



多年积累 不断优化

高等数学竞赛题 解析教程 (2020)

The Analysis Course of Contest Questions in
Advanced Mathematics (2020)

◎ 陈 仲 主编



 东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学竞赛题解析教程(2020)

主编：陈 仲

编者：陈 仲 张玉莲 林小围

王夕予 王 培



东南大学出版社

· 南京 ·

内 容 简 介

本书依据全国大学生数学竞赛大纲与江苏省普通高等学校高等数学竞赛大纲,并参照教育部制订的考研数学考试大纲编写而成,内容分为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、空间解析几何、级数、微分方程等八个专题,每个专题含“基本概念与内容提要”“竞赛题与精选题解析”与“练习题”三个部分。其中,竞赛题选自全国大学生数学竞赛试题(非数学专业组),江苏省、北京市、浙江省、广东省等省市大学生数学竞赛试题,南京大学、东南大学、清华大学等高校高等数学竞赛试题,莫斯科大学等国外高校大学生数学竞赛试题;另外,从近几年全国硕士研究生入学考试试题中也挑选了一些“好题”,作为本书的有力补充。这些题目中既含基本题,又含很多构思巧妙、解题技巧性强,具有较高水平和较大难度的创新题,本书逐条解析,深入分析,并总结解题方法与技巧。

本书可供准备高等数学竞赛的老师和学生作为培优教程,也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学和考研的参考书,特别有益于成绩优秀的大学生提高高等数学水平。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛题解析教程. 2020 / 陈仲主编. —南京: 东南大学出版社, 2019. 12
ISBN 978-7-5641-8621-0

I. ①高… II. ①陈… III. ①高等数学—高等学校—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 256754 号

高等数学竞赛题解析教程(2020)

Gaodeng Shuxue Jingsaiti Jiexi Jiaocheng (2020)

主 编	陈 仲
出版发行	东南大学出版社
社 址	南京市四牌楼 2 号(邮编: 210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(025-83793169, 597172750@qq.com)
经 销	全国各地新华书店
印 刷	常州市武进第三印刷有限公司
开 本	700mm×1000mm 1/16
印 张	22.25
字 数	436 千字
版 次	2019 年 12 月第 1 版
印 次	2019 年 12 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5641-8621-0
定 价	46.80 元

本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830。

前 言

高等数学(或称大学数学)是一年级大学生的基础课程,为加强普通高校的数学教学工作,提高教学质量,自2009年起,中国数学会已主办了十届全国大学生数学竞赛(分非数学专业组与数学专业组)。江苏省高等学校数学教学研究会从1991年至今也已主办了十六届大学生高等数学竞赛,全省参赛学校共计130多所,每年考生超过1万人,参赛类别分为本科一级A、本科一级B、本科二级、专科等四类。

高等数学竞赛的宗旨是贯彻教育部关于普通高校要注重素质教育的指示,激励大学生学习高等数学的兴趣,培养大学生对高等数学的热爱,加强高等学校教师与学生对高等数学的重视,以及促进高等学校对创新人才的发现、选拔与培养。它要求学生能够系统地理解高等数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,并具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。高等数学竞赛给广大学生们提供了一个展示自己数学智慧和能力的平台,越来越受到高校师生的认可、重视和欢迎,大家的参赛热情很高。

本书依据全国大学生数学竞赛大纲与江苏省普通高等数学竞赛大纲,并参照教育部制订的考研数学考试大纲编写而成,内容分为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、空间解析几何、级数、微分方程等八个专题,每个专题含“基本概念与内容提要”“竞赛题与精选题解析”与“练习题”三个部分。其中,竞赛题选自全国大学生数学竞赛试题(非数学专业组1—10届预赛与决赛),江苏省(1—16届)、北京市(1—15届)、浙江省(1—10届及2016—2019年)、广东省等省市大学生数学竞赛试题,南京大学、东南大学、清华大学、上海交通大学、西安交通大学等高校高等数学竞赛试题,莫斯科大学等国外高校大学生数学竞赛试题;从近几年全国硕士研究生入学考试试题中也精心挑选了不少“好题”,还有些“好题”在竞赛和考研试卷中都没有出现过,为此本书在每个专题中增加了不少“精选题”,大大丰富了本书的内涵。这些题目中既含基本题,又含很多构思巧妙、解题技巧性强,具有较高水平和较大难度的创新题,本书逐条解析,深入分析,并总结解题方法与技巧。

本书自2012年起陆续推出多个版本,受到广大教师与学生的赞许,获得了许多好评。在这一版中我们对本书2019版又进行了较大修订,增选了73道新题,重写或修改了部分例题的解析,增加了部分练习题,同时删去了94道陈题或相对

简单的题,进一步提高了本书的质量。

本书可供准备高等数学竞赛的老师和学生作为培优教程,也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学和考研的参考书,特别有益于成绩优秀的大学生提高高等数学水平。

在本书编写及历次修订过程中,编者得到了南京大学许绍溥、姜东平、姚天行、丁南庆、周国飞、黄卫华等教授的帮助,得到了江苏省高等学校数学教学研究会王栓宏、陈文彦、刘金林、曹菊生、郭跃华、姚泽清、侯绳照、施庆生、石澄贤、谭飞、卢殿臣等教授的一贯支持,谨此一并表示衷心的感谢。编者还要感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编校,使本书质量大有提高。

书中错误或缺点难免,敬请智者不吝赐教。

陈 仲

2019年10月于南京大学

目 录

专题 1 函数与极限	1
1.1 基本概念与内容提要	1
1.1.1 一元函数基本概念	1
1.1.2 数列的极限	1
1.1.3 函数的极限	1
1.1.4 证明数列或函数极限存在的方法	2
1.1.5 无穷小量	2
1.1.6 无穷大量	3
1.1.7 求数列或函数的极限的方法	3
1.1.8 函数的连续性	3
1.2 竞赛题与精选题解析	4
1.2.1 求函数的表达式(例 1.1—1.3)	4
1.2.2 利用极限的性质与四则运算求极限(例 1.4—1.13)	6
1.2.3 利用夹逼准则与单调有界准则求极限(例 1.14—1.18)	11
1.2.4 利用重要极限与等价无穷小替换求极限(例 1.19—1.26)	13
1.2.5 无穷小比较与无穷大比较(例 1.27—1.28)	16
1.2.6 连续性与间断点(例 1.29—1.31)	16
1.2.7 利用介值定理的证明题(例 1.32—1.36)	17
练习题一	20
专题 2 一元函数微分学	22
2.1 基本概念与内容提要	22
2.1.1 导数的定义	22
2.1.2 左、右导数的定义	22
2.1.3 微分概念	22
2.1.4 基本初等函数的导数公式	23
2.1.5 求导法则	23
2.1.6 高阶导数	23
2.1.7 微分中值定理	24

2.1.8	泰勒公式与马克劳林公式	24
2.1.9	洛必达法则	25
2.1.10	导数在几何上的应用	26
2.2	竞赛题与精选题解析	27
2.2.1	利用导数的定义解题(例 2.1—2.6)	27
2.2.2	利用求导法则解题(例 2.7—2.9)	31
2.2.3	求高阶导数(例 2.10—2.19)	33
2.2.4	与微分中值定理有关的证明题(例 2.20—2.41)	37
2.2.5	马克劳林公式与泰勒公式的应用(例 2.42—2.60)	50
2.2.6	利用洛必达法则求极限(例 2.61—2.69)	62
2.2.7	导数的应用(例 2.70—2.83)	66
2.2.8	不等式的证明(例 2.84—2.94)	73
	练习题二	80
专题 3	一元函数积分学	84
3.1	基本概念与内容提要	84
3.1.1	不定积分基本概念	84
3.1.2	基本积分公式	84
3.1.3	不定积分的计算	85
3.1.4	定积分基本概念	86
3.1.5	定积分中值定理	86
3.1.6	变限的定积分	87
3.1.7	定积分的计算	87
3.1.8	奇偶函数与周期函数定积分的性质	87
3.1.9	定积分在几何与物理上的应用	88
3.1.10	反常积分	89
3.2	竞赛题与精选题解析	91
3.2.1	求不定积分(例 3.1—3.16)	91
3.2.2	利用定积分的定义与性质求极限(例 3.17—3.23)	96
3.2.3	应用积分中值定理解题(例 3.24—3.26)	104
3.2.4	变限的定积分的应用(例 3.27—3.36)	105
3.2.5	定积分的计算(例 3.37—3.56)	111
3.2.6	定积分在几何与物理上的应用(例 3.57—3.67)	122
3.2.7	积分不等式的证明(例 3.68—3.90)	129
3.2.8	积分等式的证明(例 3.91—3.94)	145

3.2.9 反常积分(例 3.95—3.102)	149
练习题三	156
专题 4 多元函数微分学	160
4.1 基本概念与内容提要	160
4.1.1 二元函数的极限与连续性	160
4.1.2 偏导数与全微分	160
4.1.3 多元复合函数与隐函数的偏导数	162
4.1.4 方向导数	163
4.1.5 高阶偏导数	163
4.1.6 二元函数的极值	163
4.1.7 条件极值	164
4.1.8 多元函数的最值	165
4.2 竞赛题与精选题解析	165
4.2.1 求二元函数的极限(例 4.1—4.2)	165
4.2.2 二元函数的连续性、可偏导性与可微性(例 4.3—4.5)	166
4.2.3 求多元复合函数与隐函数的偏导数(例 4.6—4.16)	168
4.2.4 方向导数(例 4.17—4.19)	172
4.2.5 求高阶偏导数(例 4.20—4.27)	174
4.2.6 求二元函数的极值(例 4.28—4.31)	179
4.2.7 求条件极值(例 4.32—4.35)	183
4.2.8 求多元函数在空间区域上的最值(例 4.36—4.38)	186
练习题四	188
专题 5 多元函数积分学	191
5.1 基本概念与内容提要	191
5.1.1 二重积分基本概念	191
5.1.2 二重积分的计算	192
5.1.3 交换二次积分的次序	193
5.1.4 三重积分基本概念	193
5.1.5 三重积分的计算	194
5.1.6 重积分的应用	195
5.1.7 曲线积分基本概念与计算	195
5.1.8 格林公式	198
5.1.9 曲面积分基本概念与计算	198

5.1.10	斯托克斯公式	201
5.1.11	高斯公式	201
5.1.12	反常重积分	202
5.1.13	梯度、散度与旋度	202
5.2	竞赛题与精选题解析	203
5.2.1	二重积分与二次积分的计算(例 5.1—5.14)	203
5.2.2	交换二次积分的次序(例 5.15—5.19).....	211
5.2.3	三重积分的计算(例 5.20—5.25).....	214
5.2.4	与重积分有关的不等式的证明(例 5.26—5.31).....	219
5.2.5	曲线积分的计算(例 5.32—5.35).....	224
5.2.6	应用格林公式解题(例 5.36—5.47).....	226
5.2.7	曲面积分的计算(例 5.48—5.52).....	235
5.2.8	应用斯托克斯公式解题(例 5.53—5.55).....	239
5.2.9	应用高斯公式解题(例 5.56—5.65).....	241
5.2.10	反常重积分的计算(例 5.66—5.68)	249
5.2.11	多元函数积分学的应用题(例 5.69—5.75)	250
	练习题五	256
专题 6	空间解析几何	260
6.1	基本概念与内容提要	260
6.1.1	向量的基本概念与向量的运算	260
6.1.2	空间的平面	261
6.1.3	空间的直线	261
6.1.4	空间的曲面	262
6.1.5	空间的曲线	263
6.2	竞赛题与精选题解析	264
6.2.1	向量的运算(例 6.1—6.4).....	264
6.2.2	空间平面与直线的方程(例 6.5—6.9).....	265
6.2.3	空间曲面的方程与空间曲面的切平面(例 6.10—6.19).....	267
6.2.4	空间曲线的方程与空间曲线的切线(例 6.20—6.25).....	272
	练习题六	277
专题 7	级数	279
7.1	基本概念与内容提要	279
7.1.1	数项级数的主要性质	279

7.1.2	正项级数敛散性判别法	279
7.1.3	任意项级数敛散性判别法	280
7.1.4	幂级数的收敛半径、收敛域与和函数	280
7.1.5	初等函数关于 x 的幂级数展开式	281
7.1.6	傅氏级数	281
7.2	竞赛题与精选题解析	282
7.2.1	正项级数的敛散性及其应用(例 7.1—7.13)	282
7.2.2	任意项级数的敛散性及其应用(例 7.14—7.23)	291
7.2.3	求幂级数的收敛域与和函数(例 7.24—7.35)	299
7.2.4	求数项级数的和(例 7.36—7.42)	309
7.2.5	求初等函数关于 x 的幂级数展开式(例 7.43—7.46)	313
7.2.6	求函数的傅氏级数展开式(例 7.47—7.48)	316
	练习题七	318
专题 8	微分方程	320
8.1	基本概念与内容提要	320
8.1.1	微分方程的基本概念	320
8.1.2	一阶微分方程	320
8.1.3	二阶微分方程	321
8.1.4	微分方程的应用	323
8.2	竞赛题与精选题解析	323
8.2.1	求解一阶微分方程(例 8.1—8.6)	323
8.2.2	求解二阶微分方程(例 8.7—8.16)	326
8.2.3	解微分方程的应用题(例 8.17—8.23)	332
	练习题八	337
	练习题答案与提示	339

专题 1 函数与极限

1.1 基本概念与内容提要

1.1.1 一元函数基本概念

- 1) 利用已知条件求函数的表达式.
- 2) 函数的奇偶性、单调性、有界性与周期性.
- 3) 基本初等函数(常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数)和初等函数.
- 4) 反函数、复合函数、参数式函数、隐函数.
- 5) 分段函数.

1.1.2 数列的极限

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 的定义: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

- 2) 收敛数列的性质

定理 1(唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 则其极限 A 是惟一的.

定理 2(有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 为有界数列.

定理 3(保号性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0 (< 0)$, 则 $\exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$x_n > 0 \quad (< 0)$$

1.1.3 函数的极限

- 1) 六种极限过程下函数极限的定义

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

例如 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的定义: $\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0$, 当 $0 < |x - a| < \sigma$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

定理 1 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(a^-) = A, f(a^+) = A.$

定理 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow f(-\infty) = A, f(+\infty) = A.$

2) 函数极限的性质

定理 3(唯一性) 在某极限过程下,若函数 $f(x)$ 的极限存在,则其极限是唯一的.

定理 4(有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在,则存在 $x = a$ 的去心邻域 $U_{\delta}^{\circ}(a)$,使得 $f(x)$ 在 $U_{\delta}^{\circ}(a)$ 上有界.

定理 5(保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0 (< 0)$,则存在 $x = a$ 的去心邻域 $U_{\delta}^{\circ}(a)$,使得 $x \in U_{\delta}^{\circ}(a)$ 时 $f(x) > 0 (< 0)$.

1.1.4 证明数列或函数极限存在的方法

定理 1(夹逼准则) 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $y_n \leq x_n \leq z_n$,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

定理 2(夹逼准则) 设三个函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $x = a$ 的去心邻域中满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$,则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

注 对于其他的极限过程,类似的结论留给读者自己写出.

定理 3(单调有界准则) 若数列 $\{x_n\}$ 单调递增,并有上界(或单调递减,并有下界),则数列 $\{x_n\}$ 必收敛.

1.1.5 无穷小量

1) 若在某极限过程中($x \rightarrow a, x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 中任一个),某变量或函数 $\alpha(x) \rightarrow 0$,则称 $\alpha(x)$ 为该极限过程下的无穷小量,简称无穷小.在同一极限过程中的有限个无穷小量之和仍为无穷小量;在同一极限过程中的有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量;无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量.例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \left(\text{因 } x \rightarrow 0, \sin \frac{1}{x} \text{ 有界} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \left(\text{因 } \frac{1}{x} \rightarrow 0, \sin x \text{ 有界} \right)$$

定理 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,这里 $x \rightarrow a$ 时 $\alpha(x)$ 为无穷小量.

2) 无穷小的比较

假设在某极限过程中(以 $x \rightarrow a$ 为例), α, β 都是无穷小量.

(1) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$,则称 α 是比 β 高阶的无穷小,记为 $\alpha = o(\beta)$.

(2) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \infty$,则称 α 是比 β 低阶的无穷小.

(3) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow c (c \neq 0, c \in \mathbf{R})$,则称 α 与 β 为同阶无穷小.特别的,当 $c = 1$ 时,称 α 与 β 为等价无穷小,记为 $\alpha \sim \beta (x \rightarrow a)$.

(4) 若 $\frac{\alpha}{x^k} \rightarrow c (c \neq 0, k > 0)$, 则称 α 是 x 的 k 阶无穷小. 此时 $\alpha \sim cx^k$, 称 cx^k 为 α 的无穷小主部.

1.1.6 无穷大量

1) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 下列数列无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln n, \quad n^\alpha (\alpha > 0), \quad n^\beta (\beta > \alpha > 0), \quad a^n (a > 1), \quad n^n$$

2) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列函数无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln x, \quad x^\alpha (\alpha > 0), \quad x^\beta (\beta > \alpha > 0), \quad a^x (a > 1), \quad x^x$$

1.1.7 求数列或函数的极限的方法

- 1) 四则运算法则
- 2) 利用夹逼准则求极限
- 3) 先利用单调有界准则证明数列的极限存在, 再求其极限
- 4) 利用两个重要极限求极限

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1, \quad \lim_{\square \rightarrow 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e$$

例如 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = e$ (这里 $\square = \cos x - 1$)

5) 利用等价无穷小替换法求极限

定理 当 $\square \rightarrow 0$ 时, 有下列无穷小的等价性:

$$\square \sim \sin \square \sim \arcsin \square \sim \tan \square \sim \arctan \square \sim \ln(1 + \square) \sim e^\square - 1$$

$$(1 + \square)^\lambda - 1 \sim \lambda \square \quad (\lambda > 0)$$

$$1 - \cos \square \sim \frac{1}{2} \square^2$$

- 6) 利用洛必达法则求极限(关于洛必达法则见第 2.1 节)
- 7) 利用马克劳林展开式求极限(关于马克劳林展开式见第 2.1 节)
- 8) 利用导数的定义求极限
- 9) 利用定积分的定义求极限

1.1.8 函数的连续性

1) 函数 $f(x)$ 连续的定义: 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, 则称 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 记为 $f \in \mathcal{C}(a)$; 若 $f(x)$ 在某区间 (a, b) 上每一点皆连续, 称 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 记为 $f \in \mathcal{C}(a, b)$; 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $f(x)$ 在 $x = a$ 处右连续(即 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$), 在 $x = b$ 处左连续(即 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$).

$f(b)$), 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 记为 $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

2) 连续函数的四则运算性质

3) 复合函数的极限与连续性

定理 1 若 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$, 函数 $f(x)$ 在 $x = b$ 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)) = f(b)$$

定理 2 若函数 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 函数 $f(x)$ 在 $x = b = \varphi(a)$ 处连续, 则 $f(\varphi(x))$ 在 $x = a$ 处连续, 即有

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a))$$

定理 3 初等函数在其有定义的区间上连续.

4) 间断点的分类

若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续, 则称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的间断点. 间断点分为两类:

(1) 若 $f(a^-)$ 与 $f(a^+)$ 皆存在时, 称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 若 $f(a^-) = f(a^+)$, 称 $x = a$ 为可去型; 若 $f(a^-) \neq f(a^+)$, 称 $x = a$ 为跳跃型.

(2) 若 $f(a^-)$ 与 $f(a^+)$ 中至少有一个不存在时, 称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

5) 闭区间上的连续函数的性质

定理 4(有界定理) 若 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 则 $\exists K > 0$, 使得 $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq K$.

定理 5(最值定理) 若 $f \in \mathcal{C}[a, b]$, 则 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 使得

$$\forall x \in [a, b], f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

定理 6(零点定理) 若 $f \in \mathcal{C}[a, b], f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 并称 $x = \xi$ 为函数 $f(x)$ 的零点.

1.2 竞赛题与精选题解析

1.2.1 求函数的表达式(例 1.1—1.3)

例 1.1(江苏省 2004 年竞赛题) 已知函数 $f(x)$ 是周期为 π 的奇函数, 且当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时 $f(x) = \sin x - \cos x + 2$, 则当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析 因 $f(x)$ 为奇函数, 所以当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) = -(\sin(-x) - \cos(-x) + 2) \\ &= \sin x + \cos x - 2 \end{aligned}$$

又因为 $f(x)$ 是周期为 π 的函数, 所以当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - \pi) = \sin(x - \pi) + \cos(x - \pi) - 2 \\ &= -\sin x - \cos x - 2 \end{aligned}$$

例 1.2 (江苏省 1991 年竞赛题) 函数 $y = \sin x |\sin x|$ (其中 $|x| \leq \frac{\pi}{2}$) 的反函数为_____.

解析 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时 $y = \sin^2 x$, 即 $\sin x = \sqrt{y}$ ($0 \leq y \leq 1$), 所以 $x = \arcsin \sqrt{y}$ ($0 \leq y \leq 1$); 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ 时 $y = -\sin^2 x$ ($-1 \leq y \leq 0$), 所以 $\sin^2 x = -y$, $\sin x = -\sqrt{-y}$, $x = \arcsin(-\sqrt{-y}) = -\arcsin(\sqrt{-y})$ ($-1 \leq y \leq 0$). 于是所求反函数为

$$y = \begin{cases} \arcsin \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1; \\ -\arcsin(\sqrt{-x}), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

注: 若利用公式 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, 类似的分析可得所求反函数为

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} \arccos(1 - 2x), & 0 \leq x \leq 1; \\ -\frac{1}{2} \arccos(1 + 2x), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

例 1.3 (莫斯科经济统计学院 1975 年竞赛题) 求

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$

的表达式, 并作函数 $f(x)$ 的图象.

解析 当 $0 \leq |x| < 1$ 时, $f(x) = (1 + 0 + 0)^0 = 1$;

当 $x = 1$ 时, $f(1) = (2 + 0)^0 = 1$;

当 $x = -1$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1 + (-1)^{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = (2 + 0)^0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1 + (-1)^{2n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

所以 $x = -1$ 时 $f(x)$ 无定义;

当 $1 < x < 2$ 时

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n + 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n} = x$$

当 $x = 2$ 时

$$f(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2 \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt[n]{2 + \frac{1}{2^n}} = 2(2+0)^0 = 2$$

当 $|x| > 2$ 时

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n + 1} = \frac{x^2}{2}$$

当 $-2 < x < -1$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1+x^{2n} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-x) \cdot \sqrt[2n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}} \\ &= (-x)(0+1+0)^0 = -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1+x^{2n+1} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot \sqrt[2n+1]{\frac{1}{x^{2n+1}} + 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}} \\ &= x \cdot (0+1+0)^0 = x \end{aligned}$$

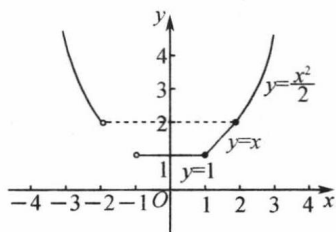
所以 $-2 < x < -1$ 时 $f(x)$ 无定义;

当 $x = -2$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1+(-2)^{2n} + (2)^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt[2n]{\frac{1}{2^{2n}} + 2} = 2 \cdot (0+2)^0 = 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1+(-2)^{2n+1} + 2^{2n+1}} &= 1^0 = 1 \end{aligned}$$

所以 $x = -2$ 时 $f(x)$ 无定义.

函数 $f(x)$ 的图象如右图所示.



1.2.2 利用极限的性质与四则运算求极限(例 1.4—1.13)

例 1.4(江苏省 2008 年竞赛题) 当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + 2|x|}{bx - |x|} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

解析 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2|x|}{bx - |x|} \arctan x = \frac{a+2}{b-1} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

所以 $a+2 = 1-b$; 又因为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 2|x|}{bx - |x|} \arctan x = \frac{a-2}{b+1} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

所以 $a-2 = b+1$.

由上, 解得 $a = 1, b = -2$.

例 1.5 (江苏省 2012 年竞赛题) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\frac{3}{n^3} - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(n+i)^3} \right)$.

解析 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^4 \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right) + n^4 \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+2)^3} \right) + n^4 \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+3)^3} \right) \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4(3n^2 + 3n + 1)}{n^3(n+1)^3} + \frac{n^4(6n^2 + 12n + 8)}{n^3(n+2)^3} + \frac{n^4(9n^2 + 27n + 27)}{n^3(n+3)^3} \right)$
 $= 3 + 6 + 9 = 18$

例 1.6 (江苏省 2012 年竞赛题) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot |1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^{n+1}n|$.

解析 令 $x_n = \frac{1}{n} \cdot |1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^{n+1}n|$, 则

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{1}{2n} \cdot |1 - 2 + 3 - \cdots + (2n-1) - 2n| \\ &= \frac{1}{2n} \cdot |(1+3+\cdots+(2n-1)) - (2+4+\cdots+2n)| \\ &= \frac{1}{2n} \cdot |n^2 - (n^2+n)| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= \frac{1}{2n+1} \cdot |1 - 2 + 3 - \cdots - 2n + (2n+1)| \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot |(1+3+\cdots+(2n+1)) - (2+4+\cdots+2n)| \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot |(n^2+2n+1) - (n^2+n)| = \frac{n+1}{2n+1} \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \frac{1}{2}$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot |1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^{n+1}n| = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$$

例 1.7 (莫斯科电子技术学院 1975 年竞赛题) 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \cdots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} \right)$$

解析 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3-1}{k^3+1}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)((k+1)^2 - (k+1) + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)}{3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n+1)} \cdot \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)^2 - (k+1) + 1}{k^2 - k + 1}$