

数学文化名著译丛

# 数学概念的演变

[美] R·L·怀尔德——著  
谢明初 陈念 陈慕丹——译




华东师范大学出版社

数学文化名著译丛

# 数学概念的演变

[美] R·L·怀尔德——著  
谢明初 陈念 陈慕丹——译

 华东师范大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学概念的演变/(美) R. L. 怀尔德著;谢明初译.  
—上海:华东师范大学出版社,2019  
ISBN 978-7-5675-9270-4

I. ①数… II. ①R…②谢… III. ①数学—研究  
IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 095792 号

## 数学概念的演变

著 者 [美]R·L·怀尔德  
译 者 谢明初 陈 念 陈慕丹  
策划组稿 李文革  
项目编辑 平 蒨  
审读编辑 李文革  
装帧设计 刘怡霖

出版发行 华东师范大学出版社  
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062  
网 址 [www.ecnupress.com.cn](http://www.ecnupress.com.cn)  
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105  
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887  
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口  
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 上海展强印刷有限公司  
开 本 787×1092 16 开  
印 张 10.5  
字 数 175 千字  
版 次 2019 年 7 月第 1 版  
印 次 2019 年 7 月第 1 次  
书 号 ISBN 978-7-5675-9270-4/  
定 价 30.00 元

出版人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调

数学概念的演变

谢明初 陈念 陈慕丹 译

*Evolution of Mathematical Concepts: An Elementary Study* / by Raymond L. Wilder

Copyright © 1968, 1973 by The Estate of Raymond L. Wilder

Chinese Translation Copyright © 2019 by East China Normal University Press Ltd.

Simplified Chinese translation rights is arranged through RR Donnelley Asia.

All rights reserved.

上海市版权局著作权合同登记 图字：09-2019-387 号。

## 译者序

20世纪80年代以来,数学文化研究在我国数学界和数学哲学界悄然兴起。进入21世纪后,随着新一轮中小学数学课程改革的启动,它又获得数学教育界的高度认可,并成为数学教育研究的热点话题。在教育部颁布的《普通高中数学课程标准(2017年版)》中,要求把数学文化融入课程内容,标志着数学文化走进中小学课堂。

关于数学是文化的观点,中国学者很早就有论及。例如马遵廷1933年在《数学与文化》一文中提出了“数学和文化互为函数”的观点;陈建功1952年提出“数学教育是在经济的、社会的、政治的制约下的一种文化形态”;殷海光在20世纪60年代认为欧几里德几何学、纯粹数学都是文化;李大潜2005年提出“数学是一种先进的文化,是人类文明的重要基础”。<sup>①</sup>2002年8月20日,丘成桐接受《东方时空》的采访时说:“由于我重视历史,而历史是宏观的,所以我在看数学问题时常常采取宏观的观点,和别人的看法不一样。”这是一位数学大家对数学文化的阐述。

国内外已有的著述可分为三类:

一类是基于数学与社会的互相作用的数学文化研究,以克莱因为代表。代表作品有《西方文化中的数学》(1953),《数学:一种文化探索》(1962),《数学与知识的探求》(1986)。克莱因的工作侧重于对数学与各种文化及社会因素之间相互作用的现象的描述,进而分析数学文化的特征,其中提供了大量具体案例。由于国内学者的大力引介,使得克莱因的数学文化观点和成果在中国影响很大,处于主导地位。

另一类是基于数学哲学和数学社会学的数学文化研究,以郑毓信为代表。出版代表性著作《数学文化学》(2000),试图从数学哲学和数学社会学的视角构建数学文化学的理论体系,在国内诸多学者的研究中独树一帜。

---

① 代钦. 释数学文化[J]. 数学通报,2013,52(4).

第三类是基于文化人类学的数学文化研究,以怀尔德为主要代表。怀尔德(Raymond L. Wilder)曾任美国数学会主席,在数学文化方面有两部重要著作,即《数学概念的演变》(1968)和《作为文化体系的数学》(1981),是迄今为止最具理论价值的数学文化专著。<sup>①</sup>他在前一本书中提出了数学发展的11个动力和10条规律,在后一本书中进一步总结出23条规律。怀尔德注重建立数学文化学的理论体系,关注数学发展的内在文化机制,也较为重视哲学层面的分析,具有较浓厚的思辨色彩。他充分借助数学史研究的已有成果,同时又运用文化人类学的视角和方法审视一些重要的数学历史现象,获得了一些十分重要的结论。<sup>②</sup>

这两本书的特色和创新点表现在:

- 并非是一般的数学史著作,毋宁说是借数学历史题材,提出了认识数学的一种新方法。把数学当成一个文化体系,而不仅仅是整体文化的一部分,为数学发展史上的很多奇怪的现象(如多重发明、数学的可应用性等)给出了一种合理的解释,这并非是从哲学或心理学的角度能满意回答的。

- 论及数学文化现象,传统的研究更多探讨数学与社会的相互影响,或者探讨数学对社会发展的影响,或者反过来探讨社会对数学发展的影响。把数学看成是独立于整体文化的子文化,这就深刻揭示了数学有自身内部发展的规律:遗传张力、结合张力对数学发展起着非常重要的作用。

- 尽管人们对数学史的兴趣不断增长,但是传统的认识是基于亚哲学(sub-philosophical)或前哲学(pre-philosophical)的,而怀尔德关于数学是一种文化体系的观点是很长时期以来第一个成熟的数学哲学观。怀尔德的思想可以看成是戴维斯和赫什的人文数学哲学观的先驱,为理解后期建构主义数学观奠定了理论基础。

- 首次把文化人类学的观点引入数学文化研究,打开了从静态数学哲学观向动态数学哲学观转变的认识通道。数学知识是一种文化传统,数学研究活动具有社会性。人们可以用社会科学的方法去研究数学家,从而也就可以用这种方法去说明数学本身。

- 怀尔德把数学文化看成是一种不断进化的物种。在他看来,希腊数学并没

<sup>①</sup> C. Smorynski. 数学:一种文化系统[J]. 数学译林,1988(3).

<sup>②</sup> 刘洁民. 数学文化:是什么和为什么[J]. 数学通报,2010,49(11).

有因为穆斯林数学的诞生而死亡,而是数学从希腊人之手转移到穆斯林人那里去了,并且在不同的文化张力的作用下,改变了发展途径,以适应新的环境,沿着新的方向发展了。这从文化的角度肯定了不同民族的数学,即现在所称“民族数学”(ethno-mathematics)对数学研究与发展的意义。

《数学概念的演变》和《作为文化体系的数学》是两本姊妹篇,虽写于不同的年代,但学术思想又一脉相承。前者是后者的基础,后者是前者的继承和发展。这两本书,不仅为我国数学文化研究提供了西方的视角,而且为建立数学文化学体系提供了理论框架。由于数学文化向数学教育渗透是数学教育的发展趋势,因此翻译这两本书对我国数学课程改革的深入发展也具有非常重要的现实意义。

在翻译过程中,华东师范大学出版社李文革副总编提出了宝贵的建议并给予热情的帮助,在译稿即将出版之际,我要对他表达敬意和谢忱!

谢明初

2018年11月2日于华南师范大学

## 前 言

不可否认,数学是现代社会最重要的文化组成部分之一。它对其他文化元素的影响是如此的基础和广泛,以至于有理由相信,如果没有数学,我们“最现代”的生活方式几乎不可能实现。暂不说电力、无线电、电视、计算机和太空旅行这些显而易见的例子,单单计算的基本技巧就足以证实这一说法。难以想象不使用任何数字的一天是如何度过的。

然而,开展本研究的动机并非出于数学的重要性,更确切地说,是出于对数学概念(如数和几何)如何以及为何被创造和发展的渴求。我们对数学家个体如何创造和发展他们的概念有相当多的了解,并已经从心理学层面进行研究——杰出的数学家,尤其是庞加莱和哈达玛,以自身的经历做出了贡献。但这些只是一部分情况,没有任何数学家能够在真空中工作。数学家的兴趣不仅取决于他那个时代的数学状况,还取决于他与世界各地的数学同事的联系。已故人类学家拉尔夫·林顿提出了一个假设:“……如果爱因斯坦出生在一个无法数到3以上的原始部落,那么他耗尽毕生的努力可能都无法超越基于手指和脚趾的十进制的发展。”经过了几个“文明”,不计其数的数学家历经了四五千年的努力,才得以产生十进制,所以即使是天赋异禀的爱因斯坦,在他的整整一生中能否做到这一点也还是值得怀疑的。爱因斯坦(包括其他的数学天才)之所以能够达成他所做的事情,是由多种因素促成的,其中只有一个是他那毋庸置疑的天赋,而大部分因素都具有文化性质。

数学家们往往会忽视或者忘记他们工作的文化性质,常觉得他们所处理的概念在文化环境之外拥有一个“现实(reality)”(一种柏拉图式的理想世界)。事实上,一些数学家似乎完全缺乏一种洞察力,即没有意识到他的观察和他的概念会受到观察者的影响,而关于这一点,现代物理学家已经意识到了。还有哪个学科像数学这样,概念逐渐比可观察的事物更重要?

没有人指望能够在某一特定文化的逻辑和语言中找到物理世界严格遵循的

规律。物理学家将所谓的规律纯粹地表述为一种使环境合理化和预测其行为的模式,他并没有断言自然遵循这些“规律”。就数学而言,它基于真实的物理环境,寻求宇宙所遵循的算数、几何等规律。但是,一旦数学成为一个成熟的文化元素,它似乎就会自行发展,仿佛独立于“现实(reality)”之外一样。

然而,数学并非独立于文化的力量而发展,它受到一些文化自身特有的性质的影响,而不仅仅是物理学、艺术或其他文化成分。有些人认为在某一特定时期盛行的倾向是“错误的”,于是试图改变数学研究的方向,但这似乎是徒劳的。只有在强大的环境和内部压力作用下才能有效地改变数学发展的进程,例如有时由于战争的施压、政治变革所引发的混乱、宿主文化(host culture)的重大改变和数学本身的“危机”等等。中国古代和中世纪数学的停滞,反映了宿主文化的静态特征;希腊数学的衰落,其原因虽一直备受争议,但无论如何,它都属于文化整体衰落(内部的和环境的)的一部分;同时还有第二次世界大战前欧洲数学家涌入美国对美国数学和一般的数学的影响等都足以证实上述观点。近年来,数学领域中新研究的兴起,以及其从业者地位不寻常的提高,如同物理学领域发生的那样——主要是由于政治环境的作用。

而且,我相信数学和数学哲学都可以从对数学演变的研究中获益。如果我们相信“那些不知道历史的人会陷在黑暗中”,<sup>①</sup>那么同样我们也会相信,数学家若忽视塑造他思想的演变力量,就相当于失去了一个有价值的研究视角。单纯了解历史是不够的,虽然日期、传记等很重要,但它们只是这类研究的一部分资料。此外,既然文化的演变已经成为人类学中公认的理论,那么这类研究应该引起广泛的关注,尤其是那些对他所处的文化环境的思想起源感兴趣的人。

开展这类研究的主要障碍在于早期记录的不足。是研究一般文化的演变过程容易还是研究某一种特定文化(如数学)的演变过程容易,这个问题一直悬而未决。一方面,将文化视为一个整体来研究,可以从大量的文物中得出结论,而对于某一种特定文化(如数学),则可用的材料相对比较有限。另一方面,有限的材料可以降低复杂性和减少关注点。关于马的进化的研究就是一个例子。正如对特定生命形式的进化进行研究可以为一般的生命形式提供模式一样,研究特定文化(如数学)的演变过程对研究文化演变的一般形式具有重要意义。

---

<sup>①</sup> 密歇根大学威廉·克莱门茨图书馆外墙上的题字(致已故的乌尔里希·菲利普斯教授)。

然而众所周知,数学是技术性的,其关注点集中在数和几何的基本方面。它们的演变基本上展现了高等数学发展过程中的所有特点。数字不仅是数学的开始,而且数概念以某种形式贯穿于数学的各个领域。这是每个文明人(也包括非文明人)为适应社会和物理环境所需要掌握的数学知识。因此,为了便于一般的理解,它不应具有太多的技术性。本书只有在第4章有一些技术性的东西,但我希望其呈现的方式能有助于非数学家对该内容的吸收。我相信没有读完这一章的读者可以从本书的其余部分找到足够的材料来理解它的大概意思。

在这里我尝试从人类学家的角度而不是从数学家的角度来研究数学子文化。当然,由于我是一名数学家,与社会科学家在研究自身所处的文化时所遇到的风险一样,我很难摆脱自己的文化而去冷静地审视它。但是,数学的技术性如此之强,专业以外的人几乎不可能穿透符号的帘子和抽象的概念来发展它。与通常用来获取原始文化的风俗和信仰知识的“报告者(informant)”系统不同,相似的情况在数学中是行不通的。

我想否认任何哲学化的尝试,我纯粹只想对某一特定文化的发展和行为进行研究。然而,完全避免哲学概念是不可能的,毕竟数学哲学影响了数的发展,尤其是在希腊时期。另一方面,如果我的某些结论似乎只有哲学基础,那么它必定是由所谓的科学哲学和科学理论之间的模糊界限造成的。我通过类比宗教来说明这一点,宗教纯粹是从人类学的观点进行研究的,很少或根本没有提及宗教哲学,除非它构成了某一特定的宗教内容。

专业数学家不应期望在本书中找到对诸如实数系等主题的严格处理,因为这不是一本教科书。这是一本关于作为一种文化现象的数学著作,而并非关于数学本身。如果阅读完本书之后,专业数学家对其工作性质有了更深刻的理解,那么我认为我的目的就已经达到了。另一方面,我相信对于非数学专业的读者,尤其是研修社会学和人类学的学生来说,在阅读完本书后,将会对数学是什么有一个真正的理解,同时他可以忽略本书涉及的一些技术性知识并继续读到最后。

由于非数学专业领域的读者的缘故,本书对现代数学的相关内容进行了介绍,不仅包括它是什么、它是如何发展的,还从数学教学的角度介绍了正在发生的事情。为了同时照顾数学专业和非数学专业的读者,本书的第1章介绍初步概念,我希望它包含足够多的关于文化人类学的资料,以及我们日常所使用的十进制系统的性质,以帮助阐明一些技术性术语。如果读者熟悉该内容,那么可以忽

略这部分的所有资料,从第2章开始阅读。

参考书目提供作者的名字和日期,因此“Bell, 1933, P. 20”指的是贝尔在1931年的出版物,具体到第20页。对本书内容的引用一般只提供章和节,如果引用同一章内不同节的内容,则省略章号。

我感激那些为我的观点的形成做出贡献的同事和学生,人数太多以至于我没办法一一列举出他们的名字。我特别感谢我的人类学家朋友莱斯利·怀特教授,还有我的孩子贝蒂·安·迪林厄姆(她阅读了初稿并做了评论)和大卫,这两位社会学家与我一起对很多相关的资料进行了讨论,此处所呈现出来的想法是众人努力的结果。我要感谢我的同事菲利普·琼斯教授和我以前的学生爱丽丝·迪金森教授,感谢他们的讨论与鼓励。特别感谢秘书玛丽·安·索伯女士的协助。另外,我还要感谢大学和学院让我有机会从文化的角度讲授数学。正是由于听众们的鼓励,我才决定写这本书。我希望那些听过我的讲座并且碰巧读到这本书的人会意识到两者之间的相似之处。还要感谢密歇根科学与技术研究所和佛罗里达州立大学的支持,分别在1960—1961年和1961—1962年授予我研究教授的职位,为研究工作提供了时间支持和经费资助。

怀尔德

安阿伯市,美国密歇根州

1968年5月

## 平装版前言

鉴于在该研究中存在一些误解，因此有必要对其性质和目的做简要的说明。

严谨地说，这不应被视为一项纯粹的历史研究。的确，这里涉及很多历史，特别是关于数和几何概念的发展。然而，讲述历史真正的目的在于提供一种方式来发现和阐述影响数学演变的文化力量的性质，而并非单纯呈现一个完整的历史发展过程。比如，在第4章中关于数演变为“超限”数的简要描述只是为了强调是数学内部的力量推动了这一发展，这甚至违背了其最杰出的创造者乔治·康托尔的个人哲学（顺便说一下，这一内容可以省略不看，并不妨碍对后面内容的理解。重要的是要意识到数及其算术一起被扩展到无限并非数学上的突发奇想，而是由于其内部强大的作用力）。

阐述数和几何在历史上的局限性是为了方便非专业的读者进行理解，他们对数学的认识可能局限于中小学阶段；还包括其他领域的同事，特别是我希望文化人类学家能够较之前更好地理解数学[这是我在人类学期刊《美国人类学家》(*American Anthropologist*)上发表的一篇评论中所提到的，第72卷，第1468—1469页]。在这里，我不得不重复在前言中提到的，数和几何的发展基本上展现了高等数学发展过程中的所有特点。

我还希望这一写作方式的改进，有助于改变人们对数学历史的看法，我认为这一希望是可以实现的。数字系统或几何规则的知识并非本来就有，是需要人类去发明的，并且还需要发明的动机。没有数学的文化需求，就不会有数学，我相信历史能够反映这一事实。

另一个需要澄清的误解涉及“符号”一词的意义。符号是一种象征着某种意义的事物，它能够被感知。它可能是一个手势、一个声音、一个单词，或者任何有指代性的东西。“数学符号”中的符号有着更狭隘的意义，它仅代表一类特殊的符号。不幸的是，大部分数学家都被精炼的符号所包围，以至于他容易忘记他所使

用的数学符号只是我们日常活动所使用符号的一个特殊子类。对于警察或军人来说,服装是表明其职业的标志。我们中许多人都佩戴着象征我们的信仰或与兄弟会友好关系的徽章。广告商通过广播、电视、印刷和其他的展示形式不停地重复着文字、设计和图片,目的在于创造符号,每当我们想要购买他们所出售的商品时,这些符号会自动浮现在我们的脑海中。毫不夸张地说,我们身边充斥着各种符号。对于一般人来说,最重要的符号是文字(口头的或印刷的)。正如数学家使用特殊符号来代表他们的概念一样,我们所有人都使用诸如“猫”、“金钱”、“汽车”、“电视”等文字来代表我们日常生活中的重要物品。

因此,土著居民的原始数词、表示数的卵石集合、希腊人的几何图形(其中的图形和文字都是符号)、阿拉伯人的修辞代数等等,都与现代代数和解析一样具有象征意义。它们的差异是由数学符号的进一步演变导致的,这些演变是由数学中的“遗传张力(hereditary stress)”驱动的。虽然希腊数学在逻辑辩证法的演变过程中可能没有遭受到言语表达的困扰,但是最终它也许因为未能发展出更高级的符号而受到抑制。

已故的历史学家乔治·萨顿认为,研究数学历史的主要原因在于它的人文价值。致力于叙述重要的数学发明及其创始人的轶事,当然符合这一标准。但同时,通过研究数学及其与文化环境之间的相互作用,可以得到更为深刻的理解和开拓出更广阔的视野。这不仅需要对历史事件进行叙述,而且还需要探究激发其动机的文化性质的演变力量。我相信,这些知识不仅可以提高外行人对我们文化中数学的性质和重要性的理解,而且让每一位教师从中受益。甚至,即使是富有创造力的数学家也能从中获利。每当我回顾我的科研工作时,我发现,对我过去产生影响的文化力量对正在进行的研究也在产生影响,而且对我未来想要完成的研究同样会产生影响,特别是在问题的选择上。

我们所知道的数学,除了计算的基本原理外,几乎没有什么必然性。另外一个星球上“有智力的”生命体的数学可能与我们的数学大不相同。但显然不可避免的是,任何一种生命形式在发明文化、进化的同时,也在创造数学。地球上每一种文化都发明了一种基本的计数方式,一些更先进的文化更是设计出了算术运算和各种基本的几何规则。在一种文化中,只有形成了某一特殊的阶层(比如古希腊),这一阶层的人花时间进行数学研究,数学才得以有显著的发展。这一特殊的阶层会随着文化的需求而发展并得到支持。一旦数学成为公认的专业,就可以预

料到它将像任何一种完善的文化元素一样拥有生命力,根据自身的需要及孕育它的文化的需求而成长。

简而言之,写这本书的主要目的是强调数学是人类文化遗产的自然组成部分,并探究将数学发展成如此庞大的知识体系的动机[“力量(forces)”]。由于之前还尚未有过这一类型的研究,因而给出一个明确的研究方法几乎是不可能的。就像布罗德本特教授在他敏锐的评论[《数学公报》(*The Mathematical Gazette*),第54卷,1970年,第70页]中指出的那样,这本书“没有提供一系列华而不实、肤浅的答案,相反,它列举事实,提出问题并给出可能的解释”。除了明确提到的问题之外,有洞察力的读者将会发现更多的问题,本版本为进一步的研究提供了可能性。

怀尔德

圣巴巴拉市,加利福尼亚州

1973年4月

# 目 录

前言	001
平装版前言	001
绪论	001
1 数学的性质	001
2 学校数学	002
3 数学的人文价值	004
4 现代数学教育“改革”	010
1 预备概念	012
1.1 文化的概念	012
1.1.1 作为一个有机整体的文化	012
1.1.2 文化与群体之间的关系	013
1.1.3 文化“生命”和个体“生命”的对比	015
1.2 文化变革与成长的过程	015
1.3 作为一种文化的数学	017
1.4 数学符号系统	018
2 数的早期演变	021
2.1 计数的开始	021
2.1.1 环境张力——物理张力和文化张力(Physical and Cultural)	021
2.1.2 原始的计数	023
2.1.2a “Numeral”和“Number”的区别	024
2.1.2b “基数”和“序数”的区别	024

2. 1. 2c	“2 计数”	024
2. 1. 2d	计数和一一对应	025
2. 1. 2e	数字类别和形容词的形式	026
2. 2	书写数字系统	027
2. 2. 1	苏美尔-巴比伦和玛雅数字、位值和零符号	027
2. 2. 1a	基数 10 和基数 60	028
2. 2. 1b	巴比伦和玛雅数字系统的位值	030
2. 2. 1c	零符号	032
2. 2. 1d	六十进制小数	034
2. 2. 2	密码化	034
2. 2. 2a	爱奥尼亚数字	035
2. 2. 3	位值和密码化的结合	036
2. 2. 3a	“印度-阿拉伯”数字	037
2. 2. 4	十进制小数	040
2. 3	数概念的演变	041
2. 3. 1	数字神秘主义和数字命理学	042
2. 3. 2	数字科学(A Number Science)	043
2. 3. 3	数概念的地位及其在巴比伦统治末期的符号表示	045
2. 3. 4	“毕达哥拉斯”学派	046
2. 4	插曲	049
3	几何的演变	051
3. 1	几何在数学中的地位	051
3. 2	希腊之前的“几何”	053
3. 3	几何为什么成为数学的一部分?	055
3. 3. 1	数与几何量	057
3. 3. 1a	几何数论	057
3. 3. 2	欧几里得数论: 数与量	061
3. 3. 3	数和几何的形式概念	064
3. 4	几何后期的发展	064

3.4.1	非欧几何	065
3.4.2	解析几何	066
3.5	几何模式的渗透对数学的影响	067
3.5.1	公理化方法和逻辑的引入	067
3.5.2	数学思想的革命	068
3.5.3	对分析学的影响	068
3.5.4	标签和思维模式	069
<b>4</b>	<b>实数和对无限的征服</b>	<b>072</b>
4.1	实数	073
4.1.1	无理数与无限	076
4.1.2	实数的无限小数符号	079
4.1.3	作为“量”的实数	080
4.1.4	基于自然数的实数	083
4.2	实数类型	084
4.2.1	康托尔对角线法	086
4.3	超限数和基数	087
4.3.1	将“计数数”扩展到无限	088
4.3.2	超限序数	092
4.4	什么是数	093
<b>5</b>	<b>演变的过程</b>	<b>095</b>
5.1	希腊之前的数学	095
5.2	希腊时代	098
5.3	希腊之后欧洲数学的发展	102
5.3.1	非欧几何	104
5.3.2	关于无限的介绍	105
5.4	数学演变的力量	106
5.4.1	评论和定义	107