十分具体的实例等等。所有这些都是理論的現实来源，有助于發現理論的定理，但是每个定理最終地在数学中成立只有当它已从邏輯的推論上严格地被証明了的时候。如果一个几何学家报告一条他所發現的新定理时，只限于在模型上把它表示出来，那么任何一个数学家都不会承認这条定理是被証明了。对于証明一个定理的要求从中学的几何課程中就可以很好地了解到了，这种要求貫穿在全部数学中。我們可以極精确地測量成千个等腰三角形的底角，但这并不能給我們以关于等腰三角形兩底角相等的定理的数学証明。数学要求从几何的基本概念推导出这个結果（現在在几何的严格叙述中基本概念

的性質是精确地表述在公理中）．並且总是这样的：証明一个定理对于数学家来說，就是要从这个定理中引用的那些概念所固有的原始性質出發，用推理的方法导出这个定理．这样看来，不仅数学的概念是抽象的、思辨的，而且数学的方法也是抽象的、思辨的．

数学結論本身的特点是有很大的邏輯严格性。数学推理的进行具有这样的精密性，这种推理对于每个只要懂得它的人来說，都是無可爭辯和确定無疑的．数学証明的这种情密性和确定性从中等学校的課程中就已很好的懂得了．数学眞理本身也是完全不容爭辯的．难怪人們常說："像二乘二等于四那样的証明"．这里，数学关系式 $2\times2=4$ 正是取作不可反駁、無可爭辯的范例．

但是数学的严格性不是絕对的，它在發展着；数学的原則不是一劳永逸地僵立不动了，而是变化着的並且可能成为甚至已經成为科学爭論的对象．

**归根到底，数学的生命力的源泉在于它的概念和結論尽管極为抽象，但却如我們坚信的那样，它們是从現实中来的，並且在其他科学中，在技术中，在全部生活实踐中都有广泛的应用；这一点，对于了解数学是最主要的．**

数学应用得非常广泛也是它的特点之一。

第一，我們經常地、几乎每时每刻地在生产中、在日常生活中、在社会生活中运用着最普通的数学概念和結論，甚至並不意識到这一点．例如，我們計算日子或开支时就应用了算术，而計算住宅的面积时就运用了几何学的結論．当然，这些結論都是十分簡單的，不过，記起这一点是有益的：在古代某个时候，这些結論曾經是当时正在萌芽中的数学的一些很高的成就．

第二，如果沒有数学，全部現代技术都是不可能的．离开或多或少复杂的計算，也許任何一点技术的改进都不能有；在新的技术部門的發展上数学起着十分重要的作用．

最后，几乎所有科学部門都多多少少很自然地利用着数学．"精确科学"——力学、天文学、物理学、以及在很大的程度上也有

化学——通常都是以一些公式来表述自己的定律(这是每个从中学畢業的人都早已懂得的)，并且在發展自己的理論时广泛地运用了数学工具。沒有数学，这些科学的进步簡直是不可能的。因此，力学、天文学和物理学对数学的需要恰好也总是在数学的發展上起了直接的、决定性的作用。

在其他科学中数学起着較小的作用。但是就在这些領域中，它也有重要的应用。当然，在研究像生物現象和社会現象那样复杂的現象时，数学方法本質上不能起像在物理学中所能起的那样的作用。数学的应用总是只有与具体現象的深刻理論相結合才有意义，在这些現象的研究中尤其如此。記住这一点是很重要的，这样才不致迷惑于毫無实在內容的公式遊戏。但是無論如何，数学几乎在所有科学中，从力学到政治經济学，都有着这样那样的应用。

我們来回忆几个在精确科学和技术中特别出色的数学应用的例子。

太陽系最远的行星之一的海王星是在1846年在数学計算的基础上被發現的。天文学家阿达姆斯和勒未累分析了天王星的运动的不規律性，得出結論說：这种不規律性是由其他行星的引力而發生的。勒未累根据力学法則和引力法則計算出这顆行星应該位于何处，他把这結果告訴了观察員，而观察員果然从望远鏡中在勒未累所指出的位置上看到了这顆星：这个發現不仅是力学和天文学特别是哥白尼体系的胜利，而且也是数学計算的胜利。

另一个同样令人信服的例子是电磁波的發現。英国物理学家馬克斯威尔概括了由实驗建立起来的电磁現象規律，把这些規律表述为方程的形式。他用純粹数学的方法从这些方程推导出可能存在着电磁波并且这种电磁波应該以光速傳播着。根据这一点，他提出了光的电磁理論，这理論以后被全面地發展和論証了。但是，除此以外，馬克斯威尔的結論还推动了人們去寻找純电起源的电磁波，例如，由振动放电所發射的电磁波。这样的电磁波果然被赫芝所發現。而不久之后，波波夫就找到了电磁振盪的激

發、發送和接收的办法，并把这些办法帶到許多应用部門，从而为全部無綫电技术奠下基础。在已成为公共財富的無綫电的發現中，純粹数学推論的結果也起了巨大的作用。

科学就是这样从观察，比如观察到由电流而引起磁針偏轉，进入綜合，进入現象的理論，进入規律的提出以及它們的数学表达式。新的結論从这些規律中产生，而最后，理論又体現在实踐中，实踐也給予理論以向前發展的新的强有力的动力。

特别值得注意的是，沒有从自然科学或技术方面来的直接推动，而仅从数学本身內部产生的最抽象的数学体系，甚至也有極有价值的应用。例如，虛数在代数中出現了，在很長一段时間中它們的实在意义却沒有被理解，这一情况可以从它們的名称中看出。但是以后，就在上世紀初对它們給予了几何的解釋(見第四章§2)，从而虛数在数学中完全站住了，并且建立了复变数(就是 $x+y\sqrt{-1}$ 形式的变数)函数的广泛理論。这种所謂“虛”变数的“虛”函数的理論完全不是虛假的，而是解决許多技术問題的很現实的工具。比如，茹可夫斯基关于机翼上升力的基本定理正好就是以这个理論作为工具来証明的。又如，就是这个理論在解决堤坝滲水問題时也显示了它的用处，至于这个問題的意义在巨大的水电站建設时代是很显然的。

非欧几里得几何是另一个同样光輝的例子[1]。它是从欧几里得时代起的几千年来人們想要証明平行公理的企圖中，也就是說，从一个只有純粹数学兴趣的問題中产生的。罗巴切夫斯基創立了这門新的几何学，他自己謹愼地称之为“想像的”，因为还不能指出它的現实意义，虽然他相信是会找到这种現实意义的。他的几何学的許多結論对大多数人来說非但不是“想像的”，而且簡直是不可想像和荒誕的。可是無論如何罗巴切夫斯基的思想为几何学的新發展，以及各种不同的非欧几里得空間的理論的建立打下了基础；后来这些思想成为广义相对論的基础之一，并且四維空

[1] 我們只在这里指出这个例子，不进行解釋，讀者可以在第三卷第十七章找到这个例子的解釋。

間非欧几里得几何的一种形式成为了广义相对論的数学工具。于是，至少看来是不可理解的抽象数学体系成为了一个最重要的物理理論發展的有力工具。同样地，在原子現象的近代理論中，在所謂量子力学中实际上都运用着許多高度抽象的数学概念和理論，比如，無限維空間的概念等等。

不必陷于例子的列举；我們已經足够地强調了数学在日常生活实踐中，在技术中，在科学中都有最广泛的应用，并且只从数学本身內部生長起来的理論在精确科学和許多技术問題中也有其应用。除了数学的抽象性、严格性和它的結論的确定性以外，数学的另一个特征便是如此。

2. 注意了所有这些数学的特点，我們当然还沒有闡明数学的本質，毋宁說只是指出了数学的外表特征。問題在于要解釋这些特点。为此至少应該回答下列問題：

抽象的数学概念反映什么东西？換句話說，数学的現实对象是怎样的？

为什么抽象的数学結論如此令人确信無疑，而原始的概念又如此显然？換句話說，数学方法的基础是什么？

为什么数学尽管如此抽象，却有最广泛的应用，而不是空洞的抽象把戏？換句話說，数学的意义从何而来？

最后，什么样的力量推动数学發展，使它把抽象性和应用的广泛統一起来？換句話說，数学發展过程的內容是什么？

回答了这些問題，我們就可以得到关于数学的对象，关于它的方法的根据，关于它的意义和發展的一般概念，也就是說抓住了它的本質。

唯心主义者和形而上学者們不但在解决这些問題方面陷于混乱，而且簡直是把数学翻轉过来完全加以歪曲。例如，看到数学結論的高度抽象性和明确性，唯心主义者們就想像說，数学是从純粹思惟中产生的。

事实上数学沒有給唯心主义和形而上学以任何根据；恰好相反，客观地考察一下全部数学的关系和發展，它正可以給辯証唯

物主义提供又一个光輝明証，并且每一点都反駁了唯心主义和形而上学。我們只要試圖从最一般的特点上来回答前面所提出的关于数学本質的問題，就会相信这一点的。我們也相信对于这些問題的答案已經包含在由馬克思主义經典作家所建立的关于数学以及关于科学和認識一般的本質的原理中了。为了預先解釋这些問題，考察一下算术和初等几何的基础就够了。我們就要开始討論它們。进一步深入到数学中去，当然可以加深和發展已經得到的結論，但無論如何不会改变这些結論。

## §2. 算　术

1. 关于数的概念(我們現在說的只是正整数)——这个我們如此習慣的概念，形成却很慢。我們根据不久以前还处于原始公社制度各个不同阶段的那些民族进行計算的情况就可以判定这一点。有些民族甚至还沒有大于二或三的那些数的名称，有些民族虽然还可以往下多数几个数，但無論如何还是很快就完結了，他們把較大的数簡單地称作“許多”或“無数地”。由此可見明显地划分开来了的各个数是人們逐漸地积累起来的。

起初，人們沒有数的概念，即使他們能够用自己的方式判断出在实踐中遇到的这一物体集合或那一物体集合的大小。应該注意，数已被他們直接了解为物体集合的不可缺的性質，但是他們还沒有明显地把数分离出来。我們已經这样地習慣于計算，以至不見得能表明它，却可以理解它❶。

在更高的發展阶段上，数已被指明为物体集合的性質，但是还沒有把它当作“抽象的数”，当作同具体物体無关的一般的数而与物体集合分离开来。这可以从有些民族給予数的名称中看出来，例如：“手”就是五，“整个人”就是二十等等。这里五不是抽

❶ 因为，任一物体集合，比如有一群綿羊或者一堆木柴，可以从其全部具体性及复杂性中直接地被感覺出来，而从其中分离出个别性質和关系則是經过一定分析的結果。原始的思維还不能作出这样的分析，而只是整体地看待客体。正如一个不懂音乐的人欣賞音乐作品，分不出其中細致的旋律、曲調等等，但一个音乐家甚至能够很容易地分析复杂的交响乐。

象地被理解，而是簡單地理解为“就是像手上的指头那样多”，而二十被理解为“就是像一个人身上所有的手指和脚指那样多”等等。这和有些民族还沒有，比如“黑色的”、“坚硬的”、“圓的”等等概念的情形完全一样。为了說明一个物体是黑色的，他們把它，例如与老鴉比較，而为了說明有五个东西，他們就把这些东西直接地与手比較。常常是这样，即数有不同的名称，用于不同种类的物体，一些是用来計算人的，另一些是用来計算船只的等等，共达数十种不同的数。这里不是抽象的数，这些“有名数”好像是分别屬于一定种类的物体的。有一些民族根本沒有数的独立名称，例如沒有“三”字，但是他們能够說“三个人”，在“三处地方”等等。

正如我們常常說这个或那个物体是黑色的，但是很少說“黑”本身，因为这个概念比較抽象❶。

物体的数目是物体的某个集合的性質，数本身，換句話說即“抽象的数”，是一种脫离了具体物体集合的像“黑”、“坚硬性”等那样本身已經可以設想的性質。就像黑是具有煤的顏色的各种物体的公有性質一样，数“五”是所有包含像手上的指头那样多个物体的集合的公有性質。于是等数性由簡單的比較建立起来了，取出集合的一个物体，我們就弯一个手指头，就这样地用手指头一个个数出它們。完全不利用数，就用把兩个集合的物体逐一比較的办法一般地即可以断定它們的物体数是否相等。例如，客人入座了，沒有作任何計算，可是如果女主人少摆了一付餐具，她却能很容易地查出来，因为一个客人还沒有餐具。

这样一来，可以提出数的下述定义：**每一个單个的数，像“二”、“五”等等，是物体集合的一种性質。这种性質对于所有那**

---

❶ 关于物体性質的概念，比如物体的顏色或数目，其形成过程，可以分成三个阶段，当然这些阶段的划分也不能太严格。在第一阶段，性質是由物体的直接比較确定的：就是像老鴉这个样子；就是像手上的指头那样多。在第二阶段，出現了形容詞：黑色的石头，同样地出現了数詞：五株树等等。在第三阶段，性質脫离了物体，可以变成为性質“本身”，像“黑”，像抽象的数“五”等等。

**些物体集合之間可以將其物体逐一对比的集合來說是共同的，对于那些不能將其物体逐一对比的集合来說是不同的.**

为了要發現这种共同性質，並且把它明显地分出来，也就是为了建立这个数或那个数的概念並給于它名称像“六”、“十”等等，就必須在不少物体集合之間进行比較．人們世世代代的进行計算，千百万次地重复这同一种运算，于是在实踐中發現了数及数之間的关系．

**2.** 对于数进行計算、运算，也正是对具体物体作实在計算的反映．这也可以从数的名称中明显地看出．例如，有些印第安人把数“二十六”說成“我們在兩个十上面加上六”．显然，这里反映出計算物体的具体方法．尤其明显的是数的加法相当于把兩个或多个物体集合堆放在一起成为一个总合．同样地容易看出減法、乘法和除法的具体意义（特別是乘法，可以看出它的产生無非是由于把兩个或三个或更多的相同的集合加起来）．

在計算过程中，人們不仅發現了和掌握了單个的数之間的关系，比如，二加三等于五，还逐漸地建立起一般規律．在实踐中發現：和数与几个被加数的順序無关，也就是对一定物体計算的結果与这計算按怎样的順序进行無关（后面这种情形具体表現在“序”数与“量”数相一致：第一、第二等等与一、二等等相一致）．因此数不是一个个無关的而是处在相互关联之中．

一个数在其名称及写法上甚至可通过其他数表示出来．例如，“二十”表示“二个十”，按照法文，80——“四-二十”（quatre-vingt），90——“四-二十-十”，又如，罗馬数字 Ⅷ，Ⅸ 表示 $8=5+3, 9=10-1$.

总之，不單是产生了一些單个的数，而且产生了具有一定关系和規律的数的**系統**．

**算术的对象正是具有一定关系和規律的数的系統**[1]．單个的抽象数本身不具有那种包含很多內容的性質，关于它，一般地沒

[1] “算术”（Аргфметика）这个字起源于希腊字“計算的艺术”（“Аригфмое”——数，“Техне”——艺术）．

有多少可說的。如果我們問，比如，数 6 的性質，那末可以指出 $6=5+1, 6=3\cdot 2$ 以及 6 是 30 的因子等等。但是这里数 6 处处与其他数关联着❶，因此，这个数的性質正是在它同其他数的关系之中。尤其明显的是，任一种算术运算都确定数之間的一种联系，或者換个說法，确定数之間的一种关系。

因此，算术研究的是数之間的关系。但是数之間的关系是物体集合之間的現实的量的关系的抽象形态，所以我們可以說：**算术是关于現实的量的关系的科学，但是这种关系是抽象的，也就是說是在純粹形式上加以研究的。**

算术，正如我們所看到的，不是像唯心主义者們企圖揑造的那样从純粹思維中产生出来的，而是反映現实物体的特定的性質；它是由于許多世代的長期实际經驗而产生的。

**3.** 社会实踐愈是寬广和复杂，它就提出愈广泛的任务。不但需要指出物体的量并以关于它們的数的思想来表示，这就已經要求形成数的概念和数的名称，而且需要学習計算所有較大的集合（比如牲畜群、交換物、到指定期限前的天数等等），要把計算的結果确定下来和告訴別人，这就正是要求数的名称以及数字符号更加完善。

看来从文字产生之初就开始引进的数字符号在算术的發展上起了巨大的作用。并且这是引进一般数学符号和公式的第一步。下一步，即引进算术运算的符号和未知数的字母符号（$x$），則是很晚才完成的。

数的概念，像任何抽象概念一样，沒有直接的模型，不能把它表示出来，只能加以思索。但是思想是在語言中形成的，所以沒有名称也就沒有概念。符号也就是名称，只不过是無声的，而是書写出来的，它把思維在能看見的形式上再現出来。例如，如果

❶ 也可以从最一般的說法中理解这一点．任一种脫离了具体基础的抽象——例如数就舍棄了具体的物体集合——“本身”是沒有意义的，它只存在于与其他概念的关系中．这些关系已經包含在某种說明中，也包含在很不完全的定义中．抛开这些关系，它就失去內容和意义，也就是說，根本不存在．抽象数的概念的內容包含在数的系統的規律和关系中．