奥赛物理题选 第三版

AOSAI WULI TIXUAN

舒幼生 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

奥赛物理题选

（第三版）

舒幼生　编著

中国科学技术大学 图书馆藏

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

奥赛物理题选/舒幼生编著. —3 版. —北京： 北京大学出版社， 2017.7
ISBN 978-7-301-28502-2

Ⅰ.①奥… Ⅱ.①舒… Ⅲ. ①中学物理课—高中—习题集 Ⅳ.①G634.75

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 153753 号

书　　名 奥赛物理题选（第三版）
AOSAI WULI TIXUAN (DI-SANBAN)
著作责任者 舒幼生　编著
责任编辑 顾卫宇
标准书号 ISBN 978-7-301-28502-2
出版发行 北京大学出版社
地　　址 北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址 http://www.pup.cn
电子信箱 zpup@pup.cn
新浪微博 @北京大学出版社
电　　话 邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62754271
印 刷 者 北京大学印刷厂
经 销 者 新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　32.5 印张　810 千字
2013 年 6 月第 1 版　2014 年 8 月第 2 版
2017 年 7 月第 3 版　2018 年 8 月第 3 次印刷
定　　价 69.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究
举报电话：010－62752024　电子信箱：fd@pup.pku.edu.cn
图书如有印装质量问题，请与出版部联系，电话：010－62756370

修订说明

多年前开始参与假期物理竞赛辅导班讲座工作。开班前常将课前准备的大多数题目复印成册，发给每一位学生待课后练习。为提高学生考场应试能力，课前准备一份试题，课间组织一次听课学生间的联谊赛，组织阅卷、评奖后，举行颁奖仪式，活跃讲座氛围。这两部分内容，分别构成“假期辅导班题选”和“假期辅导班联谊赛试题”，合成一本书《奥赛物理题选》，由北京大学出版社于2013年6月出版。

早先，经教育部首肯，各大学渐渐兴起自主招生热潮。此举对大学选招具有学科特长的本科生利多弊少，已被教学界多数舆论所认可。自然界的物种会进化，自主招生也会有进步。进步中派生出了例如物理类的夏令营、科学营、金秋营、冬令营等品牌性的各类选优活动。活动中也有考试，试题内容、结构与难度属于奥赛物理试题范畴。

近年，北大曾承担国家物理奥赛集训队的培训，以及选拔国际赛、亚洲赛代表队的工作。其中选拔考试的试题内容、结构与难度更应属于奥赛物理试题范畴。

现将原《奥赛物理题选》（第二版）内，试题性的“假期辅导班联谊赛试题”从中取出。余下原练习题性的“假期辅导班题选”，单一构成《奥赛物理题选》（第三版）书。

再将2009～2016年的全部联谊赛试题，组合成新的“假期辅导班联谊赛试题”。又从物理科学营、金秋营、集训队选拔考试中，适当地选出若干试题，组合成“择优选拔考试试题选”。将这两部分合成新书《奥赛物理试题选》，交由北京大学出版社出版。

舒幼生

2017年5月

目　　录

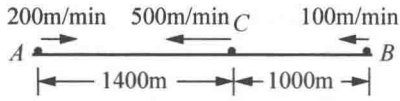
力学篇 …… 1
运动学 …… 1
牛顿定律　动量定理 …… 27
能量定理 …… 50
角动量定理　天体运动 …… 86
质心　刚体 …… 114
振动　波动 …… 154
热学篇 …… 196
分子动理论 …… 196
热力学第一定律　热力学第二定律 …… 215
热传导　表面现象 …… 225
电学篇 …… 234
静电场 …… 234
磁场 …… 276
电磁感应 …… 312
电路 …… 337
光学篇 …… 370
几何光学 …… 370
波动光学 …… 410
近代物理篇 …… 418
量子 …… 418
相对论 …… 451

需要全本请访问 www.ertongbook.com

力 学 篇

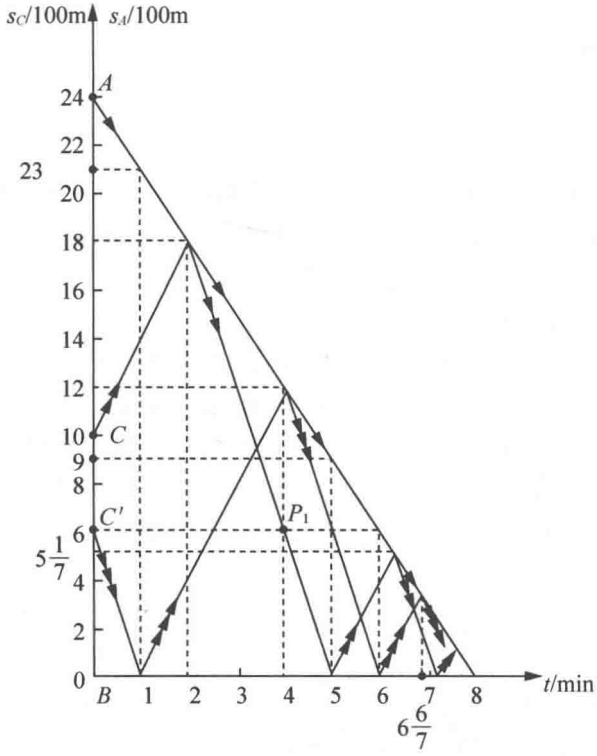
运 动 学

【题 1】



如图所示，骑马人 A，B 相距 2400 m，猎犬 C 在 A，B 连线上，与 A 相距 1400 m，与 B 相距 1000 m. $t=0$ 时刻开始，A 朝 B 骑马速度 200 m/min，B 朝 A 骑马速度 100 m/min；C 先朝 A 奔跑，速度 500 m/min，与 A 相遇后又回头朝 B 奔跑，速度大小不变，直到最后 A，B，C 相遇一处为止. 试分析此运动.

解 为了判定 8 min$\geqslant t\geqslant$0 时刻 C 相对 A，B 的位置及奔跑方向，可以改取相对 B 静止的参考系. 在 B 参考系中 B 不动，A 朝 B 的速度为 300 m/min，C 背离 B 的奔跑速度为 400 m/min，C 朝着 B 的奔跑速度为 600 m/min. A，C 各自与 B 的间距 s_A，s_C 随 t 变化的图线及运动方向在题解图中用单箭头和双箭头区分. 例如从图线中可以找到 $t=4$ min 时 C 位于 P_1 处，与 A 相距 600 m，与 B 相距 600 m，C 朝着 B 奔跑.



题解图

逆向问题是如果已知某个 t 时刻(例如 $t=4$ min)C 相对 A，B 的位置及 C 的奔跑方向，

则可反过来推导出 $t=0$ 时刻 C 的位置和奔跑方向，但对于 $t=8$ min 的末态，则因所有可能的 $t=0$ 初态均对应共同的 A，B，C 相遇一处的末态，而无法反过来导出究竟是哪一个初态. 为此，题解图中又取了 $t=0$ 时刻 C 位于与 B 相距 600 m 处且朝着 B 奔跑对应的、用三个箭头表示的 $s_C\sim t$ 图线，它所对应的末态与前相同.

【题 2】

某人用双手做 3 个球的抛球、接球、传球游戏. 过程中左手接住空中落下的一个球，再传递给右手；右手接过小球，并将小球斜向上抛出. 假设每只手中至多留有一个小球，左手接球点高度与右手抛球点高度相同，每个小球离开右手后的升高量均达 H，小球相互不碰撞，试求系统运动周期 T.

解　某个小球第 1 次从右手抛出到第 2 次从右手抛出的时间即为系统运动周期 T. T 可分成两段. 第一段时间 t_1 是小球在空中运动时间，即有

$$t_1=2\sqrt{2H/g}.$$

第二段时间 t_2 包括小球在左手停留时间、从左手到右手传递时间和在右手停留时间. t_2 可短可长，最短趋向零，即有

$$t_{2\min}\to 0,$$

最长需受“每只手中至多留有一个小球”的限制，故 t_2 的上限对应空中几乎始终只有一个球在运动，即所讨论的小球几乎在另外两个小球依次都在空中运动过后，才从右手抛出，可得

$$t_{2\max}\to 2t_1.$$

综上所述，系统运动周期 T 的可取值为

$$3t_1>T>t_1,\quad t_1=2\sqrt{2H/g}.$$

【题 3】

直角三角板 ABC 的边长 $BC=a$，$AC=b$，开始时 AB 边靠在 y 轴上，B 与坐标原点 O 重合. 今使 A 点单调地沿 y 轴负方向朝 O 点移动，B 点单调地沿 x 轴正方向移动，如图 1 所示. 最终 A 点到达 O 点，AB 边倒在 x 轴上，如图 2 所示. 试求三角板从图 1 到图 2 的移动过程中，C 点经过的路程 s_C.

解　路程与运动轨道相关，运动轨道由过程态(即过程中的各个状态)确定. 取过程态如题解图所示，可以看出 O，A，B，C 四点共圆. 图中标以 α 的两个角因对应同一圆弧而相等，CO 与 x 轴夹角 α 便是定值，过程中 C 必沿此连线作直线运动. 引入图示 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_C$，标量化为 v_A 和 v_C. 其中 v_A 始终为正；v_C 取正时，$\boldsymbol{v}_C$ 指向 O 点，v_C 取负时，$\boldsymbol{v}_C$ 背离 O 点. 参考同一圆弧对应的两个 β 角，$\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_C$ 沿 CA 边方向分量相等的条件可表述成

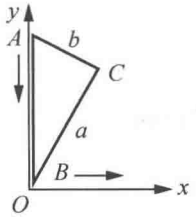


图1

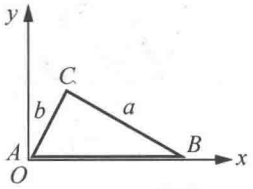
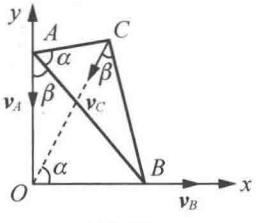


图2



题解图

$$v_A\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=v_C\sin\beta,$$

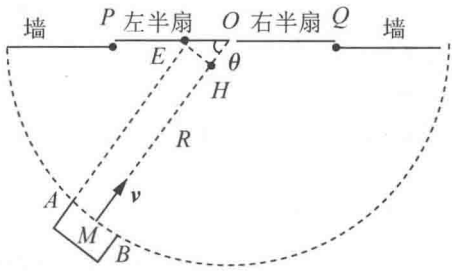
得

$$v_C=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta}v_A\begin{cases}<0, & \text{当 } \alpha<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2},\\ =0, & \text{当 } \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2},\\ >0, & \text{当 } \dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\alpha+\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

可见 C 点开始时沿直线背离 O 点运动，到达 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 位置时停下，而后沿直线指向 O 点运动，一直到图 2 所示位置为止. 据此得

$$s_C=2\sqrt{a^2+b^2}-(a+b).$$

【题 4】



如图所示的自动推拉门 PQ，左、右两半扇，每半扇长 $l_0=2$ m. 当物体触及与门的中心 O 相距 $R=4$ m 的半圆周时，闭合的两半扇门即以加速度 $a=0.25\text{m/s}^2$ 左、右匀加速打开，各自行进 $l_0/2$ 路程后，又以相同的加速度大小，左、右匀减速继续打开. 长 $AB=1$ m 的长方形箱子，某时刻 AB 边中点 M 触及 R 半圆周，AB 边恰好与 M，O 连线垂直，箱子正以 $v=1\text{m/s}$ 的匀速度朝着 O 点移行. 将 O，M 连线与门线 PQ 的夹角记为 θ，因左右对称，只需在 $90°\geqslant\theta>0$ 范围内讨论 θ 角的取值.

(1) 暂不考虑箱子能否出门，试问 θ 取何值时能使箱子边缘点 A 到达门线 PQ 内?

(2) 将 A 点到达的门线点位置记为 E，假设 A 到达 E 时，只要 E 点已被“打开”，那么箱子一定可以推出门外，称这样的 E 点为出门点.

(2.1) 问 θ 取何值，能使出门点 E 对应的$\overline{OE}\leqslant 1$ m?

(2.2) 问 θ 取何值时，能使出门点 E 对应的$\overline{OE}>1$ m?

——王达（北京大学物理学院 2004 级），舒幼生

解 参考题图.

(1) A 点进入门线 PQ 内，要求

$$\overline{OE}<l_0,$$

因

$$\sin\theta=\overline{EH}/\overline{OE}=\overline{AM}/\overline{OE}>\overline{AM}/l_0=\frac{0.5}{2},$$

故 θ 可取值为

$$\theta_{\max}=90°\geqslant\theta>\arcsin 0.25=14.48°=\theta_{\min}.$$

(2) 门开启一半所需时间记为 t_0，由 $\dfrac{l_0}{2}=\dfrac{1}{2}at_0^2$，得

$$t_0=\sqrt{l_0/a}=\sqrt{8}\,\text{s}=2.828\text{s},$$

门全部开启所需时间便为

$$2t_0=2\sqrt{8}\,\mathrm{s}=5.657\mathrm{s}.$$

对于图示的 θ 角，箱子边缘点 A 到达门线所需时间为

$$t_A=\frac{\overline{AE}}{v}=\frac{R-\overline{AM}\cot\theta}{v}=\frac{4-0.5\cot\theta}{1}\mathrm{s},$$

$$\theta_{\max}=90^\circ\xleftarrow{\text{对应}}4\mathrm{s}=t_{A\max}\geqslant t_A>t_{A\min}=2.064\mathrm{s}\xrightarrow{\text{对应}}\theta_{\min}=14.48^\circ.$$

因

$$2t_0=5.657\mathrm{s}>4\mathrm{s}=t_{A\max},$$

故不必考虑门全部打开后再关闭的过程.

(2.1) 出门点 E 对应$\overline{OE}\leqslant 1\,\mathrm{m}$.

要求 A 到达 E 时，E 或者刚被打开，或者此前已被打开.

首先由

$$\sin\theta=\overline{AM}/\overline{OE}\geqslant 0.5/1,$$

要求

$$90^\circ\geqslant\theta\geqslant 30^\circ,$$

又由 $t_A=(4-0.5\cot\theta)/1$ 得

$$4\mathrm{s}\geqslant t_A\geqslant 3.134\mathrm{s}.$$

对于

$$\theta=30^\circ,\ \overline{OE}=1\,\mathrm{m},\quad\Rightarrow\quad t_A=3.134\mathrm{s}>2.828\mathrm{s}=t_0,$$

即在 A 到达 E 点时，此前 E 已被打开，箱子自然能出门. 而在

$$\theta>30^\circ,\ \overline{OE}<1\,\mathrm{m},\quad\Rightarrow\quad t_A\text{ 更长，更大于 }t_0,$$

即在 A 到达 E 点时，E 在更早时刻已被打开，箱子更“容易”出门.

结论：$\overline{OE}\leqslant 1\,\mathrm{m}$ 时，θ 可取值为

$$90^\circ\geqslant\theta\geqslant 30^\circ.$$

(2.2) 出门点 E 对应$\overline{OE}>1\,\mathrm{m}$.

首先由 $\theta_{\min}=14.48^\circ$，和

$$\sin\theta=\overline{AM}/\overline{OE}<\frac{0.5}{1},\quad\Rightarrow\quad\theta<30^\circ,$$

要求

$$30^\circ>\theta>14.48^\circ.$$

又由 $t_A=(4-0.5\cot\theta)/1$，得

$$\theta=30^\circ\xleftarrow{\text{对应}}3.134\mathrm{s}>t_A>2.064\mathrm{s}\xrightarrow{\text{对应}}\theta=14.48^\circ.$$

但在

$$t_0=2.828\mathrm{s}>t_A>2.064\mathrm{s}$$

范围内，A 到达 E 点时，因$\overline{OE}>1\,\mathrm{m}$，$E$ 点尚未被打开，箱子不能出门，故此时段不可取. 于是只可取时段

$$2t_0=5.657\mathrm{s}>3.134\mathrm{s}>t_A\geqslant 2.828\mathrm{s}=t_0.$$

此时段已等于或超过 t_0，门即或已进入减速状态，要求左半扇门在此 t_A 时段行进的路程

$l_{左}$满足下述关系式：

$$l_{左}\geqslant\overline{OE}=\overline{AM}/\sin\theta=(0.5/\sin\theta)\ \mathrm{m},$$

$$l_{左}=\frac{l_0}{2}+(at_0)(t_A-t_0)-\frac{1}{2}a(t_A-t_0)^2;\ t_A=\frac{4-0.5\cot\theta}{1}\mathrm{s}.$$

即要求

$$[1+(0.25\times\sqrt{8})\times(4-0.5\cot\theta-\sqrt{8})-\frac{1}{2}\times0.25\times(4-0.5\cot\theta-\sqrt{8})^2]\ \sin\theta\geqslant0.5,$$

或
$$\begin{cases}f(\theta)=[2+\sqrt{2}(4-\sqrt{8}-0.5\cot\theta)-0.25\,(4-\sqrt{8}-0.5\cot\theta)^2]\sin\theta,\\ f(\theta)\geqslant1.\end{cases}$$

考虑到此时段对应的 θ 上限为 30°，对应的 θ 下限则可由

$$t_A=t_0,\ t_0=\sqrt{8}\,\mathrm{s}\quad 和\quad t_A=\frac{4-0.5\cot\theta}{1}\mathrm{s}$$

求得为

$$\theta=23.11°.$$

故在

$$30°>\theta\geqslant23.11°$$

角范围内作数值计算，所得如下：

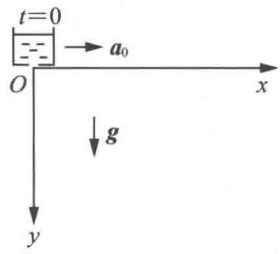
θ	23.2°	25°	26°	26.5°	26.6°	28°	30°
$f(\theta)$	0.791	0.904	0.965	0.996	1.002	1.086	1.204

结论：$\overline{OE}>1$ m 时，θ 可取值为

$$30°>\theta>26.6°.$$

【题 5】

在竖直平面上设置图示的水平 x 轴和竖直向下的 y 轴，$t=0$ 时刻位于 $x=0$，$y=0$ 处的小水桶从静止出发，以匀加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 沿 x 轴运动. 过程中桶底小孔向下漏水，单位时间漏水质量为常量 m_0. 略去漏水相对水桶的初速度，在任意 $t_0>0$ 时刻，试求



(1) 漏水迹线方程；

(2) 漏水迹线中的质量线密度 λ 随 y 坐标的分布函数.

解 (1) t_0 之前，于 t 时刻从桶底漏出的水，在 t_0 时刻的 x，y 坐标分别为

$$x=\frac{1}{2}a_0t^2+a_0t(t_0-t)=\frac{1}{2}a_0t^2+a_0tt_0-a_0t^2=-\frac{1}{2}a_0t^2+a_0tt_0$$

$$=\frac{1}{2}a_0t_0^2-\frac{1}{2}a_0t_0^2+a_0tt_0-\frac{1}{2}a_0t^2=\frac{1}{2}a_0t_0^2-\frac{1}{2}a_0(t_0-t)^2,$$

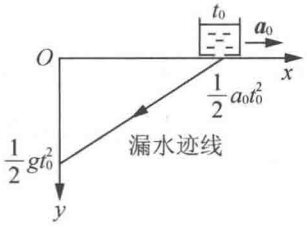
$$y=\frac{1}{2}g(t_0-t)^2.$$

得漏水迹线方程为

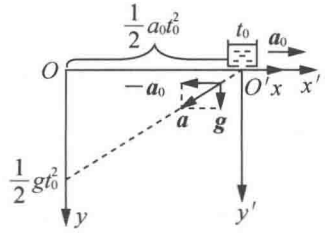
$$x=\frac{1}{2}a_0t_0^2-\frac{a_0}{g}y.$$

迹线如题解图 1 所示.

或者改取水桶参考系 $O'x'y'$，该系中每一滴漏水都沿题解图 2 所示 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{g}$ 方向作匀加速直线运动，其运动轨迹即为漏水迹线. t_0 时刻漏水迹线如题解图 2 中虚线所示，相应方程为 $x'=-\dfrac{a_0}{g}y'$，因 $x'=x-\dfrac{1}{2}a_0t_0^2$，$y'=y$，得 $x=\dfrac{1}{2}a_0t_0^2-\dfrac{a_0}{g}y$.



题解图 1



题解图 2

(2) 如前所述，t_0 之前，于 t 时刻从桶底漏出的水在 t_0 时刻的 x，y 坐标分别为

$$x(t)=\frac{1}{2}a_0t_0^2-\frac{1}{2}a_0(t_0-t)^2,$$

$$y(t)=\frac{1}{2}g(t_0-t)^2.$$

t_0 之前，于 $t+\mathrm{d}t$ 时刻从桶底漏出的水在 t_0 时刻的 x，y 坐标分别为

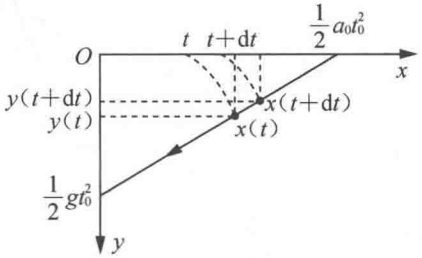
$$x(t+\mathrm{d}t),\ y(t+\mathrm{d}t).$$

$\mathrm{d}t$ 时间内质量为 $\mathrm{d}m=m_0\mathrm{d}t$ 的漏水，在 t_0 时刻迹线中占据的 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 以及长度 $\mathrm{d}l$ 为

$$\mathrm{d}x=a_0(t_0-t)\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y=-g(t_0-t)\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}l=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{a_0^2+g^2}\,(t_0-t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\mathrm{d}y$ 为负，是因为 $y(t)>y(t+\mathrm{d}t)$，如题解图 3 所示. 迹线中 $y(t)$ 处质量线密度为



题解图 3

$$\lambda(t)=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l}=m_0/\sqrt{a_0^2+g^2}\,(t_0-t),$$

将

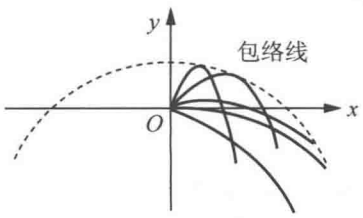
$$t_0-t=\sqrt{2y/g}$$

代入，即得 t_0 时刻迹线中质量线密度 λ 随 y 坐标的分布式：

$$\lambda(y)=\frac{m_0}{\sqrt{a_0^2+g^2}}\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

【题 6】

如图，在某竖直平面上设置 Oxy 坐标系，其中 x 轴水平，y 轴竖直向上. 从 O 点抛出一个小球，初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 在 Oxy 坐标面内，大小 v_0 恒定，方向与 x 轴夹角 θ 在 0 到 2π 之间. 小球所有可能的抛物线轨道对应的包络线已在图中用虚线表示，试求包络线方程.



解　Oxy 坐标面中，包络线外的各 $(x,\ y)$ 点均无 θ 角对应的抛物线轨道经过，包络线内的各 $(x,\ y)$ 点似乎有两个 θ 角对应的抛物线轨道经过，

需要全本请访问 www.ertongbook.com

包络线上各$(x,\ y)$点则只有且必有一个θ角对应的抛物线轨道经过.

据此，将小球抛物线轨道由常见的表述式

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2+(\tan\theta)x$$

改述为

$$y=-\frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta)x^2+(\tan\theta)x.$$

因对称，只取Ⅰ、Ⅱ象限的θ角解：

$$\theta=\arctan\left[\frac{v_0^2\pm\sqrt{v_0^4-2v_0^2gy-g^2x^2}}{gx}\right],$$

$$\text{判别式}\begin{cases}v_0^4-2v_0^2gy-g^2x^2<0：\text{包络线外的}(x,\ y)\text{点},\\ v_0^4-2v_0^2gy-g^2x^2=0：\text{包络线上的}(x,\ y)\text{点},\\ v_0^4-2v_0^2gy-g^2x^2>0：\text{包络线内的}(x,\ y)\text{点}.\end{cases}$$

延展到Oxy平面Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限，得包络线方程为

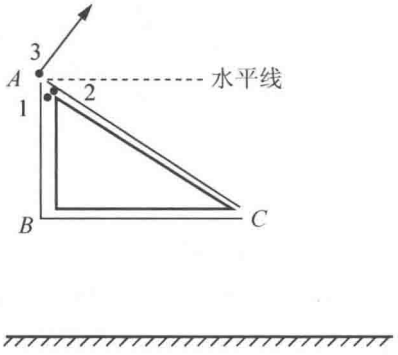
$$y=\frac{1}{2v_0^2g}(-g^2x^2+v_0^4),$$

是一条数学上的抛物线.

顺便一提，包络线内的$(x,\ y)$点对应判别式大于零，故有两个θ角解，这表明包络线内任何一个点必有且仅有两条小球的抛物线轨道经过.

【题 7】

如图所示，水平地面上方某竖直平面内有一固定的、内壁光滑的直角三角形管道ABC，直角边AB竖直向下，直角边BC水平朝右，C端开口. 取3个小球. $t=0$时刻，球1从A端静止释放，沿AB下滑，到达B处后速度大小不变，方向自动地改变为沿BC朝右，直到C端，即从开口处离开管道，落到地面时刻记为T_1. $t=0$时刻，球2从A端静止释放，沿AC下滑，直到C端，即从开口处离开管道，落到地面时刻记为T_2. $t=0$时刻，球3在此竖直平面内从A端斜向上方抛出，恰好能经过C端开口处，落到地面时刻记为T_3.



已知直角边BC距地面的高度和AB边长度相同，球1、2、3到达C端时刻相同，试求$T_1:T_2:T_3$.

解 将AB边长和BC边距地面高度同记为H.

由球1、2同时到达C端，确定直角三角形ABC的几何特征：

参考题解图1，有

$$\left.\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}gt_1^2,\\ H\cot\phi&=(gt_1)\cdot t_2,\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ 2H+H\cot\phi=gt_1(t_1+t_2),$$

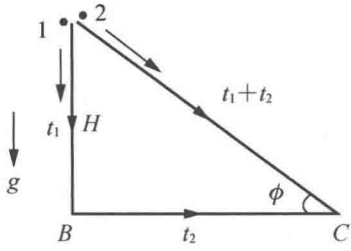
$$gt_1=g(\sin\phi)(t_1+t_2),\quad\Rightarrow\quad t_1+t_2=t_1/\sin\phi,$$

$$\Rightarrow \quad 2H+H\cot\phi=gt_1^2/\sin\phi=2H/\sin\phi, \quad \Rightarrow \quad 2\sin\phi+\cos\phi=2.$$

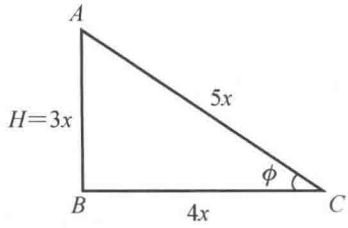
解得

$$\sin\phi=\frac{3}{5},\ \cos\phi=\frac{4}{5};\ ABC \text{ 为 } 3:4:5 \text{ 直角三角形.}$$

如题解图 2 所示.



题解图 1



题解图 2

确定 3 个球到达 C 端前经过的相同时间 $\Delta t_1=\Delta t_2=\Delta t_3$：

由球 2 经过的时间

$$\Delta t_2=\sqrt{2\times\frac{5}{3}H/g\sin\phi}=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

得

$$\Delta t_1=\Delta t_2=\Delta t_3=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

确定球 1、2 到达 C 端时的竖直向下速度分量 $v_{1\perp}$，$v_{2\perp}$：

$$v_{1\perp}=0,\ v_{2\perp}=\sqrt{2(g\sin\phi)\sin\phi\cdot H}=\frac{3}{5}\sqrt{2gH}.$$

由球 3 经 Δt_3 时间到达 C 端，确定球 3 到达 C 端时的竖直向下速度分量 $v_{3\perp}$：

球 3 在 A 端斜抛初速度的竖直向上分量记为 v_{0y}，则有

$$v_{0y}\Delta t_3-\frac{1}{2}g(\Delta t_3)^2=-H, \quad \Rightarrow \quad v_{0y}=\frac{1}{2}g(\Delta t_3)-\frac{H}{\Delta t_3},$$

$$v_{3\perp}=-(v_{0y}-g\Delta t_3), \quad \Rightarrow \quad v_{3\perp}=-\left[\left(\frac{1}{2}g\Delta t_3-\frac{H}{\Delta t_3}\right)-g\Delta t_3\right],$$

$$v_{3\perp}=\frac{17}{15}\sqrt{2gH}.$$

（附注：球 3 在 A 端斜抛初速度的水平分量 v_{0x}，可由

$$v_{0x}\Delta t_3=\frac{4}{3}H$$

得

$$v_{0x}=\frac{2}{5}\sqrt{2gH}.)$$

$T_1:T_2:T_3$的确定：

球 1、2、3 从 C 端到达地面所经时间分别记为 $\Delta t_1'$，$\Delta t_2'$，$\Delta t_3'$，则有

$$H=\frac{1}{2}g(\Delta t_1')^2, \quad \Rightarrow \quad \Delta t_1'=\sqrt{2H/g},$$

$$H=v_{2\perp}\Delta t_2'+\frac{1}{2}g(\Delta t_2')^2,\quad\Rightarrow\quad\Delta t_2'=\frac{1}{5}(\sqrt{34}-3)\sqrt{2H/g},$$

$$H=v_{3\perp}\Delta t_3'+\frac{1}{2}g(\Delta t_3')^2,\quad\Rightarrow\quad\Delta t_3'=\frac{1}{15}(\sqrt{514}-17)\sqrt{2H/g},$$

得

$$T_1=\Delta t_1+\Delta t_1'=\left(\frac{5}{3}+1\right)\sqrt{2H/g}=\frac{8}{3}\sqrt{2H/g},$$

$$T_2=\Delta t_2+\Delta t_2'=\left[\frac{5}{3}+\frac{1}{5}(\sqrt{34}-3)\right]\sqrt{2H/g}=\frac{1}{15}(16+3\sqrt{34})\sqrt{2H/g},$$

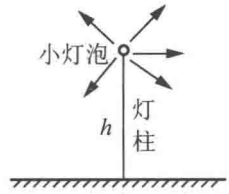
$$T_3=\Delta t_3+\Delta t_3'=\left[\frac{5}{3}+\frac{1}{15}(\sqrt{514}-1)\right]\sqrt{2H/g}=\frac{1}{15}(8+\sqrt{514})\sqrt{2H/g},$$

即有

$$\begin{aligned}T_1:T_2:T_3&=8:\frac{1}{5}(16+3\sqrt{34}):\frac{1}{5}(8+\sqrt{514})\\&=40:(16+3\sqrt{34}):(8+\sqrt{514})\\&=40:33.5:30.7\\&=1:0.837:0.767.\end{aligned}$$

【题 8】

如图所示，水平地面上高为 h 的灯柱顶端有一个小灯泡. 某时刻，灯泡爆炸成碎片，朝各个方向射出，初速度大小同为 v_0. 设碎片落地后不会反弹，试将每一碎片的运动斜交地分解成沿其初速 $\boldsymbol{v}_0$ 方向的匀速直线运动和静止开始的竖直向下自由落体运动，以此求解地面上碎片分布区域的半径 R.



解 某碎片在 $t=0$ 时刻于 O 点以初速 $\boldsymbol{v}_0$ 抛出，设置沿 $\boldsymbol{v}_0$ 方向的 x 轴和竖直向下的 y 轴，t 时刻该碎片落在地面 P 处，如题解图所示. P 到灯柱距离记为 r，则应有

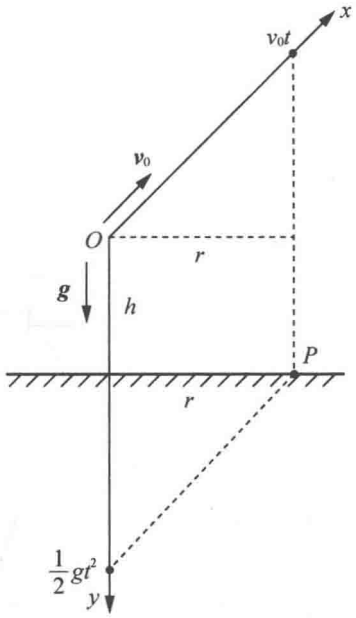
$$\begin{aligned}r^2&=(v_0t)^2-\left(\frac{1}{2}gt^2-h\right)^2\\&=-\frac{1}{4}g^2t^4+(v_0^2+gh)t^2-h^2.\end{aligned}$$

不同的碎片有不同的 $\boldsymbol{v}_0$ 方向，对应不同的落地时间 t，落地点 P 有不同的 r 值，所求 R 即为这些 r 中的极大值. 因 r^2 是 t^2 的二次函数，当

$$t^2=\frac{2}{g^2}(v_0^2+gh)$$

时，r^2 取得极大，对应 r 取得极大值，即有

$$R=\frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2+2gh}.$$



题解图

【题 9】

4 根长度同为 l 的细杆，用铰链首尾相接，组成一个菱形 $ABCD$，放在某水平面上，如图所示. 设 A 端固定，C 端沿着 A，C 连线方向运动，当 $\angle A$ 恰好 90°时，C 端速度为 v，加速度为 a，试求此时 B 端的加速度大小 a_B.

解　拟采用加速度 $\boldsymbol{a}$ 的两种正交分解组合应用方法，求解 $\boldsymbol{a}_B$ 及其大小 a_B.

以 A 为原点，建立题解图所示的 x，y 坐标. 由 B，C 间运动关联，可将 $\boldsymbol{a}_B$ 正交分解为 a_{Bx} 和 a_{By}，其中 $a_{Bx}=a/2$，a_{By} 待定. 由 B，A 间运动关联，又可将 $\boldsymbol{a}_B$ 分解为圆弧运动中的 $a_{B心}$ 和 $a_{B切}$，其中 $a_{B心}=v_B^2/l$，$a_{B切}$ 待定. 由可得到的 a_{Bx} 和 $a_{B心}$ 可导得 a_{By}（或 $a_{B切}$），继而得到 $a_B=\sqrt{a_{Bx}^2+a_{By}^2}$.

参考题解图，有

$$x_B=\frac{1}{2}x_C,\quad v_{Bx}=\frac{1}{2}v,\quad a_{Bx}=\frac{1}{2}a,$$

$$v_B=\sqrt{2}\,v_{Bx}=\frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

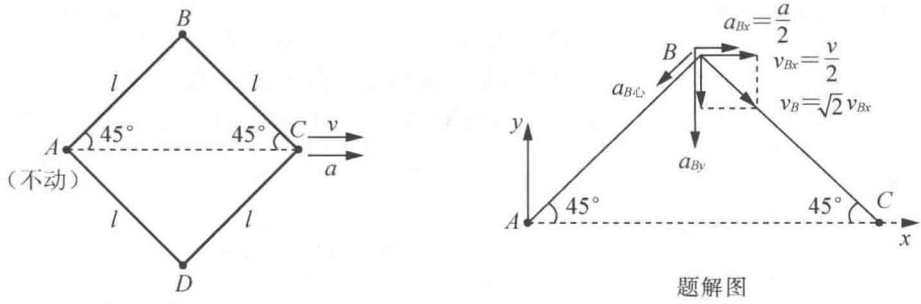
$$a_{B心}=v_B^2/l=v^2/2l,$$

$$a_{B心}=a_{By}\cos 45^\circ-a_{Bx}\cos 45^\circ,$$

$$\Rightarrow\quad a_{By}=\sqrt{2}\,a_{B心}+a_{Bx}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v^2}{l}+\frac{1}{2}a,$$

得

$$a_B=\sqrt{l^2a^2+v^4+\sqrt{2}\,lv^2a}\,\Big/\sqrt{2}\,l.$$



题解图

【题 10】

长 L 的均匀弹性绳 AB 自由伸直地放在光滑水平桌面上，绳的 A 端固定. $t=0$ 时，一小虫开始从 A 端出发以相对其足下绳段的匀速度 u 在绳上朝 B 端爬去，同时绳的 B 端以相对桌面的匀速度 v 沿绳长方向运动，试求小虫爬到 B 端的时刻 t_e.

附注：B 端运动使绳各部分之间有相对运动，绳的整体不可作为小虫运动的参考物，严格而言，不宜说“小虫开始从 A 端出发以相对绳的匀速度 u 在绳上朝 B 端爬去”. 但是可以说“……以相对其足下绳段的匀速度 u 在绳上朝 B 端爬去”，因为小虫已按习惯模型化为质点，“其足下的绳段”当为无穷短绳段，无穷短时间内此绳段各部分间相对运动可略，故可取为该时刻附近小虫爬行运动的“瞬时”参考系.

解 本题给出两种解法作答.

解法 1：参考题解图 1，在原长的绳上建立从 A 到 B 的 x 坐标，A 端 $x_A=0$，B 端 $x_B=L$. 设 t 时刻小虫 P 处于 x 坐标上的 x 位置，此时绳的真实长度已成为 $L+vt$，即 $x_B=L$ 已对应真实长度坐标的 $x'_B=L+vt$，绳中 x 坐标对应真实长度为

$$x'=\frac{x}{L}(L+vt).$$

P 相对其足下绳段不动，B 运动会使 x' 有增量

$$\mathrm{d}x'_1=\frac{x}{L}v\,\mathrm{d}t,$$

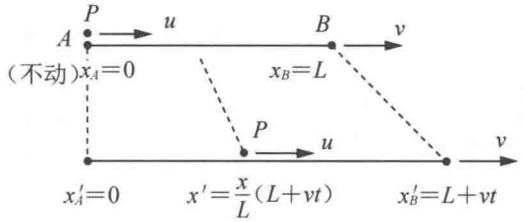
但 x 不会变化，故于 P 爬绳无贡献. 再令 B 不动，P 相对其足下绳段运动，使 x' 的增量 $\mathrm{d}x'_2$ 对应有 x 的增量 $\mathrm{d}x$，其间关系为

$$u\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x'_2=\frac{\mathrm{d}x}{L}(L+vt),$$

由此可得

$$\int_0^{t_e}\frac{Lu}{L+vt}\mathrm{d}t=\int_0^L\mathrm{d}x\ ,$$

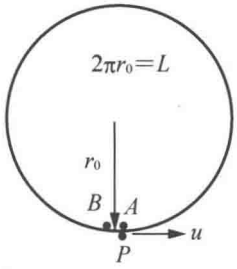
$$\Rightarrow\quad t_e=\frac{L}{v}(\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}-1).$$



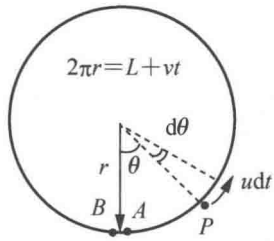
题解图 1

解法 2：解法 1 中 P 随 B 相对桌面的真实运动量 $\mathrm{d}x'_1$，与 P 爬绳相对桌面的真实运动量 $\mathrm{d}x'_2$ 在同一方向，故不易区分.

本解法提供的是一种等效处理方法，将直长为 L 的 AB 绳弯曲成半径为 $r_0=L/2\pi$ 的 A，B 相接圆环绳，如题解图 2 所示. t 时刻因 B 运动绳长增为 $L+vt$，对应题解图 3 中圆半径增为 $r=(L+vt)/2\pi$. 此过程中，原来 P 随 B 沿绳长方向的运动转化为 P 的径向朝外运动，而 P 的爬绳运动转化为 P 的切向运动，两个正交方向的运动截然分离. P 从 $\theta=0$ 爬到 $\theta=2\pi$，即到达 B 端. 参考题解图 2、3 中参量，有



题解图 2



题解图 3

$$d\theta=\frac{u\,dt}{r}=\frac{2\pi u}{L+vt}dt,\quad\Rightarrow\quad\int_0^{2\pi}d\theta=\int_0^{t_e}\frac{2\pi u}{L+vt}dt,$$

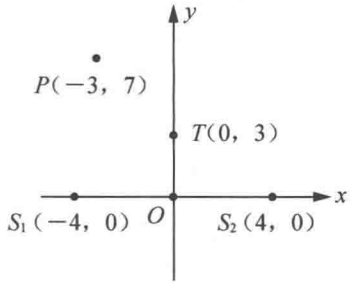
即得

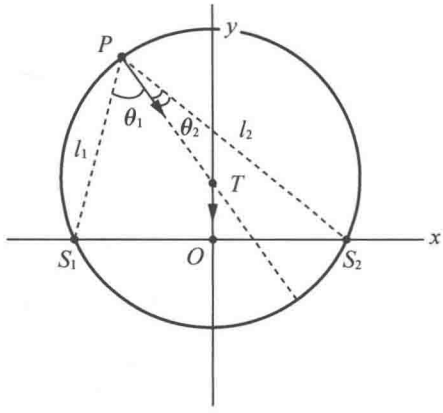
$$t_e=\frac{L}{v}(e^{\frac{v}{u}}-1).$$

【题 11】

如图，在 $S_1(-4,\ 0)$和 $S_2(4,\ 0)$处各有一个巡警亭，一警察 P 在$(-3,\ 7)$处巡逻. 警察突然发现一小偷 T 在$(0,\ 3)$处行窃，便朝其追去，同时小偷也发现了警察，拔腿就跑. 由于害怕巡警亭内有警察，小偷采取了一种自以为聪明的跑法：始终保持与 P，S_1，S_2 距离相同，而警察始终朝着小偷跑. 最后小偷在原点$(0,\ 0)$处被群众抓获，试求此过程中警察的运动轨迹.

——北京大学物理学院 2006 级黄浩





题解图

解　参考题解图，T 沿 y 轴运动，P 朝着 T 的运动速度大小记为 v，则有

$$dl_1(t)=v(t)dt\cos\theta_1(t),\ dl_2(t)=v(t)dt\cos\theta_2(t),$$

$$\frac{dl_1(t)}{dl_2(t)}=\frac{\cos\theta_1(t)}{\cos\theta_2(t)}=\frac{l_1(t)}{l_2(t)}.\ (\text{因 } P,\ S_1,\ S_2 \text{ 共圆，} T \text{ 为圆心})$$

于是，

$$\frac{l_1(t+dt)}{l_2(t+dt)}=\frac{l_1(t)-dl_1(t)}{l_2(t)-dl_2(t)}=\frac{l_1(t)}{l_2(t)}.$$

从 $t=0$ 开始连续过渡，即有

$$\frac{l_1(t)}{l_2(t)}=\frac{l_1(0)}{l_2(0)},\ l_1(0)=\sqrt{1+7^2}=\sqrt{50},\ l_2(0)=\sqrt{7^2+7^2}=\sqrt{98}.$$

将 t 时刻 P 的坐标记为$(x,\ y)$，则有

$$l_1(t)=\sqrt{(x+4)^2+y^2},\ l_2(t)=\sqrt{(4-x)^2+y^2},$$

即得

$$\frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{98}},\quad\Rightarrow\quad\frac{(x+4)^2+y^2}{(x-4)^2+y^2}=\frac{25}{49},$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com