

CAMBRIDGE

现代数字全息导论 (MATLAB版)

Introduction to Modern Digital Holography: With MATLAB

[美] 潘定中 (Ting-Chung Poon) 著
刘荣平 (Jung-Ping Liu)
• 闫兴鹏 严志强 译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



现代数字全息导论

(MATLAB 版)

潘定中 (Ting-Chung Poon)
[美] 刘荣平 (Jung-Ping Liu)
闫兴鹏 严志强

著

译

常州大学图书馆
藏书章

机械工业出版社

数字全息术是全息术的一个重要分支,与早期全息术相比,其采用 CCD 记录相干条纹,避免了复杂的化学处理,且能实现实时记录,在三维成像、精密测量等领域具有重要应用。随着电子技术和计算机技术的发展,数字全息术越来越引起人们的研究兴趣。本书以标量衍射为基础,深入浅出地介绍了数字全息术的相关理论与应用,并给出了许多实例的 MATLAB 代码,这对读者快速掌握数字全息相关技术的基本理论和实现方法大有裨益。本书可作为光电专业的高年级本科生和相关专业的研究生教材,也可供相关领域的研究人员或工程师参考。

This is a Simplified-Chinese translation of the following title published by Cambridge University Press:

Introduction to modern digital holography: with MATLAB/By Ting-Chung Poon and Jung-Ping Liu/
ISBN: 9781107016705

Copyright © T.-C. Poon & J.-P. Liu 2014

This Simplified-Chinese translation for the People's Republic of China (excluding Hong Kong, Macau and Taiwan) is published by arrangement with the Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom.

© Cambridge University Press and China Machine Press 2018

This Simplified-Chinese translation is authorized for sale in the People's Republic of China (excluding Hong Kong, Macau and Taiwan) only. Unauthorised export of this translation is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of Cambridge University Press and China Machine Press.

本书由 Cambridge University Press 授权机械工业出版社在中国境内(不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区)出版与发行。未经许可之出口,视为违反著作权法,将受法律之制裁。

北京市版权局著作权合同登记 图字:01-2017-0295 号。

图书在版编目(CIP)数据

现代数字全息导论: MATLAB 版/(美)潘定中,(美)刘荣平著;
闫兴鹏,严志强译. —北京:机械工业出版社,2017.8

书名原文: Introduction to Modern Digital Holography: With MATLAB
ISBN 978-7-111-58616-6

I. ①现… II. ①潘… ②刘… ③闫… ④严… III. ①Matlab 软件-应用-全息图-高等学校-教材 IV. ①TB877

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 295838 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:吉玲 责任编辑:吉玲 张利萍 于苏华

责任校对:郑婕 封面设计:张静

责任印制:常天培

唐山三艺印务有限公司印刷

2018 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 10.5 印张 · 250 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-58616-6

定价:49.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线:010-88361066

读者购书热线:010-68326294

010-88379203

网络服务

机工官网:www.cmpbook.com

机工官博:weibo.com/cmp1952

金书网:www.golden-book.com

教育服务网:www.cmpedu.com

封面防伪标均为盗版

译者的话

随着人类进入信息时代，人们对真实、自然的显示需求愈加强烈，显示技术的发展也由2D趋向3D。在众多的3D显示技术当中，全息术能完全记录和再现物光的振幅和相位，被认为是终极的显示技术。数字全息术是全息术的一个重要分支，与早期全息术相比，其采用CCD记录相干条纹，避免了对记录介质进行的复杂的化学处理操作，且能方便地实现数据的复制、处理、传输，在三维成像领域具有重要应用。数字全息术可用数值计算的方法进行再现，实时的3D再现需要较强的计算能力。随着电子技术和计算机技术的发展，大幅面、高带宽的CCD成为可能，同时伴随着计算能力的增强，数字全息的实时记录与再现得以实现，因此数字全息术越来越吸引人们的研究兴趣，数字全息的应用也从成像、显示扩展到精密测量、医学诊断等领域。

本书详细介绍了数字全息术的相关理论与应用。对于有意从事数字全息领域研究工作的读者来说，本书是一本难得的快速入门读物。本书首先介绍了标量衍射理论，以此为基础，介绍了传统数字全息术的理论与方法；同时，本书使用大量的篇幅介绍了现代数字全息术的一些新技术，如相移全息术、低相干全息术、衍射断层全息术、光学扫描全息术、数字全息显微术和计算机生成全息术等。通过对本书的学习，读者能快速了解数字全息领域的新理论及新方法。

特别注重理论与实践的结合，是本书最重要的特点之一。本书所给出的实例均附有相应的MATLAB代码，可以直接运行，也可以修改参数观察运行结果，这些将使读者能够更好地理解相关理论。

本书的第1~4章由闫兴鹏翻译，第5~7章由严志强翻译，并由闫兴鹏及苏健完成校正工作，闫兴鹏完成全文定稿。

感谢 Ting-Chung Poon (潘定中) 教授和 Jung-Ping Liu (刘荣平) 教授对于本书中文版出版给予的大力支持。感谢机械工业出版社吉玲编辑在本书翻译过程中给予的帮助与合作。由于译校者水平有限，不妥和疏误之处，欢迎广大读者批评指正。

译者

前 言

本书对现代数字全息技术及相关实例做了通俗易懂的介绍,通过这些内容的学习,读者可快速掌握数字全息技术。

以基本光学原理为基础,本书介绍了数字全息中的关键技术,如相移全息术、低相干全息术、衍射断层全息术和光学扫描全息术等技术;讨论了数字全息的相关实际应用实例,并介绍了用以理解其工作原理的相关必要理论;同时还在相关章节介绍了生成计算机全息图的一些先进技术。本书中包含了大量的 MATLAB 代码,并可从网上下载,这些代码用来解释一些理论分析和实际应用,如混叠、补零及采样。

本书每章末尾都附有习题,同时还提供在线的习题解答手册,这对光学图像处理及数字全息领域的学生、研究者、工程人员来说,是一种不可或缺的资源。

Ting-Chung Poon (潘定中),美国弗吉尼亚理工大学电子与计算机工程教授,中国科学院上海光学精密机械研究所客座教授,美国光学学会(OSA)会士,国际光学工程学会(SPIE)会士。

Jung-Ping Liu (刘荣平),中国台湾逢甲大学光电学系教授。

目 录

译者的话

前言

第1章 波动光学	1
1.1 麦克斯韦方程与波动方程	1
1.2 平面波和球面波	2
1.3 标量衍射理论	3
1.3.1 菲涅尔衍射	7
1.3.2 夫琅和费衍射	8
1.4 用作光学傅里叶变换器的理想薄透镜	10
1.5 光学图像处理	11
习题	20
参考文献	21
第2章 全息基础	22
2.1 摄影术与全息术	22
2.2 将全息图看作菲涅尔波带片的集合	22
2.3 三维全息成像	26
2.3.1 全息放大率	30
2.3.2 平移畸变	30
2.3.3 色散畸变	31
2.4 时间和空间相干性	33
2.4.1 时间相干性	33
2.4.2 相干时间和相干长度	35
2.4.3 广义时间相干性的一些讨论	36
2.4.4 傅里叶变换光谱学	37
2.4.5 空间相干性	39
2.4.6 广义空间相干性的一些讨论	41
习题	43
参考文献	44

第3章 全息图的类型	45
3.1 伽博全息图 and 同轴全息	45
3.2 离轴全息	46
3.3 像全息图	48
3.4 菲涅尔全息图 and 傅里叶全息图	51
3.4.1 菲涅尔全息图及傅里叶全息图	51
3.4.2 无透镜傅里叶全息图	54
3.5 彩虹全息图	55
习题	59
参考文献	60
第4章 传统数字全息	61
4.1 采样信号和离散傅里叶变换	62
4.2 图像传感器的记录和局限	69
4.2.1 成像器件尺寸	70
4.2.2 像素间距	70
4.2.3 调制传递函数	71
4.3 标量衍射的数字计算	72
4.3.1 角谱法 (ASM)	72
4.3.2 角谱法的有效性	74
4.3.3 菲涅尔衍射法	76
4.3.4 菲涅尔衍射法的有效性	77
4.3.5 反向传播	79
4.4 数字全息图的光学记录	80
4.4.1 记录方式	80
4.4.2 孪生像和零级光的消除	82
4.5 数字全息记录及重构的仿真	83
习题	88
参考文献	89
第5章 数字全息术: 一些特殊技术	90
5.1 相移数字全息术	90
5.1.1 四步相移全息术	91
5.1.2 三步相移全息术	91
5.1.3 两步相移全息术	91
5.1.4 相位步长与相位误差	93
5.1.5 并行相移全息术	94
5.2 低相干数字全息术	95
5.3 衍射断层全息术	101
5.4 光学扫描全息术	104

5.4.1	基本原理	104
5.4.2	全息图的构造与重构	106
5.4.3	对光学扫描全息术的直观理解	109
	习题	110
	参考文献	111
第6章	数字全息的应用	114
6.1	全息显微术	114
6.1.1	基于显微镜的数字全息显微术	114
6.1.2	基于傅里叶的数字全息显微术	116
6.1.3	基于球面参考光的数字全息显微术	117
6.2	全息术中的断层术	118
6.3	相位提取	123
6.4	光学轮廓测量及形变测量	126
6.4.1	双波长轮廓测量	127
6.4.2	双照明轮廓测量	130
6.4.3	形变测量	131
	习题	131
	参考文献	131
第7章	计算机生成全息术	135
7.1	迂回相位全息图	135
7.2	开诺全息图	139
7.3	迭代变换算法	141
7.4	现代快速计算方法及全息信息处理	144
7.4.1	现代快速计算方法	144
7.4.2	全息信息处理	147
7.5	利用空间光调制器的三维全息显示	149
7.5.1	分辨率	149
7.5.2	二元掩模可编程全息图	150
7.5.3	实时显示	153
7.5.4	缺少能够显示复函数的空间光调制器	154
	习题	157
	参考文献	158

第 1 章

波动光学

1.1 麦克斯韦方程与波动方程

在波动光学中，一般将光看成一种波动。波动光学主要考虑光的波动效应，如干涉和衍射。波动光学的基本出发点就是麦克斯韦方程，即

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

方程中含有四个称为电磁场的矢量：电场强度 \mathbf{E} (V/m)、电通密度（或称电位移） \mathbf{D} (C/m²)、磁场强度 \mathbf{H} (A/m) 和磁通密度（或称磁感应强度） \mathbf{B} (Wb/m²)。矢量 \mathbf{J}_c 和标量 ρ_v 分别为电流密度 (A/m²) 和电荷密度 (C/m³)，它们是产生电磁场的源。为了完全确定这四个电磁场矢量，还需要如下的本构关系（或称物质方程）：

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.6)$$

式中， ε 和 μ 分别是介质中的介电常数 (F/m) 和磁导率 (H/m)。在线性均匀的各向同性介质中，例如真空中， ε 和 μ 均为标量常数。利用式 (1.1) ~ 式 (1.6)，可推导出自由空间中 \mathbf{E} 或 \mathbf{B} 的波动方程。如对式 (1.3) 两端取旋度，则可推导得到用 \mathbf{E} 描述的波动方程，即

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho_v \quad (1.7)$$

式中， $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ 为笛卡儿坐标系下的拉普拉斯算子。对于无源介质，有 $\mathbf{J}_c = 0$ 和 $\rho_v = 0$ ，式 (1.7) 退化为齐次波动方程，即

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.8)$$

式 (1.8) 利用了介质中的电磁波速度关系式 $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ 。式 (1.8) 等价于三个标量方程，其中每个方程均为关于 \mathbf{E} 的一个分量的方程。令

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z \quad (1.9)$$

式中, \mathbf{a}_x 、 \mathbf{a}_y 和 \mathbf{a}_z 分别为 x 、 y 和 z 方向的单位矢量。于是式 (1.8) 可写为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(E_x\mathbf{a}_x + E_y\mathbf{a}_y + E_z\mathbf{a}_z) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(E_x\mathbf{a}_x + E_y\mathbf{a}_y + E_z\mathbf{a}_z) \quad (1.10)$$

对比式 (1.10) 等号两端有关 \mathbf{a}_x 分量的项, 有

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

类似地, 比较式 (1.10) 两端有关 \mathbf{a}_y 和 \mathbf{a}_z 分量的项, 可以推导得到同样类型的关于 E_y 和 E_z 分量的波动方程。关于电场三个分量的方程可以写成如下的紧凑形式:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.11a)$$

或

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.11b)$$

式中, ψ 代表电场 \mathbf{E} 的任一分量 E_x 、 E_y 或 E_z 。式 (1.11) 称为三维标量波动方程。下一节中将给出其最简单的几个解。

1.2 平面波和球面波

本节将给出并验证三维标量波动方程即式 (1.11) 的几个最简单的解, 称为平面波解和球面波解。对于角频率 (rad/s) 为 ω_0 的简谐振荡波, 在笛卡尔坐标系中其平面波解为

$$\psi(x, y, z, t) = A \exp[j(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R})] \quad (1.12)$$

式中, $j = \sqrt{-1}$; $\mathbf{k}_0 = k_{0x}\mathbf{a}_x + k_{0y}\mathbf{a}_y + k_{0z}\mathbf{a}_z$ 为传播矢量 (波矢); $\mathbf{R} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ 为位置矢量; \mathbf{k}_0 的幅值 $|\mathbf{k}_0| = k_0 = \sqrt{k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2} = \omega_0/v$ 称为波数。如果介质为自由空间, 则 $v = c$ (c 为自由空间中的光速), k_0 变为自由空间中的波数。式 (1.12) 表示一个振幅为 A 、沿着 \mathbf{k}_0 方向传播的平面波, 如图 1.1 所示。

若平面波沿着 z 方向正向传播, 式 (1.12) 变为

$$\psi(z, t) = A \exp[j(\omega_0 t - k_0 z)] \quad (1.13)$$

其为由下式给出的一维标量波动方程的一个解:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.14)$$

式 (1.13) 是对平面波的一种复数表示。由于电磁场是时间和空间的实函数, 因此可取 ψ 的实部, 给出平面波的实数表示:

$$\text{Re}\{\psi(z, t)\} = A \cos(\omega_0 t - k_0 z) \quad (1.15)$$

式 (1.11) 的另一种重要的解是球面波解。球面波解是一种具有球对称性的解, 对如图 1.2 所示的球坐标系, 该解不是球坐标下角度 ϕ 或 θ 的函数。球坐标系下的拉普拉斯算符 ∇^2 可表示为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

在球对称性下, 式 (1.11a) 可进一步写为

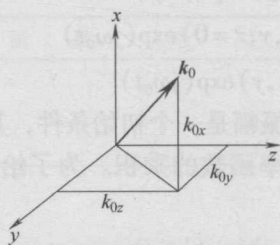


图 1.1 沿 k_0 方向传播的平面波

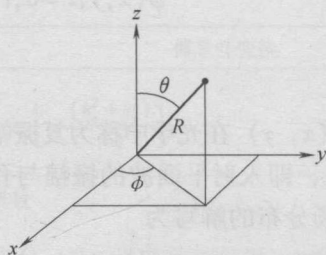


图 1.2 球坐标系

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

由于

$$R \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = \frac{\partial^2 (R\psi)}{\partial R^2}$$

式 (1.16) 可重写为

$$\frac{\partial^2 (R\psi)}{\partial R^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (R\psi)}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

将式 (1.17) 与由式 (1.13) 给出的解式 (1.14) 比较, 可构造出式 (1.17) 的一个简单解如下:

$$R\psi(R, t) = A \exp[j(\omega_0 t - k_0 R)]$$

或

$$\psi(R, t) = \frac{A}{R} \exp[j(\omega_0 t - k_0 R)] \quad (1.18)$$

式 (1.18) 是一个幅值为 A 的球面波, 其为式 (1.16) 的一个解。总而言之, 平面波和球面波是三维标量波动方程的最简单的解之一。

1.3 标量衍射理论

当平面波入射到一个孔径或者衍射屏, 例如入射到一个具有一些可让光透过的开口的不透明屏时, 需要给出光离开孔径后的场分布或经过衍射屏后的衍射场。为处理衍射问题, 需要找到在一些初始条件下的标量波动方程的解。假设孔径可以由具有一定振幅透过率的透射函数 $t(x, y)$ 来描述, 且置于平面 $z=0$ 处, 如图 1.3 所示。

振幅为 A 的平面波入射到孔径上, 对 $z=0$, 由式 (1.13) 可知平面波刚到达孔径前时可表示为 $A \exp(j\omega_0 t)$ 。而刚离开孔径处的场分布为 $\psi(x, y, z=0, t) = A t(x, y) \exp(j\omega_0 t)$ 。一般来说, $t(x, y)$ 为一复函数, 其改变入射到孔径上的波的场分布, 且其厚度可认为无限小。为进一步对 $\psi(x, y, z=0, t)$ 做数学处理, 有

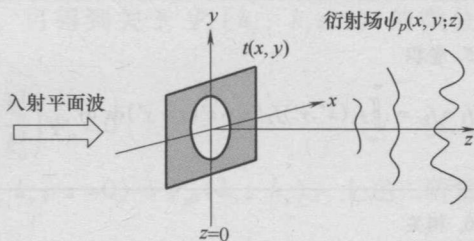


图 1.3 衍射结构示意图
($t(x, y)$ 为衍射屏透过率)

$$\begin{aligned}\psi(x, y, z=0, t) &= At(x, y) \exp(j\omega_0 t) \\ &= \psi_p(x, y; z=0) \exp(j\omega_0 t) \\ &= \psi_{p0}(x, y) \exp(j\omega_0 t)\end{aligned}\tag{1.19}$$

式中, 参量 $\psi_{p0}(x, y)$ 在光学中称为复振幅。该复振幅是一个初始条件, 其由 $\psi_{p0}(x, y) = At(x, y)$ 来定义, 即入射平面波的振幅与孔径透过率函数的乘积。为了给出距离孔径 z 处的场分布, 可将场分布的解写为

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_p(x, y; z) \exp(j\omega_0 t)\tag{1.20}$$

式中, $\psi_p(x, y; z)$ 未知, 可通过初始条件 $\psi_{p0}(x, y)$ 给出。为求得 $\psi_p(x, y; z)$, 将式 (1.20) 代入三维标量波动方程 (1.11a), 便可得到 $\psi_p(x, y; z)$ 的亥姆霍兹方程, 即

$$\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial z^2} + k_0^2 \psi_p = 0\tag{1.21}$$

为求得上述方程的解, 可采用傅里叶变换技术。空间信号 $f(x, y)$ 的二维傅里叶变换定义为

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(jk_x x + jk_y y) dx dy\tag{1.22a}$$

傅里叶反变换为

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\} = f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) \exp(-jk_x x - jk_y y) dk_x dk_y\tag{1.22b}$$

式中, k_x 和 k_y 称为空间弧度频率 (角频率), 因为它们的单位是单位长度上的弧度。函数 $f(x, y)$ 和 $F(k_x, k_y)$ 组成一个傅里叶变换对。表 1.1 给出了一些最常用的傅里叶变换对。

表 1.1 傅里叶变换对

函 数	傅里叶变换
1. $f(x, y)$	$F(k_x, k_y)$
2. 平移 $f(x-x_0, y-y_0)$	$F(k_x, k_y) \exp[j(k_x x_0 + k_y y_0)]$
3. 缩放 $f(ax, by)$	$\frac{1}{ ab } F\left(\frac{k_x}{a}, \frac{k_y}{b}\right)$
4. 微分 $\partial f(x, y) / \partial x$	$-jk_x F(k_x, k_y)$
5. 卷积 $f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x', y') f_2(x-x', y-y') dx' dy'$	频谱乘积 $F_1(k_x, k_y) F_2(k_x, k_y)$, 其中 $\mathcal{F}\{f_1(x, y)\} = F_1(k_x, k_y)$ $\mathcal{F}\{f_2(x, y)\} = F_2(k_x, k_y)$
6. 相关 $f_1 \otimes f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x', y') f_2(x+x', y+y') dx' dy'$	$F_1^*(k_x, k_y) F_2(k_x, k_y)$

(续)

函 数	傅里叶变换
7. 高斯函数 $\exp[-\alpha(x^2 + y^2)]$	$\frac{\pi}{\alpha} \exp\left[-\frac{(k_x^2 + k_y^2)}{4\alpha}\right]$
8. 单位常量 1	δ 函数 $4\pi^2 \delta(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \times \exp(\pm jk_x x \pm jk_y y) dx dy$
9. δ 函数 $\delta(x, y)$	单位常量 1
10. 三角函数 $\Lambda\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \Lambda\left(\frac{x}{a}\right)\Lambda\left(\frac{y}{b}\right)$ 其中 $\Lambda\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \left \frac{x}{a}\right & \text{当 } \left \frac{x}{a}\right \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$	$a \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_x a}{2\pi}\right) b \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_y b}{2\pi}\right)$
11. 矩形函数 $\operatorname{rect}(x, y) = \operatorname{rect}(x)\operatorname{rect}(y)$ 其中 $\operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$	sinc 函数 $\operatorname{sinc}\left(\frac{k_x}{2\pi}, \frac{k_y}{2\pi}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x}{2\pi}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{k_y}{2\pi}\right)$ 其中 $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$
12. 线性相位(平面波) $\exp[-j(ax + by)]$	$4\pi^2 \delta(k_x - a, k_y - b)$
13. 二次相位(复菲涅尔波带片, CFZP) $\exp[-ja(x^2 + y^2)]$	二次相位(复菲涅尔波带片, CFZP) $\frac{-j\pi}{a} \exp\left[\frac{j}{4a}(k_x^2 + k_y^2)\right]$

对式 (1.21) 做二维傅里叶变换, 并利用表 1.1 中序号为 4 的傅里叶变换对, 可得到

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2}\right) &= (-jk_x)^2 \Psi_p(k_x, k_y; z) \\ \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial y^2}\right) &= (-jk_y)^2 \Psi_p(k_x, k_y; z) \end{aligned} \quad (1.23)$$

式中, $\mathcal{F}\{\psi_p(x, y; z)\} = \Psi_p(k_x, k_y; z)$ 。于是, 可得到关于 $\Psi_p(k_x, k_y; z)$ 的微分方程, 即

$$\frac{d^2 \Psi_p}{dz^2} + k_0^2 \left(1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}\right) \Psi_p = 0 \quad (1.24)$$

代入已知的初始条件 $\mathcal{F}\{\psi_p(x, y; z=0)\} = \Psi_p(k_x, k_y; z=0) = \Psi_{p0}(k_x, k_y)$, 上述二阶常微分方程的解可直接给出

$$\Psi_p(k_x, k_y; z) = \Psi_{p0}(k_x, k_y) \exp\left[-jk_0 \sqrt{1 - k_x^2/k_0^2 - k_y^2/k_0^2} z\right] \quad (1.25)$$

因为其与下述微分方程具有类似形式:

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \alpha^2 y(z) = 0$$

且上述方程的解由下式给出:

$$y(z) = y(0) \exp(-j\alpha z)$$

由式 (1.25) 可将波传播 z 距离后的空间频率传递函数定义为^[1]

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(k_x, k_y; z) &= \Psi_p(k_x, k_y; z) / \Psi_{p0}(k_x, k_y) \\ &= \exp(-jk_0 \sqrt{1 - k_x^2/k_0^2 - k_y^2/k_0^2} z) \end{aligned} \quad (1.26)$$

且复振幅 $\psi_p(x, y; z)$ 可由式 (1.25) 的傅里叶反变换给出

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y; z) &= \mathcal{F}^{-1} \{ \Psi_p(k_x, k_y; z) \} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{ \Psi_{p0}(k_x, k_y) \mathcal{H}(k_x, k_y; z) \} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_{p0}(k_x, k_y) \exp(-jk_0 \sqrt{1 - k_x^2/k_0^2 - k_y^2/k_0^2} z) \exp(-jk_x x - jk_y y) dk_x dk_y \end{aligned} \quad (1.27)$$

上式的结果非常重要。当给定 $z=0$ 平面上的场分布, 即 $\psi_p(x, y; z=0) = \psi_{p0}(x, y)$, 便可根据式 (1.27) 计算出平行于 (x, y) 平面且相距距离 z 处的平面上的场分布。由式 (1.22), $\Psi_{p0}(k_x, k_y)$ 为 $\psi_{p0}(x, y)$ 的傅里叶变换, 有

$$\psi_{p0}(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ \Psi_{p0}(k_x, k_y) \} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_{p0}(k_x, k_y) \exp(-jk_x x - jk_y y) dk_x dk_y \quad (1.28)$$

上述积分的物理意义为一个具有传播矢量 k_0 的传播的平面波, 如图 1.1 所示。由式 (1.12) 可得该平面波的复振幅为

$$A \exp(-jk_{0x} x - jk_{0y} y - jk_{0z} z) \quad (1.29)$$

$z=0$ 处的场分布或称之为平面波分量, 为

$$A \exp(-jk_{0x} x - jk_{0y} y)$$

将此式与式 (1.28) 对比, 并注意到场分布 $\psi_{p0}(x, y)$ 的空间角频率变量 k_x 和 k_y 就是式 (1.29) 中平面波的 k_{0x} 和 k_{0y} , $\Psi_{p0}(k_x, k_y)$ 称为场分布 $\psi_{p0}(x, y)$ 的平面波角谱。因此, $\Psi_{p0}(k_x, k_y) \exp(-jk_x x - jk_y y)$ 是一个具有振幅 $\Psi_{p0}(k_x, k_y)$ 的平面波分量, 且将所有传播方向 k_x 和 k_y 上的平面波叠加, 即可得到由式 (1.28) 给出的 $z=0$ 处的场分布 $\psi_{p0}(x, y)$ 。为得到传播 z 距离后的场分布, 可简单令各个平面波分量均传播 z 距离, 亦即增加一个 $\exp(-jk_z z)$ 或 $\exp(-jk_{0z} z)$ 的相移 (z 方向平面波的波数 k_z 即 k_{0z}), 于是有

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y; z) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_{p0}(k_x, k_y) \exp(-jk_x x - jk_y y - jk_z z) dk_x dk_y \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{ \Psi_{p0}(k_x, k_y) \exp(-jk_{0z} z) \} \end{aligned} \quad (1.30)$$

注意到 $k_0 = \sqrt{k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2}$, 进而有 $k_z = k_{0z} = \pm k_0 \sqrt{1 - k_x^2/k_0^2 - k_y^2/k_0^2}$, 将这些关系式代入式 (1.29), 即可得到式 (1.27), 并可给出该公式的物理意义。需要注意的是, 上述关系式中的 $+$ 号表示了沿 z 轴正方向传播的波。同时, 对传播的平面波有 $1 - k_x^2/k_0^2 - k_y^2/k_0^2 \geq 0$ 或者 $k_x^2 + k_y^2 \leq k_0^2$ 。如果 $k_x^2 + k_y^2 \geq k_0^2$, 即为倏逝波。

1.3.1 菲涅尔衍射

当传播波的方向角较小,即在所谓的傍轴近似下,有 $k_x^2 + k_y^2 \ll k_0^2$, 且

$$\sqrt{1 - k_x^2/k_0^2 - k_y^2/k_0^2} \approx 1 - k_x^2/(2k_0^2) - k_y^2/(2k_0^2) \quad (1.31)$$

于是式 (1.27) 变为

$$\psi_p(x, y; z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\rho 0}(k_x, k_y) \exp[-jk_0 z + j(k_x^2 + k_y^2)z/(2k_0)] \exp(-jk_x x - jk_y y) dk_x dk_y$$

上式可写为如下的紧凑形式:

$$\psi_p(x, y; z) = \mathcal{F}^{-1} \{ \Psi_{\rho 0}(k_x, k_y) H(k_x, k_y; z) \} \quad (1.32)$$

其中

$$H(k_x, k_y; z) = \exp(-jk_0 z) \exp[j(k_x^2 + k_y^2)z/(2k_0)] \quad (1.33)$$

$H(k_x, k_y; z)$ 在傅里叶光学中称为空间频率传递函数^[1]。该传递函数是 $\mathcal{H}(k_x, k_y; z)$ 在傍轴近似下的简化形式。 $\mathcal{H}(k_x, k_y; z)$ 的傅里叶反变换即为傅里叶光学中的空间脉冲响应函数 $h(x, y; z)$ ^[1], 即

$$h(x, y; z) = \mathcal{F}^{-1} \{ H(k_x, k_y; z) \} = \exp(-jk_0 z) \frac{jk_0}{2\pi z} \exp\left[\frac{-jk_0}{2z}(x^2 + y^2)\right] \quad (1.34)$$

为得到式 (1.34) 的反变换, 可利用表 1.1 中序号为 13 的傅里叶变换对。利用序号为 5 的变换对, 式 (1.32) 可写为卷积形式, 得

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y; z) &= \psi_{\rho 0}(x, y) * h(x, y; z) \\ &= \exp(-jk_0 z) \frac{jk_0}{2\pi z} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{\rho 0}(x', y') \exp\left\{\frac{-jk_0}{2z}[(x - x')^2 + (y - y')^2]\right\} dx' dy' \end{aligned} \quad (1.35)$$

式 (1.35) 称为菲涅尔衍射公式, 它描述了具有初始复振幅 $\psi_{\rho 0}(x, y)$ 的“光束”在传播过程中的菲涅尔衍射。

若要计算光场在远离孔径一段距离之后的衍射条纹, 式 (1.35) 可进一步化简。为此, 将式 (1.35) 中指数函数中的二次方项展开, 可得

$$\psi_p(x, y; z) = \exp(-jk_0 z) \frac{jk_0}{2\pi z} \exp\left[\frac{-jk_0}{2z}(x^2 + y^2)\right] \times \quad (1.36)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{\rho 0}(x', y') \exp\left[\frac{-jk_0}{2z}(x'^2 + y'^2)\right] \exp\left[\frac{jk_0}{z}(xx' + yy')\right] dx' dy'$$

采用傅里叶变换形式, 菲涅尔衍射公式可写为

$$\psi_p(x, y; z) = \exp(-jk_0 z) \frac{jk_0}{2\pi z} \exp\left[\frac{-jk_0}{2z}(x^2 + y^2)\right] \times \quad (1.37)$$

$$\mathcal{F}\left\{\psi_{\rho 0}(x, y) \exp\left[\frac{-jk_0}{2z}(x^2 + y^2)\right]\right\}_{k_x = \frac{k_0 x}{z}, k_y = \frac{k_0 y}{z}}$$

如式 (1.36) 中的积分所示, 可将 $\psi_{\rho 0}$ 认为是“源”, 于是坐标 x' 和 y' 所确定的平面可称之为源平面。为给出 z 距离处观察平面 (即 x - y 平面) 上的场分布 ψ_p , 需要将源乘以两个如式 (1.36) 积分中所示的指数函数, 然后在源坐标面上积分。积分的结果再乘以因子 \exp

$(-jk_0z)\frac{jk_0}{2\pi z}\exp\left[\frac{-jk_0}{2z}(x^2+y^2)\right]$ 便可最终得到观察平面上由式(1.36)所给出的场分布的结果。

1.3.2 夫琅和费衍射

当下面的近似成立时,式(1.36)中的积分可进一步化简为

$$\frac{k_0}{2}[(x'^2+y'^2)]_{\max} = \frac{\pi}{\lambda_0}[(x'^2+y'^2)]_{\max} \ll z \quad (1.38)$$

其中的 $\pi[(x'^2+y'^2)]_{\max}$ 项近似等于场源的最大面积,若此面积除以波长之后远小于场传播的距离 z ,则积分中的项 $\exp\left[-\frac{jk_0}{2z}(x'^2+y'^2)\right]$ 可认为等于 1,于是式(1.36)变为

$$\begin{aligned} \psi_p(x,y;z) = \exp(-jk_0z)\frac{jk_0}{2\pi z}\exp\left[\frac{-jk_0}{2z}(x^2+y^2)\right] \times \\ \iint_{\infty} \psi_{p0}(x',y')\exp\left[\frac{jk_0}{z}(xx'+yy')\right]dx'dy' \end{aligned} \quad (1.39)$$

式(1.39)为夫琅和费衍射公式,也是菲涅尔衍射的极限形式。式(1.39)因此也称作夫琅和费近似或者远场近似,因此其衍射场要在较远距离处观察。采用傅里叶变换形式,可将夫琅和费衍射公式写为

$$\psi_p(x,y;z) = \exp(-jk_0z)\frac{jk_0}{2\pi z}\exp\left[\frac{-jk_0}{2z}(x^2+y^2)\right] \times \mathcal{F}\{\psi_{p0}(x,y)\}_{k_x=\frac{k_0x}{z},k_y=\frac{k_0y}{z}} \quad (1.40)$$

图 1.4 给出了圆形孔径函数 $\text{circ}(r/r_0)$ 的菲涅尔衍射模拟结果,即 $\psi_{p0}(x,y) = \text{circ}(r/r_0)$,其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$,且函数 $\text{circ}(r/r_0)$ 表示在圆半径 r_0 之内其值等于 1 而在其余处均为 0。模拟中使用的波长为 $0.6\mu\text{m}$ 。由于 $\psi_p(x,y;z)$ 为复函数,因此图中给出的是其绝对值。在物理上,上述情形对应于单位幅值的平面波入射到一个不透明屏,该屏上具有一个半径为 r_0 的圆形开口,从而 $\psi_p(x,y;z) = 1 \times t(x,y)$,其中 $t(x,y) = \text{circ}(r/r_0)$ 。于是即可观察距离屏幕 z 距离远处衍射的强度条纹,其正比于 $|\psi_p(x,y;z)|^2$ 。图 1.5 给出了夫琅和费衍射的模拟结果,衍射距离选为 1m,因此可以满足式(1.38)给出的夫琅和费近似。

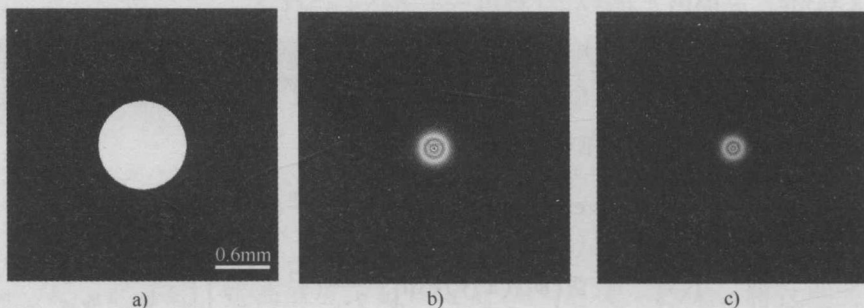


图 1.4 a) $t(x,y)$ 是圆形孔径 $\text{circ}(r/r_0)$ 衍射屏, $r_0 = 0.5\text{mm}$ b) $z = 7\text{cm}$ 处的菲涅尔衍射, $|\psi_p(x,y;z=7\text{cm})|$ c) $z = 9\text{cm}$ 处的菲涅尔衍射, $|\psi_p(x,y;z=9\text{cm})|$ 。具体 MATLAB 代码见表 1.2

表 1.2 圆形孔径菲涅尔衍射的 MATLAB 代码, 见图 1.4

```

close all; clear all;
lambda = 0.6 * 10^-6;           % 波长, 单位: m
delta = 10 * lambda;           % 采样周期, 单位: m
z = 0.07;                       % 传播距离, 单位: m
M = 512;                         % 采样数

c = 1; M;
r = 1; M;
[C, R] = meshgrid(c, r);
THOR = ((R - M/2 - 1).^2 + (C - M/2 - 1).^2) .^ 0.5
RR = THOR * delta;
OB = zeros(M);                  % 物体
for a = 1; M;
    for b = 1; M;
        if RR(a, b) <= 5 * 10^-4; % 孔半径, 单位: m
            OB(a, b) = 1;
        end
    end
end
end

QP = exp(1i * pi / lambda / z * (RR.^2));
FD = fftshift(fft2(fftshift(OB * QP)));
FD = abs(FD);
FD = FD / max(max(FD));
figure; imshow(OB);
title('Circular aperture');
figure; imshow(FD);
title('Modulus of the Fresnel diffraction pattern');

```

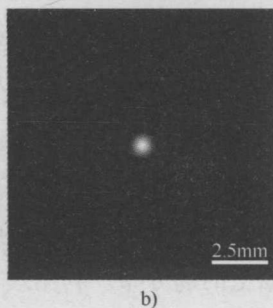
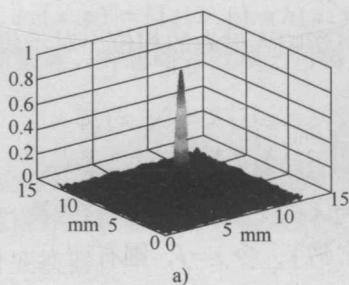


图 1.5 a) $z = 1\text{m}$ 处的夫琅和费衍射条纹的三维分布, $|\psi_p(x, y; z = 1\text{m})|$
b) $|\psi_p(x, y; z = 1\text{m})|$ 的平面灰度图。具体 MATLAB 代码见表 1.3