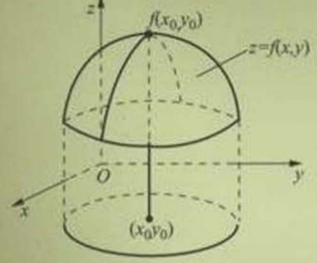
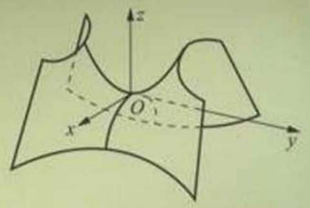
高等数学

学习指导与习题精解

施金福 主编





上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高等数学
学习指导与习题精解

施金福 主编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是编者结合多年的教学实践与职业技术院校学生的实际情况，为高等职业技术院校编写的高等数学的学习辅导书。本书紧扣教材大纲，叙述深入浅出，选材简明典型，突出重点，解题思路清晰，针对性、指导性强，是学好高等数学的好帮手。

本书内容包括：函数，极限的连续，导数与微分，微分中值定理与导数应用，不定积分与定积分，微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微积分，无穷级数，傅里叶变换，拉普拉斯变换，共13章，每章、节分内容提要，例题精析，习题选解等板块。

本书可作高等职业院校师生的参考书，也可作自学者与有关科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题精解 /施金福主编. — 上海：上海交通大学出版社，2014

ISBN 978-7-313-10947-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 施… Ⅲ. 高等数学—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第051480号

高等数学学习指导与习题精解

主　　编：施金福
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：上海交大印务有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×960mm　1/16　　印　　张：16.75
字　　数：230千字
版　　次：2014年6月第1版　　印　　次：2014年6月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-10947-7/O
定　　价：32.00元

前　言

“高等数学”是一门重要的基础课。它不仅是后继课程的基石与工具,而且通过高等数学的学习,可培养人的空间想象,抽象思维、逻辑推理、分析与解决问题的能力。“国富民强要靠数学的发达。”这是拿破仑的一句名言。但现正面临着一个日益突出的矛盾:一方面后继课程对学生的数学能力有更多更高的要求,而另一方面,高等数学的课时不断被压缩。对此,学生普遍要求有一本学习高等数学的指导书。由鉴于此,我们结合多年的教学实践,与学生的实际情况,紧扣荣获“首届嘉兴市优秀教材奖”的教材内容,编写了这本《高等数学学习辅导与习题精解》,旨在帮助学生较快较好地掌握高等数学的基本概念,基本理论,以及基本解题技能与技巧,提高逻辑思维及解答问题的能力。

本书由每章或节的内容提要、例题精析、教材中习题精选与讲解、章后测试题及其解答等四个相互关联,互为充实的板块组成。深信只要读者结合教材细仔阅读指导书,必收获匪浅。

不做适当数量的练习,想学好数学,那是不可能的。著名数学家苏步青教诲我们:“做数学习题是对课本内容的消化、巩固与深化,做数学练习好比对大脑做广播操,越做大脑越灵,反之越笨,大脑生锈。”达·芬奇说:“趁着年青少壮去探求知识吧……这样年老时才不致空虚。”一个梦,二个梦,亿万个梦!让我们共同努力,圆一个伟大的中国梦!

本书可供非数学专业的学生使用,如土木、建筑、机电、计算机、通信、模具、机械、经济贸易、经济管理类等专业的学生。本书是高职、高专院校以及各类成人教育、二级学院,自学考试学生的不可多得的学习辅导书。

本书由上海交通大学嘉兴南洋学院副教授施金福主编。其中第1章至第3章由龙蓉老师编写,第4章至第6章由刘孟老师编写,第7章,第8章由杨兰娟老师编写,第9章至第11章由赵巧珍老师编写,第12章,第13章由施金福老师编写,

并对全书负责统稿。上海交通大学王嘉善教授仔细地审阅了全稿,上海交通大学出版社为本书的出版也付出了大量的劳动,在此深表感激之情。

限于编者的水平以及时间仓促,书中存在的不妥与错误之处,恳请广大读者与同仁不吝指正,不胜感谢!

编　者

2013 年 7 月

目　　录

第1章　函　数

1.1　函数

Ⅰ. 内容提要

1. 本节首先给出了函数的定义。

2. 强调函数的两个基本要素——①定义域 D_f; ②对应法则 f。

3. 所以,当两个函数的定义域与对应法则都相同时,那么它们是相同函数,从而,函数相同与否,跟变量用什么字母表示无关。

4. 定义域的求法是:

(1) 偶次根式的被开方数大于、等于零: $\sqrt[2n]{(\quad)} \to (\quad) \geqslant 0$;

(2) 分式的分母不等于零: $\dfrac{1}{(\quad)} \to (\quad) \neq 0$;

(3) 对数函数的真数大于零,底数大于零,且不等于1;

$$\log_{(\ )}[\quad] \to \begin{cases} [\quad] > 0, \\ (\quad) > 0, (\quad) \neq 1; \end{cases}$$

(4) 反三角函数: $\arcsin(\quad) \to -1 \leqslant (\quad) \leqslant 1$,

$\arccos(\quad) \to -1 \leqslant (\quad) \leqslant 1$;

(5) 分段函数的定义域是各定义区域的交集;

(6) 反函数的定义域是直接函数的值域。

5. 介绍了函数三种常用的表示方法: 解析法(公式法); 图像法; 表格法。

6. 介绍了函数的4个常用特性: 有界性; 单调性; 奇偶性; 周期性。

7. 最后介绍了文科专业常用的,经济学中的函数——需求函数、供给函数、成本函数、收益函数、利润函数,以及工科专业中常用的双曲函数。

8. 函数关系式的建立,这是用数学解决实际问题的首要步骤。

Ⅱ. 例题精析

【例1.1】 求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$;

(2) $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{x-1}}$;

(3) $f(x)=\arccos\dfrac{2-x}{3}$。

解 (1) $9-x^2\geqslant 0, x^2\leqslant 9, -3\leqslant x\leqslant 3$。所以 $D_f=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$;

(2) $\begin{cases}3-x>0\\x-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\x>1\end{cases}$,所以 $D_f=\{x\mid 1<x<3\}$;

(3) $-1\leqslant\dfrac{2-x}{3}\leqslant 1\Rightarrow -3\leqslant 2-x\leqslant 3\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 5$,所以 $D_f=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 5\}$。

【例 1.2】 设 $f(\sin x)=3-\cos 2x$,则 $f(\cos x)=?$

解 因为 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$,所以 $f(\sin x)=3-(1-2\sin^2 x)=2+2\sin^2 x$,从而 $f(x)=2+2x^2$,或 $f(\cos x)=2+2\cos^2 x$。

【例 1.3】 设 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{x}{2x-1}$,求 $f(x)$。

解 令 $\dfrac{1}{x}-1=t$,则 $x=\dfrac{1}{1+t}$,$(t\neq -1)$,

则原式 $=f(t)=\dfrac{\dfrac{1}{1+t}}{2\cdot\dfrac{1}{1+t}-1}=\dfrac{1}{1-t}$,

所以 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$。

【例 1.4】 某公司生产某种产品,已知固定成本为 14 000 元,每增加一件产品,将会增加 8 元成本,且每日最多生产 1 万件,求每日产品成本 C 表示为产量 Q 的函数。

解 根据题设,固定成本 $C_o=14\,000$ 元,可变成本 $C(Q)=8Q$,所以每日产品的总成本为 $C(Q)=C_o+C(Q)=14\,000+8Q$,定义域 $D_C=[0,10\,000]$ 中的整数。

Ⅲ. 习题 1.1 选讲

1. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;

(2) $f(x)=\ln(x^2-1)$;

(3) $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\dfrac{1}{\ln(2x-3)}$;

(4) $f(x)=\ln(2^x-4)+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$;

(5) $f(x)=\begin{cases}2x & (0<x\leqslant 1),\\ x+1 & (1<x\leqslant 4),\end{cases}$ 求 $f(x^2)$ 定义域。

解　(1) 分母$\neq 0\Rightarrow x^2-3x+2\neq 0\Rightarrow (x-1)(x-2)\neq 0\Rightarrow D_f=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$。

(2) 对数的真数$>0\Rightarrow x^2-1>0\Rightarrow x^2>1\Rightarrow D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$。

(3) $\begin{cases}\text{偶次根被开方数}\geqslant 0\\ \text{分母}\neq 0,\text{真数}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ 2x-3>0\\ 2x-3\neq 1\end{cases},\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ x>\dfrac{3}{2}\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow D_f=\left(\dfrac{3}{2},2\right)\cup(2,4]$。

(4) $\begin{cases}\text{真数}>0\\ \text{反三角正弦要求}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x-4>0\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\ -6\leqslant 2x\leqslant 8\end{cases}\Rightarrow D_f=(2,4]$。

(5) 因为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x\leqslant 1,\\ x+1, & 1<x\leqslant 4,\end{cases}$ 由于分段函数的定义域是所有分段定义区间的并集，即 $f(x)$ 的定义域 $D_f=(0,1]\cup(1,4]=(0,4]$，所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $0<x^2\leqslant 4\Rightarrow D_{f(x^2)}=[-2,0)\cup(0,2]$。

2. 下列函数是否相同？说明理由。

(1) $f(x)=1,g(x)=\sin^2x+\cos^2x$;

(2) $f(x)=1,g(x)=\sec^2x-\tan^2x$;

(3) $f(x)=x+1,g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$。

解　(1) 相同，因为定义域与对应法则都相同。

(2) 不同，因为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)=\sec^2x-\tan^2x=\dfrac{1-\sin^2x}{\cos^2x}=\dfrac{\cos^2x}{\cos^2x}$，所以 $D_g=\{x\mid\cos x\neq 0\}=\left\{x\,\middle|\,x\neq K\pi+\dfrac{\pi}{2},K\in\mathbf{Z}\right\}$，所以 $D_f\neq D_g$。

(3) 不同，因为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的定义域 $D_g=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，所以 $D_f\neq D_g$。

3. 求函数值。

(1) 已知$f(x)=x^2+x-1$,求:$f(1)$,$f(0)$,$f(1+\Delta x)$,$\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$;

(2) 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x & (x<0),\\ 2 & (0\leqslant x<1),\\ x-1 & (x>1),\end{cases}$ 求:$f(3)$,$f(2)$,$f(0)$,$f(0.5)$,$f(-0.5)$,$f(-1)$。

解 (1) $f(x)=x^2+x-1$,则

$$f(1)=1^2+1-1=1;$$

$$f(0)=0^2+0-1=-1;$$

$$\begin{aligned}f(1+\Delta x)&=(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)-1\\&=1+2\Delta x+(\Delta x)^2+1+\Delta x-1\\&=(\Delta x)^2+3\Delta x+1;\end{aligned}$$

$$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2+3\Delta x+1-1}{\Delta x}=\Delta x+3。$$

(2) $f(x)=\begin{cases}2^x & (x<0),\\ 2 & (0\leqslant x<1),\\ x-1 & (x>1),\end{cases}$ 则

$$f(3)=(x-1)\big|_{x=3}=2;$$

$$f(2)=(x-1)\big|_{x=2}=1;$$

$$f(0)=2\big|_{x=0}=2;$$

$$f(0.5)=2\big|_{x=0.5}=2;$$

$$f(-0.5)=2^x\big|_{x=-0.5}=2^{-0.5}=\frac{1}{2^{0.5}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f(-1)=2^x\big|_{x=-1}=\frac{1}{2}。$$

4. 确定下列函数的奇偶性:

(1) $y=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}$;

(2) $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$。

解 (1) 因为 $y(-x)=\dfrac{3^{-x}-3^{-(-x)}}{2}=\dfrac{3^{-x}-3^x}{2}=-\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}=-y(x)$,所以为偶函数。

(2) 因为$f(-x)=\lg\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\lg\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$=\lg\frac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lg\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lg 1-\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=-\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x),$$

所以为奇函数。

5. 证明:

(1) 两个偶函数的和、差、积、商是偶函数;

(2) 两个奇函数的和是奇函数;

(3) 两个奇函数的积、商为偶函数;

(4) 奇函数与偶函数的积、商是奇函数。

证　(1) 设 $f(x)$, $g(x)$ 为偶函数,即: $f(-x)=f(x)$; $g(-x)=g(x)$。

则

$$F(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow F(-x)=f(-x)+g(-x)$$

$$=f(x)+g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)=f(x)+g(x)$ 为偶函数。

$$H(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow H(-x)=f(-x)-g(-x)$$

$$=f(x)-g(x)=H(x),$$

所以 $H(x)=f(x)-g(x)$ 为偶函数。

$$G(x)=f(x)\cdot g(x)\Rightarrow G(-x)=f(-x)\cdot g(-x)$$

$$=f(x)\cdot g(x)=G(x),$$

所以 $G(x)=f(x)\cdot g(x)$ 为偶函数。

$$J(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow J(-x)=\frac{f(-x)}{g(-x)}=\frac{f(x)}{g(x)}=J(x),$$

所以 $J(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为偶函数。

(2) 设 $f(x)$, $g(x)$ 为奇函数,即: $f(-x)=-f(x)$; $g(-x)=-g(x)$,则

$$F(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow F(-x)=f(-x)+g(-x)$$

$$=-f(x)+(-g(x))=-(f(x)+g(x))=-F(x),$$

所以 $F(x)=f(x)+g(x)$ 为奇函数。

(3),(4) 的证明方法与(1),(2) 的证明方法相似(略)。

10. 证明 $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$ 为有界函数。

证　因为分母 $x^2+3\geqslant 0+3=3>0$ 对一切 x 都成立,所以分母总不等零,即 $D_f=(-\infty,+\infty)$。